NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 112, noviembre de 2022, páginas 167-182

Propuesta de aula para la iniciación al álgebra desde la resolución de problemas

Sebastián Castañeda Martínez
(Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. Colombia)
Carolina Castañeda Martínez
(Universidad Autónoma de Zacatecas. Colombia)
Ligia Amparo Torres Rengifo
(Universidad del Valle. Colombia)

Fecha de recepción: 02 de abril de 2022
Fecha de aceptación: 15 de septiembre de 2022

Resumen

La propuesta busca favorecer un acercamiento al álgebra escolar, mediante la resolución de problemas aritméticos a través del concepto de ecuación. Esta propuesta consta de dos situaciones, la primera se compone de cuatro problemas aritméticos y la segunda de cinco problemas aritméticos, la gran mayoría de estos contiene una serie de preguntas, que permiten guiar a los estudiantes en el proceso de resolución para caracterizar sus tipos de razonamiento y desempeños. Se espera que los estudiantes al realizar la propuesta identifiquen las relaciones entre las cantidades por medio de tablas o gráficos, asimismo los estudiantes puedan reconocer la relación de equivalencia del total en relación con sus partes. Además, se espera que puedan representar en lenguaje algebraico la estructura de los problemas planteados.

Palabras clave

Álgebra temprana, resolución de problemas, pensamiento aritmético, pensamiento algebraico, propuesta de aula.

Abstract

The proposal seeks to favor an approach to school algebra by solving arithmetic problems through the concept of equations. This proposal consists of two situations, the first one is composed of four arithmetic problems and the second one of five arithmetic problems, most of them contain a series of questions, which allow guiding the students in the resolution process to characterize their types of reasoning and performances. Students are expected to identify the relationships between quantities by means of tables or graphs, as well as to recognize the equivalence relationship of the total in relation to its parts. In addition, students are expected to be able to represent in algebraic language the structure of the problems posed.

Keywords

Early algebra, problem solving, arithmetic thinking, algebraic thinking, classroom proposal.

1. Introducción

Las investigaciones realizadas en el campo de la Educación Matemática (Freudenthal, 1983; Gallardo y Rojano, 1988; Brousseau, 1989; Kieran, 1992; Rojano, 1994; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Puig, 1998; Socas, 2007; Socas 2011; Castro 2012) dan cuenta de las dificultades que se presentan en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela. Las dificultades presentes en los estudiantes parecen manifestarse en la falta de comprensión y funcionalidad de ese conocimiento, lo cual se evidencia por medio de errores conceptuales y procedimentales, que no permiten que los estudiantes analicen fenómenos matemáticos, interpreten resultados, solucionen problemas relacionados con la vida diaria, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas, entre otros.

A pesar de los diferentes aportes que se han hecho, se reconoce que muchas de esas dificultades registradas aún permanecen y siguen vigentes en las aulas de las instituciones escolares. Por esta razón, este documento aporta a la documentación existente y generan pautas específicas para el tratamiento de un tránsito significativo de la aritmética al álgebra.

En este documento, se pretende describir la elaboración de una propuesta de aula que permita que el estudiante se aproxime al álgebra, de tal forma que use sus conocimientos previos (pensamiento aritmético), y a partir de estos desarrolle un pensamiento algebraico por medio de las relaciones entre cantidades.

Por lo anterior, se presenta un gran interés en la resolución de problemas al ser un instrumento metodológico importante, que permite por medio de la reflexión y la ejemplificación de problemas de la vida cotidiana de los estudiantes, la construcción de los conceptos matemáticos y establecer relaciones entre ellos.

Además, las ecuaciones matemáticas presentan un interés apremiante, debido a que en principio jugaron un papel importante en el nacimiento y desarrollo posterior del álgebra, son un foco prioritario en el estudio del álgebra en las aulas de clase, su campo de aplicación es inmenso y por eso hay gran número de investigadores dedicados a su estudio. Además, permiten expresar relaciones entre incógnitas, ayudan a desarrollar la capacidad creativa del intelecto y a resolver problemas de la vida cotidiana con mayor precisión.

Además, las ecuaciones son como afirma Hurtado (2014) “un objeto matemático que permite la introducción al lenguaje algebraico, la modelación de un gran campo de fenómenos de la vida diaria y de la matemática misma y el desarrollo de pensamiento algebraico, siendo, de este modo, fundamental en los estudios algebraicos escolares.” (p.33).

Por ello, se dan esas dos selecciones en el diseño e implementación de la propuesta de aula, la resolución de problemas y el concepto de ecuación al momento de abordar la introducción al álgebra.

Se puede sustentar además la relevancia del presente trabajo, con la importancia que se le da a los procesos algebraicos y a la resolución de problemas en los documentos oficiales, como los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), que determinan y orientan la educación. Es decir, son mediadores en la construcción global del currículo institucional de Colombia.

En los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) el pensamiento métrico y el variacional se caracterizan principalmente por los cálculos numéricos y algebraicos. La modelación hace parte fundamental de dichos pensamientos, ya que la falta de cultivar el proceso de modelar mentalmente situaciones de la vida real conlleva a que los estudiantes presenten dificultades al momento de resolver problemas. Por lo tanto, dicha actividad de modelación promueve en los estudiantes que identifiquen distintos caminos de solución, ya sea mental o gráficamente, que logren estimar una solución a través de cálculos numéricos inicialmente y algebraicos posteriormente para el objetivo de este trabajo y puedan ser capaces de identificar si es significativa dicha solución con respecto al problema planteado o por el contrario carece de sentido.

Por otra parte, es una realidad que durante varios años escolares predomina el pensamiento aritmético en los estudiantes, motivo suficiente para hacer uso de esos conocimientos previos al adquirir uno nuevo. Pero la realidad es otra, debido a que muchos profesores empiezan desde cero para abordar la enseñanza del álgebra, tal vez porque en muchos casos es lo que conocen y saben hacer, pero como consecuencia se presentan tantas dificultades.

En consecuencia, se han desarrollado gran cantidad de investigaciones que buscan desarrollar diferentes métodos para que se produzca en los estudiantes un aprendizaje significativo en el tránsito de la aritmética al álgebra, la cual es una de las problemáticas que más ha interesado a los investigadores en los últimos años, y se sustenta por medio de los resultados obtenidos a través de diversas evaluaciones, a nivel nacional, pruebas SABER 3, 5 y 9, e internacional, como lo son las pruebas PISA y TIMSS. En las pruebas saber la evaluación involucra el saber hacer en contexto, con uso de conceptos y estructuras matemáticas (ICFES, 2015).

Análogamente, las pruebas PISA se centran en la capacidad que debe tener el individuo para resolver problemas en contexto con base a los procesos de formular, emplear e interpretar, tan importantes para el desarrollo de dicha capacidad. Lo anterior denota la importancia que tiene la resolución de problemas para el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

Por eso, se considera fundamental introducir el álgebra de tal manera que se propicien características del pensamiento aritmético, (informales e intuitivas) así como lo establecen los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006): “Utilizo métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones” (p. 40). Entonces hay que seleccionar inicialmente problemas que faciliten su solución tanto aritmética como algebraicamente, para que los estudiantes sean capaces de resolver problemas usando herramientas que conocen desde el pensamiento aritmético, para, posteriormente, hacer uso de problemas que generen en el estudiante la necesidad de resolverlos algebraicamente, es decir, hacer uso de ecuaciones no aritméticas, de tal forma que el estudiante entienda que las expresiones en ambos lados de la igualdad son de la misma naturaleza, y comiencen a operar con la incógnita no como un número específico sino como una entidad (Andrews y Sayers, 2012).

Por lo anterior se plantea la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo diseñar una propuesta de aula sobre la resolución de problemas aritméticos como alternativa para la introducción del algebra escolar, desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática?

2. Marco de referencia conceptual

Se propone desde las perspectivas didáctica, curricular y matemática para consolidar y fundamentar algunos referentes conceptuales que sustentan el diseño y estructuración de la propuesta de aula. En la primera perspectiva se sitúan las dificultades que se presentan en el tránsito de la aritmética al álgebra, al tener como eje central la resolución de problemas desde un enfoque metodológico para el desarrollo de la propuesta de aula. La segunda se aborda desde los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

En la tercera perspectiva se mencionan algunos conceptos matemáticos que emergen en el diseño de la propuesta de aula, donde el foco principal es la ecuación de primer grado con una incógnita.

Ahora bien, desde la perspectiva didáctica se considera como punto de partida las consideraciones que realizan Verschaffel y De Corte (1996), al hacer una caracterización del pensamiento aritmético en la educación básica primaria de la siguiente manera:

- Conceptos numéricos y sentido de los números.
- El significado de las operaciones aritméticas.
- Control de hechos básicos de la aritmética.
- Lectura y escritura de problemas verbales y habilidades aritméticas

Estos autores además incluyen implícitamente procesos de abstracción en la resolución de problemas, aunque las matemáticas de la década de los 90´ eran estrictas en la separación obligatoria que se hacía con respecto a la enseñanza de la aritmética solo para la educación básica primaria y la enseñanza de los procesos algebraicos limitados solo para la educación básica secundaria, lo cual se sigue evidenciando en la mayoría de los currículos a pesar de las diferentes investigaciones que se han desarrollado sobre el early algebra o álgebra temprana.

Esa tradición curricular impulsó entonces investigaciones centradas en la búsqueda de cortes entre la aritmética y el álgebra (Filloy y Rojano, 1989) o nociones de obstáculos epistemológicos (Brouseau, 1997) que daban cuenta de las diferentes dificultades presentes en el aprendizaje del álgebra. Por lo anterior, muchos investigadores se dedicaron a analizar el pensamiento aritmético (Vershaffel y De Corte, 1996, Vergnaud, 1990) y el pensamiento algebraico (Filloy y Rojano, 1989, Kieran 2007, Kaput, et al 2008, entre otros).

Por otra parte, teniendo en cuenta las fronteras objeto de estudio de este trabajo entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico, se parte de reconocer lo mencionado por Kaput (2000) que establece que el pensamiento algebraico debe considerar los siguientes aspectos:

- Realizar y expresar la generalización de los sistemas simbólicos de manera más formal y convencional, y
- Razonar con formas simbólicas, incluyendo la manipulación sintáctica guiada de estas formas simbólicas.

Es bajo estos aspectos que Kaput propone ciertas etapas, bajo una mirada holística en la formación del pensamiento algebraico, mientras que Radford (2010) realiza una caracterización del pensamiento algebraico por medio de tres componentes estrechamente relacionadas:

- El sentido de indeterminancia
- La analiticidad
- La designación simbólica o expresión semiótica

Entendiéndose como sentido de indeterminancia objetos básicos como: incógnitas, variables, más específicamente ¨como algo opuesto a la determinancia numérica¨ (p. 39), la analiticidad como la forma de trabajar los objetos indeterminados y la designación simbólica como la forma específica de nombrar los objetos.

Por otro lado, Vergel y Rojas (2018) afirman que un componente del pensamiento algebraico es hacer uso del simbolismo como lo expresa Kieran (1989) "para caracterizar de forma significativa el pensamiento algebraico no es suficiente ver lo general en lo particular, sino que se debe ser capaz también de expresarlo algebraicamente" (p. 165). De lo anterior, es de gran importancia que en primer lugar los estudiantes establezcan las relaciones entre las cantidades, identifiquen estructuras, y resolver problemas.

Por último, la diferencia entre ambos pensamientos según Radford (2010) es que el pensamiento algebraico trata con cantidades desconocidas como si fueran conocidas, tratándolas de manera analítica, es decir, haciendo deducciones partiendo de premisas para conseguir un resultado, mientras que el pensamiento aritmético trabaja con cantidades conocidas.

Por otro lado, en la perspectiva curricular los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (MEN, 1998) también caracterizan el pensamiento numérico afirmando que: "El pensamiento numérico se adquiere gradualmente y va evolucionando en la medida en que los alumnos tienen la oportunidad de pensar en los números y de usarlos en contextos significativos" (p. 26). De lo anterior, se puede decir que es de gran importancia que los estudiantes utilicen los números en contextos significativos, para lo que la resolución de problemas es un proceso que permite al estudiante relacionar operaciones y cantidades específicas como, por ejemplo, identificar que si una persona va a comprar en la tienda una bolsa de leche que cuesta $2.700 con un billete de $10.000 y le devuelven $5.000 se logre identificar que le devolvieron mal. Es por este motivo que el desarrollo de este pensamiento necesita de la contextualización de los problemas.

La resolución de problemas por medio de contextos de la vida diaria debe permitir a los estudiantes que exploren, planteen preguntas y reflexionen sobre los posibles modelos a utilizar para llegar a su solución. Así mismo, dichos problemas deben tener lugar durante el aprendizaje y no después de él, ya que propicia que los estudiantes descubran y reinventen las matemáticas de una forma más asequible para ellos, es decir, hacen uso de un lenguaje que sea conocido y puedan relacionarlo posteriormente con un lenguaje más simbólico.

De lo anterior, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) aportan elementos claves para el desarrollo del presente trabajo, puesto que hacen énfasis en desarrollar pensamiento matemático en los estudiantes e invitan a cuestionar el para qué enseñar y no qué enseñar. Particularmente, en los Procesos Generales, Conocimientos Básicos y Contextos se centra la atención en la resolución y planteamientos de problemas, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y los contextos de la vida diaria respectivamente.

Además, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), establecen que las competencias matemáticas no surgen de la nada, por el contrario, se necesitan ambientes de aprendizaje en los cuales se vean reflejadas situaciones problema significativas y comprensivas, puesto que permiten desarrollar competencias en los estudiantes con un mayor grado de complejidad. Por lo anterior, se consideran necesarias e importantes las situaciones problema en la aproximación al álgebra, puesto que se evidencian grandes dificultades en el paso de la aritmética al álgebra por parte de los estudiantes, es decir, que se presenta una ruptura entre estos dos dominios.

Finalmente, como se mencionó anteriormente en este trabajo, existen dificultades en la naturaleza misma del álgebra, es decir, problemas de concepciones y conceptualizaciones de conceptos algebraicos (polinomio, ecuación, variable, etc.) Por lo tanto, las dificultades del paso de la aritmética al álgebra no tienen su origen solamente desde la perspectiva didáctica. Por lo anterior, se presentan conceptos netamente matemáticos acerca de los polinomios y las ecuaciones, los cuales son de vital importancia en la construcción de la propuesta didáctica, y el enfoque esperado desde la resolución de problemas en el paso de la aritmética al álgebra, pretende hacer que los estudiantes aborden estos conceptos.

En conclusión, para el diseño de la propuesta de aula se resaltan y sintetizan aspectos relevantes desde las tres perspectivas planteadas anteriormente puesto que permite articular y relacionar cada una de estas perspectivas para la consolidación de la propuesta basada en la resolución de problemas. La figura 1 evidencia lo anterior así:

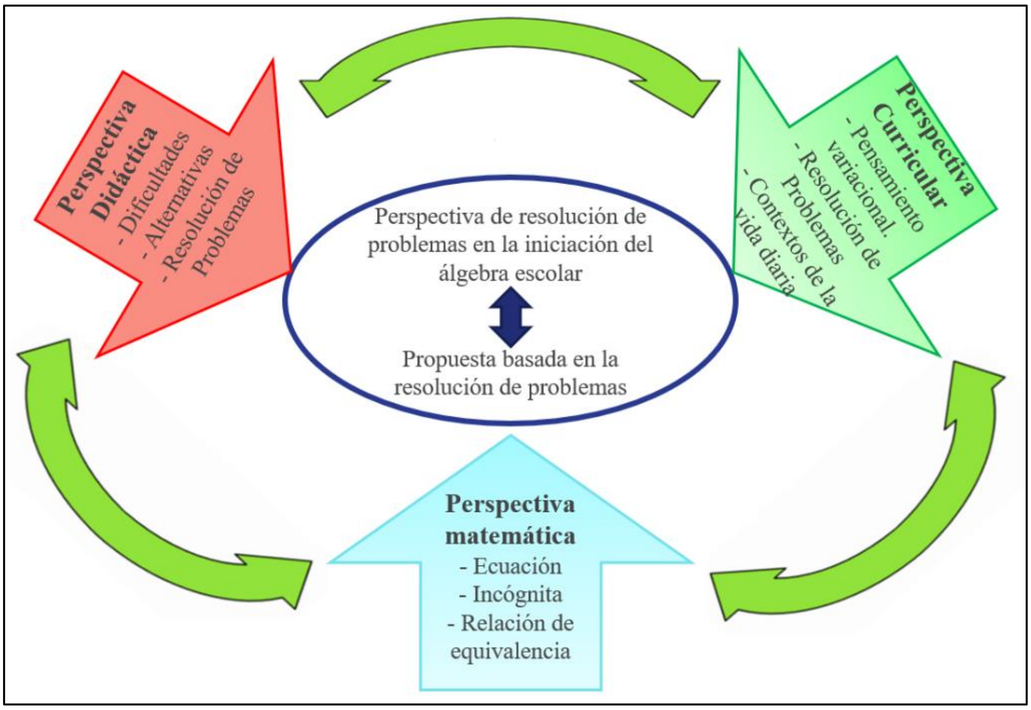


Figura 1. Diagrama de la relación entre las perspectivas didáctica, matemática y curricular.

En el diagrama anterior se presentan las relaciones de lo realizado en la propuesta de aula para abordar la problemática de la resolución de problemas en la iniciación del álgebra escolar, desde las perspectivas, didáctica, matemática y curricular. Además, como se puede observar las anteriores perspectivas tienen relaciones entre sí, resaltando lo más relevante de cada una de estas con el fin de consolidar una propuesta de aula basada en resolución de problemas y poder cumplir con los objetivos propuestos en este trabajo.

3. Propuesta de Aula

3.1. Situación 1. Fiesta de los niños y problemas aritméticos

En el mes de octubre, en muchos países se realizan actividades dedicadas a los niños. Entre esas actividades están: compartir dulces y colocarse el disfraz de su personaje favorito. La Institución Educativa Técnico Industrial 20 de Julio no es la excepción. Por ello, los profesores de primaria realizan actividades acordes a esta fecha. Particularmente, la profesora Mayerleny acompaña a sus estudiantes de grado 3°, 4° y 5° de primaria, disfrazados, a pedir dulces por los salones.

Ayuda a la profesora a resolver las situaciones que se le presentan.

Problema 1: Voy a la fiesta de Halloween y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

La profesora Mayerleny necesita saber cuántos estudiantes asistieron al colegio en los grados 3°, 4° y 5° antes de comenzar la actividad de pedir dulces por los salones**.** Si se sabe que en los tres grados asistieron 90 estudiantes, y el grado 3° tiene 16 estudiantes más que el grado 5°, y el grado 4° tiene 10 estudiantes más que el grado 3°. ¿Cuántos estudiantes asistieron en cada grado?

Tarea 1

1. Indica cómo se conforma la cantidad total de estudiantes.
2. De acuerdo con el problema:

- Indica si los datos involucrados permiten calcular la cantidad de estudiantes de cada grado o si por el contrario hacen falta datos.
- Explica tu respuesta.

3. Sí Mariana, estudiante de grado 4° afirma que la cantidad de estudiantes de grado 5° es de 20 estudiantes,

- Escribe la validez de esta afirmación.
- Explica tu respuesta.

4. Indica cuál de los grados tiene el mayor número de estudiantes.
5. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de grado 3°. Además, escribe la relación que se puede establecer entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 5°.
6. Escribe de qué dato depende el número de estudiantes de grado 4°. Además, escribe la relación que se puede establecer entre el número de estudiantes de grado 3° y grado 4°.
7. Indica cuántos estudiantes asistieron en los grados 3°, 4° y 5°.

Problema 2: Recojo dulces y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

Los grados 3°, 4° y 5° en compañía de la profesora Mayerleny recogieron 300 dulces. Los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°, y los estudiantes de grado 5° recogieron 50 dulces más que los estudiantes de grado tercero. ¿Cuántos dulces recogió cada grado?

Tarea 2

1. Daniel estudiante de grado 4° afirma que los grados 3°, 4° y 5° tienen la misma cantidad de dulces, es decir 100 dulces para cada grado.

- Escribe si esta afirmación es verdadera o falsa.
- Explica tu respuesta.

2. Según el problema, los estudiantes de grado 3° recogieron 80 dulces más que los estudiantes de grado 4°. De acuerdo con la afirmación de Daniel, los estudiantes de grado 4° recogieron 100 dulces. Explica esta situación.
3. Escribe cómo se calcula el total de dulces recogidos de acuerdo con lo que recogió cada grupo.
4. Explica cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 3°.
5. Explica cómo obtienes la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 5°.
6. Si *x* representa la cantidad de dulces de los estudiantes de grado 4° completa la siguiente tabla.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje simbólico
Cantidad de dulces de grado 4º	x
Datos Cantidad de dulces de grado 3°	
Cantidad de dulces de grado 5º	
Cantidad de dulces entre los tres grados	
Cantidad total de dulces en los tres grados es 300	

7. Ahora sí, encuentra la cantidad de dulces recogió cada grado.

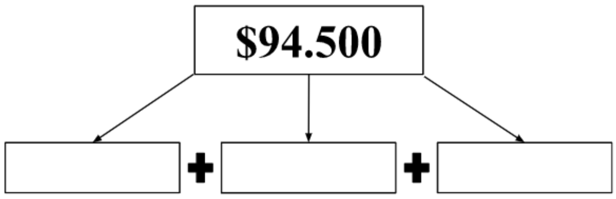
Problema 3: Nos disfrazamos para Halloween y resolvemos problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.

La profesora Mayerleny ayudó a disfrazar a los niños de grado 3º, para lo cual los dividió en tres grupos, los que querían usar pelucas, los que querían usar máscaras y los que querían pintarse la cara con maquillaje. La profesora en total gastó $94.500. Si las máscaras cuestan el doble que el maquillaje y las pelucas cuestan el triple de las máscaras. ¿Cuánto tiene que pagar cada grupo?

Tarea 3

1. Escribe los datos conocidos y desconocidos del problema.
2. Juan estudiante de grado 4° afirma que los $94.500 corresponden a sumar la cantidad de dinero que se gasta en máscaras, maquillaje y pelucas.

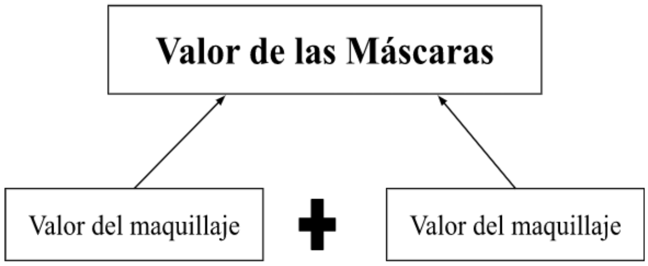
- Escribe si Juan tiene la razón.
- Teniendo en cuenta la respuesta anterior, completa la siguiente figura con las cantidades que hacen falta.



3. Marca con una (*x*) el valor que debe conocer la profesora Mayerleny para obtener la cantidad total de dinero que los estudiantes que se disfrazan con máscaras deben pagar.

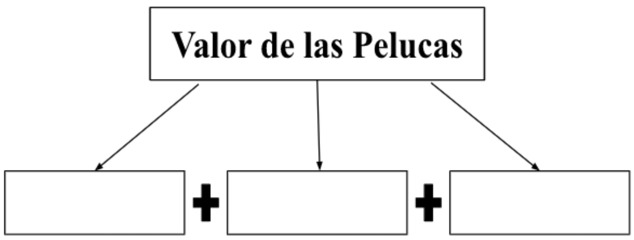
- El valor que deben pagar los estudiantes que se maquillaron ( )
- El valor que deben pagar los estudiantes que se colocaron pelucas ( )

4. Indica si la siguiente figura que hace Juan para comprender las relaciones entre las cantidades desconocidas, es decir, el valor de las máscaras y el valor del maquillaje es correcto.



- Escribe si el gráfico anterior representa el valor de las máscaras.
- Justifica tu respuesta.

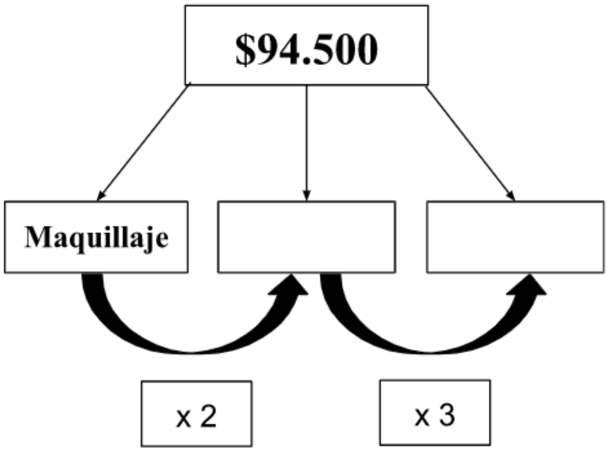
5. Completa la siguiente figura teniendo en cuenta las relaciones involucradas entre las cantidades desconocidas, es decir, explica la relación para encontrar el valor de las pelucas.



6. Teniendo en cuenta las figuras anteriores que representan las relaciones entre las cantidades,

- Establece cuántos maquillajes representan fel gasto total de la profesora Mayerleny.
- Escribe cuánto cuesta un solo maquillaje.

7. Completa las relaciones entre cantidades que se presentan en la siguiente figura, teniendo en cuenta el problema anterior.



8. Si (x) representa el valor del maquillaje, encuentra una expresión que permita resolver el problema.
9. Cristián afirma que la expresión en lenguaje formal es *"94500 = x + (2x) + 3(2x), siendo x el valor del maquillaje"* y Gabriela afirma que la expresión en lenguaje formal es *"94500 = 2x + 2x + 2(3x), siendo x el valor del maquillaje"*

- Escribe la validez de cada afirmación.
- Justifica tu respuesta.
- Compara la expresión que encontraste en la pregunta No. 8 con la expresión dada por Cristián.

10. Si el valor del maquillaje es de \$ 13.500, escribe cuánto habría invertido la profesora Mayerleny.

Problema 4: Disfruto de los dulces recogidos y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

La profesora Mayerleny accidentalmente juntó los dulces de Carolina, Karen y Sebastián, estudiantes de grado 4º. Ayúdala a saber cuántos dulces tenía cada uno, sabiendo que entre los tres estudiantes hay 147 dulces. Si Carolina tiene tres veces tantos dulces como Sebastián y Karen tiene 28 dulces más que Carolina. ¿Cuántos dulces tiene cada estudiante?

Tarea 4

1. Escribe los datos conocidos y desconocidos del problema.
2. Escribe de qué cantidad de dulces (de Karen o de Sebastián) depende la cantidad de dulces de Carolina.
3. Según las relaciones entre las cantidades del problema, completa la siguiente tabla.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje simbólico
Cantidad de dulces de Sebastián	x
Cantidad de dulces de Carolina	
Cantidad de dulces de Karen	
La cantidad total de dulces es la cantidad de dulces de Sebastián más la cantidad de dulces de Carolina, más la cantidad de dulces de Karen	
La cantidad total de dulces entre Sebastián, Carolina y Karen es 147	

4. Si los dulces de Sebastián son 17, indica cuántos dulces tiene:

- Carolina
- Karen

5. Comprueba la afirmación de Carmen si se sabe que Sebastián tiene 17 dulces ($x=17$). "147 = $x + 3x + (3x + 28)$"

6. Escribe la cantidad de dulces que tiene cada estudiante.

3.2. Situación 2. Bienvenida a la navidad y problemas aritméticos

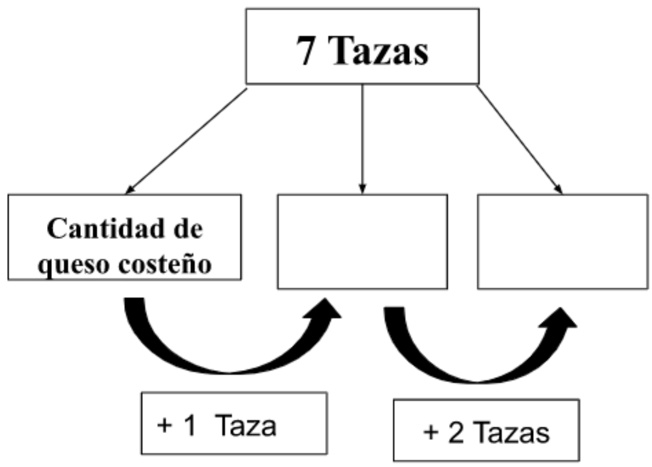
La navidad es una fecha en la que tiene lugar comidas especiales que se realizan para estar en familia y compartir momentos agradables. La institución Educativa Técnico Industrial Veinte de Julio propuso recetas para la elaboración de un plato navideño que consta de buñuelos, arroz con leche, arequipe, leche cortada y natilla. Los estudiantes de la Institución y las familias ayudaron a preparar cada una de las recetas que hacen parte del plato navideño y pasar un momento agradable en familia. A continuación, se presentan las recetas que realizaron algunas familias.

Problema 1: Preparo buñuelos y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones aditivas.

La abuela Ana quiere preparar 7 tazas de masa de buñuelos, para la cual se necesita una cierta cantidad de agua, de queso costeño y de maizena. Si la cantidad de agua tiene una taza más que la cantidad de queso costeño y la cantidad de maizena tiene 2 tazas más que la cantidad de agua, ¿qué cantidad se necesita de cada ingrediente para que tú y tu familia puedan hacer esta receta en casa?

Tarea 1

1. Escribe las cantidades que se enuncian en el problema y determina cuales son conocidas o desconocidas.
2. Escribe las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas que se presentan en el problema.
3. Completa el siguiente gráfico teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas de los ingredientes.



4. Teniendo en cuenta las relaciones anteriores, escribe la cantidad de agua, de queso costeño y de maizena que se necesitan para preparar 7 tazas de masa de buñuelos.
5. Si Anderson necesita preparar 14 tazas de masa de buñuelos, ¿cuánta cantidad de agua, de queso costeño y de maizena necesita?
6. Si Marcos tiene 3 tazas de queso costeño para preparar una cierta cantidad de masa de buñuelos, ¿qué cantidad de agua y de maizena necesita? ¿cuántas tazas de masa de buñuelos se obtienen?

Problema 2: Preparo arequipe y resuelvo problemas de composición homogénea con dos relaciones multiplicativas.

Daniela en compañía de su madre desean preparar una receta de arequipe, ayúdales a encontrar las cantidades exactas de cada uno de los ingredientes de acuerdo con la información que se presenta a continuación:

Para preparar 4 tazas de arequipe se necesita una cierta cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche. Si se sabe que la cantidad de tazas de azúcar es 3 veces la cantidad de tazas de bicarbonato y la cantidad de tazas de leche es 4 veces la cantidad de azúcar, ¿qué cantidad de tazas se necesita de cada ingrediente para que Daniela y su madre puedan preparar la receta?

Tarea 2

1. Escribe las cantidades que se enuncian en el problema y determina si son conocidas o desconocidas.
2. Completa la siguiente tabla teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas de los ingredientes.

Lenguaje cotidiano	Lenguaje simbólico
Cantidad de tazas de bicarbonato	x
Cantidad de tazas de azúcar	
Cantidad de tazas de leche	
Cantidad de tazas de los tres ingredientes	
Cantidad de tazas de los tres ingredientes es igual a 4	

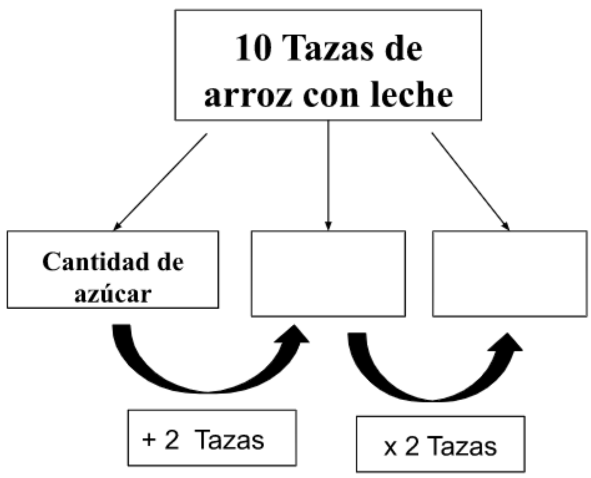
3. Escribe la cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche que se necesitan para preparar 4 tazas de arequipe.
4. Si Marcela quiere preparar 16 tazas de arequipe, ¿Cuánta cantidad de tazas de azúcar, de bicarbonato y de leche necesita?

Problema 3: Preparo arroz con leche y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

Una familia desea preparar 10 tazas de arroz con leche, para lo cual se necesita una cierta cantidad de arroz, de azúcar y de leche. Si se sabe que la cantidad de arroz tiene 2 tazas más que la cantidad de azúcar y la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de arroz. ¿Qué cantidad de arroz, de azúcar y de leche se necesita para preparar la receta?

Tarea 3

1. Completa el siguiente gráfico teniendo en cuenta las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas de los ingredientes.



2. Gustavo afirma que la preparación de 10 tazas de arroz con leche requiere más cantidad de tazas de azúcar que de leche.

- Escribe la validez de la afirmación de Gustavo.
- Justifica tu respuesta.

3. Gustavo además afirma que la expresión que le permite encontrar las cantidades en tazas de cada ingrediente es "$10 = x + (x + 2) + 2 * (x + 2)$" siendo x la cantidad de tazas de azúcar.

- Escribe la validez de la afirmación de Gustavo.
- Justifica tu respuesta.

4. Escribe la cantidad de tazas de arroz, de azúcar y de leche que se requiere para preparar 10 tazas de arroz con leche.
5. Si Luisa utiliza 1 taza de azúcar, escribe cuántas tazas de arroz con leche preparó.

Problema 4: Preparo dulce de leche cortada y resuelvo problemas de composición homogénea de dos relaciones multiplicativas.

Doña Marlene quiere preparar 11 tazas de dulce de leche cortada, para lo cual se necesita una cierta cantidad de azúcar, de zumo de limón y de leche. Si se sabe que la cantidad de azúcar es 5 veces la cantidad de zumo de limón y la cantidad de leche es 2 veces la cantidad de azúcar. ¿Qué cantidad de azúcar, de zumo de limón y de leche se necesita para preparar la receta?

Problema 5: Preparo natilla y resuelvo problemas de composición no homogénea con dos relaciones.

Mariana desea preparar 5 tazas de natilla, para lo cual se necesita una cierta cantidad de fécula de maíz, de azúcar y de leche. Si se sabe que la cantidad de fécula de maíz es 2 veces la cantidad de azúcar y la cantidad de leche tiene 5/2 de taza más que la cantidad de fécula de maíz. ¿Qué cantidad de fécula de maíz, de azúcar y de leche se necesita para preparar la receta?

4. Consideraciones finales

La propuesta de aula tiene como finalidad acercar a los estudiantes que inician el curso de álgebra, mediante la resolución de problemas altimétricos y sea un proceso significativo para ellos, ya que los estudiantes tienen un amplio dominio sobre este pensamiento. A continuación, se describen los propósitos de cada una de las situaciones en cuanto al desarrollo del pensamiento algebraico:

La situación 1 tiene como objetivo que los estudiantes lean con atención el problema y lo puedan comprender mediante las preguntas puntuales que se realizan, relacionadas con cada problema. En este sentido, se espera que los estudiantes logren visualizar las relaciones entre las cantidades, siendo este uno de los objetivos del álgebra. Asimismo, se tendrán en cuenta las diferentes formas de resolver un problema o interpretaciones que tienen los estudiantes mediante representaciones que permitan una mejor comprensión de la situación presentada.

Ahora bien, en la situación 2 se espera que el estudiante logre resolver el problema sin tener preguntas específicas de los datos presentados en cada uno de los problemas, es decir, que las preguntas van a ser menos en contraste con la situación 1. Por ejemplo, los tres primeros problemas presentan a lo más 5 preguntas, y los problemas 4 y 5 no tienen ninguna pregunta. Lo anterior, con el objetivo de observar el progreso del estudiante al resolver problemas, en el sentido que él logre ver la estructura algebraica y la manipule para resolver el problema, es decir, que logren ver las relaciones entre las cantidades y cómo poder hallarlas.

Por otra parte, las ecuaciones presentadas en la estructura de cada uno de los problemas son de primer grado con una incógnita, las cuales permiten evidenciar cual es el dato que se desconoce del problema. Ahora bien, en cuanto a las relaciones entre las cantidades, se presentan relaciones homogéneas aditivas, homogéneas multiplicativas y heterogéneas aditivas-multiplicativas. Además, el dominio numérico presentado en la situación 1 son los enteros y en la situación 2 son los números racionales. Además, se pretende que los estudiantes logren identificar expresiones algebraicas que representen las relaciones expuestas en cada problema y logren resolverlo a partir de esta expresión.

Cabe resaltar que la implementación de la propuesta de aula se debe desarrollar teniendo en cuenta los tiempos y el grado de escolaridad apropiado con el fin de seguir con la continuidad de las clases de acuerdo con lo que plantean los documentos nacionales y el plan de área de la institución. Además, es de gran importancia tener en cuenta los contextos de las situaciones, debido a que son fácilmente adaptables a otras fiestas o momentos específicos del curso escolar en diferentes países o comunidades. Por ejemplo, en Colombia el Halloween, y la Navidad, se podrían implementar finalizando octubre, en noviembre e iniciando diciembre. Lo anterior, con el fin que los estudiantes se vean familiarizados con los problemas presentados anteriormente.

Finalmente, este tipo de actividades podrían ayudar a la comprensión del álgebra y sería un reto tanto para los docentes como para los estudiantes, debido a que se aleja un poco de la forma en la cual se introduce a los conceptos del álgebra y puede ser significativo para los estudiantes debido a que pueden utilizar estrategias o heurísticas que dominan desde el pensamiento aritmético.

Bibliografía

Andrews, P. y Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *Journal of Mathematical Behavior*, (31), 476-488.

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Aproximaciones al álgebra: perspectivas para la investigación y la enseñanza*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1989), ‘Les obstacles ´epist´emologiques et la didactique des math´ematiques’. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits, Les Editions Agence d’ARC*, Quebec, 41-63.

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á.Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving Equations: The transitions from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics*, 9 (2), 19 – 25.

Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología Didáctica de las Estructuras Matemáticas* (Luis, P. Trad) Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. (2001)

Gallardo, A., y Rojano, T. (1988). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Researchs in Didactique dec Mathématiques*, 9, 155- 188.

Hurtado, C. (2014). *Análisis didáctico de las ecuaciones de primer grado con una incógnita real y su impacto en la Educación Básica*. [Trabajo de grado, Universidad del Valle, Cali, Colombia]

Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación. (2015). Publicación de resultados Saber 3o, 5o, y 9o. http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/

Kieran, C. (1992). El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar. En Grows, D.A. (Ed.), *Manual de Investigación en Matemática Enseñanza y Aprendizaje*. Macmillan Publishing Company. Newyork, pp. 390-419

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by algebrafying the K-12 curriculum: *National Center of Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science*. Dartmouth, MA.

Kaput, J., Carraher, D. W. y Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. Londres, Reino Unido: Routlege.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (1998). Lineamientos curriculares para matemáticas. Bogotá, Colombia.

Ministerio de Educación Nacional [MEN] (2006). Estándares básicos de competencias en matemáticas. Bogotá, Colombia.

Moreno, G. (2015). Una aproximación al álgebra temprana por medio de una secuencia de tareas matemáticas de patrones numéricos. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Puig, L. (1998). *Cómo poner un problema en ecuaciones*. Valencia.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA*, 4(2),37-62.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna: SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, 77, 5-34.

Vergel R., y Rojas P. (2018). *Álgebra escolar y pensamiento algebraico: aportes para el trabajo en el aula*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Fransisco José de Caldas.

Vergnaud. G. (1990). *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170.

Verschaffel, L. y De Corte, E. (1996). Mathematics teaching and learning. In D. C. Berliner & R. C. Calfee (Eds.), *Handbook of educational psychology* (pp. 491-549). New York, NY, US: Macmillan Library Reference Usa; London, England: Prentice Hall International.

Sebastián Castañeda Martínez: Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Universidad del valle). Estudiante de Maestría en Educación Matemática. (Benemérita Universidad Autónoma de Puebla). Colombia
Email: sebastian.castanedam@alumno.buap.mx

Castañeda Martínez Carolina: Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Universidad del valle). Estudiante de Maestría en Matemática Educativa. Docente de primaria (Colegio Hispanoamericano). Colombia
Email: castaneda.carolina@correounivalle.edu.co

Ligia Amparo Torres Rengifo: Profesora del Área de Educación Matemáticas del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, Cali – Colombia.
Email: ligia.torres@correo.univalle.edu.co