NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 113, marzo de 2023, páginas 25-44

Visualización dinámica. Una aplicación para el concepto de derivada en el bachillerato

Edgar Enrique Solís de los Reyes
(Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel, Azcapotzalco, UNAM, México)

Fecha de recepción: 24 de febrero de 2022
Fecha de aceptación: 26 de noviembre de 2022

Resumen

En Matemática Educativa se ha trabajado mucho sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con el uso de tecnología, en este contexto una noción que se usa comúnmente, pero sin definición, es visualización o visualización dinámica. Por tanto, en esta investigación se establece un marco teórico para definir el constructo de *visualización dinámica* como un enfoque de enseñanza de las matemáticas. Bajo este enfoque se diseñó un planteamiento didáctico para la enseñanza del concepto de derivada en el bachillerato, que propicia que los alumnos comprendan el concepto a través de estudiar algunas de sus propiedades. Mediante este enfoque de enseñanza los alumnos lograron la comprensión del concepto y su aplicación para construir la gráfica de la función derivada a partir de analizar la gráfica de la función.

Palabras clave

Enseñanza de las matemáticas, Formación de conceptos, Educación y tecnología, Aprendizaje significativo, Análisis geométrico, Visualización dinámica, Derivada, Registros de representación.

Abstract

In Educational Mathematic have been work much about the teaching and learning the mathematics with the use of technology, in this context there is a notion that use it commonly but without definition, it’s visualization or dynamic visualization. Therefore, in this investigation it is established a theoretical framework for defined the *dynamic visualization* construct as an approach of teaching mathematics. Under this approach it was designed a didactic proposal for the teaching of the concept of derivative in high school, which encourage that the students understand the derivate concept through of study some your properties. By means this approach of teaching the students achieved the understanding of the concept and applied it to build the graph of the derived function from analyzing the graph of the function.

Keywords

Teaching mathematics, Concepts formation, Education and technology, Meaningful learning, Geometric analysis, Dynamic visualization, Derivative, Representation registers.

1. Introducción

Uno de los temas que se ha estudiado con gran amplitud en la Matemática Educativa es el uso de recursos tecnológicos para la enseñanza y aprendizaje de temas de matemáticas. Por ejemplo (Gutiérrez, 2006) aborda el uso de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de geometría, o (Santos, 2003) que trata sobre el uso de la tecnología para la resolución de problemas.

Uno de los muchos temas que se han estudiado en la Matemática Educativa mediante el uso de recursos tecnológicos es la derivada, como es el caso de (Gutiérrez Mendoza, 2019). Entre las investigaciones acerca del tema de la derivada y el uso de la tecnología podemos encontrar el término *visualización dinámica*, por ejemplo, en (Tellechea, 2011). Aunque en este trabajo no se define qué es la visualización dinámica se entiende que se refiere al uso de gráficas dinámicas.

Las gráficas dinámicas se pueden diseñar a partir de softwares de geometría dinámica que permiten interactuar digitalmente con los objetos matemáticos, de modo que, al manipular algún elemento de un objeto matemático de forma dinámica esto cambia alguno de los aspectos de dichos objetos. Por ejemplo, al variar los parámetros de una función y que dinámicamente cambie la forma de su gráfica, tales cambios se pueden visualizar por medio de softwares dinámicos.

Esta característica dinámica que se puede establecer entre diferentes elementos de los objetos matemáticos puede propiciar aprendizajes en los alumnos, pues como menciona (Álvarez-Manilla, 1991, p.3) "el aprendizaje se propicia al modificar los valores de una o más variables y verificar sus efectos", y las gráficas dinámicas permiten visualizar, analizar y experimentar estos cambios y sus efectos en los objetos matemáticos.

No obstante, no se tiene una definición de lo que es visualización dinámica, por lo que en este artículo se pretende generar el constructo de este término, es decir, plantear un enfoqué de enseñanza de las matemáticas a través del uso de softwares que permiten la interacción dinámica con los objetos matemáticos, y fundamentarlo a partir de los conceptos de: conocimientos previos, aprendizaje significativo, desequilibrio cognitivo y los registros de representación semiótica.

De este modo, se plantea un enfoque de enseñanza de las matemáticas estructurado teóricamente, que presenta una forma de desarrollar la enseñanza mediante un uso especifico de recursos tecnológicos, que se combina con una forma determinada de trabajo con los alumnos para generar en ellos aprendizajes significativos, al que se le denominó visualización dinámica.

También se muestra cómo se puede desarrollar la enseñanza de las matemáticas mediante la visualización dinámica para un tema específico, en este caso, el concepto de derivada. La aplicación de esta propuesta de enseñanza se realizó en un grupo de cálculo del Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Azcapotzalco (CCHA), UNAM.

2. Marco teórico

2.1. Aprendizaje significativo

Un *aprendizaje significativo* es el que logra generar nuevos significados, y es la consumación de un proceso de aprendizaje significativo; por ejemplo, como veremos más adelante, una manera de generar significados en matemáticas es mediante la coordinación entre registros de representación semiótica. Además, para lograr ese tipo de aprendizajes es fundamental que el proceso de aprendizaje inicie a partir de los *conocimientos previos* de los alumnos, pues como menciona (Ausubel et al., 2010) el factor más importante que influye en el aprendizaje es lo que ya se sabe.

Los conocimientos previos son todos los conocimientos que los alumnos han adquirido a lo largo de su vida, tanto los empíricos generados a través de sus vivencias como los formales desarrollados a través del estudio a lo largo de su trayectoria escolar. Ausubel (2010) menciona que lo esencial para lograr un aprendizaje significativo es relacionar de forma sustancial los conocimientos previos de los alumnos con lo que se busca que aprendan, entendiendo por relación sustancial aquella en que “las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición” (Ausubel et al., 2010, p. 48).

También es importante considerar qué tipo de aprendizaje es el que se quiere que los alumnos logren, por ejemplo: conceptual, procedimental o actitudinal. Para el caso de un aprendizaje conceptual Ausubel (2010) indica que los factores más importantes que afectan su adquisición son:

1. La heterogeneidad de los ejemplos después de la consolidación en un ambiente más homogéneo.
2. La combinación y la secuenciación de los ejemplos positivos y negativos.
3. La relevancia de la información presentada o disponible para el concepto en cuestión.

En la adquisición de conceptos se consideran principalmente dos diferentes etapas: la formación de conceptos y la asimilación de conceptos. La primera se da usualmente a temprana edad, en niños preescolares, es un proceso de descubrimiento en el que intervienen procesos como el de abstracción y generalización; mientras que, en individuos de más edad, como adolescentes y adultos, la formación de conceptos comúnmente se da por asimilación. En esta etapa las personas “aprenden nuevos significados conceptuales cuando se presentan los atributos de criterio de los conceptos y se relacionan estos atributos con ideas pertinentes establecidas en sus estructuras cognitivas” (Ausubel et al., 2010, p. 92). Así, la asimilación de conceptos se lleva a cabo a través de analizar las características que definen al concepto y comprobarlas en diferentes situaciones:

- En las que sí se cumplen y se tienen ejemplos del concepto.
- En las que alguna característica no se satisface y no se ejemplifica el concepto.

Debido a la naturaleza de la asimilación de conceptos en la que se presentan las características del concepto y contextos apropiados en los que estas se satisfacen o no, esta adquisición es característicamente una forma de aprendizaje significativo por recepción; en ella interfieren procesos activos de relación, diferenciación e integración referentes para la obtención de nuevos significados que interactúan con los conceptos previos que los alumnos poseen. De modo que, tanto más activa sea dicha interacción más significativos serán los conceptos asimilados. En nuestra propuesta relacionamos la asimilación de conceptos con su representación mediante los registros de representación semióticos, que estudiaremos más adelante.

Entonces, la asimilación de conceptos consiste principalmente en un proceso de abstraer características comunes y esenciales de una clase de objetos o acontecimientos. En (Ausubel, 2010, p. 97) se enlistan los siguientes componentes psicológicos que intervienen en este proceso:

1. Análisis discriminativo de diferentes patrones de estímulo.
2. Formulación de hipótesis relativa a elementos comunes abstraídos.
3. Comprobación subsecuente de la hipótesis en situaciones específicas.
4. Designación selectiva, una categoría general bajo la cual pueden incluirse los objetos a los que se les pueden atribuir las características comunes.

5. **5.** Relación de la designación selectiva con las ideas de afianzamiento pertinentes de la estructura cognitiva.
6. **6.** Diferenciación de los conceptos nuevos de los relacionados y previamente aprendidos.
7. **7.** Generalización de los atributos de criterio del concepto nuevo a todos los miembros de la clase.
8. **8.** Representación del nuevo contenido categorial por medio de símbolos lingüísticos que concuerden con el empleo convencional.

La representación del nuevo concepto es parte de un aprendizaje representacional o de representaciones que consiste en "hacerse del significado de símbolos solos (generalmente palabras) o de lo que estos representan" (Ausubel et al., 2010, p. 52), y corresponde al final del proceso para la formación de conceptos. De este modo, el objetivo es que los alumnos puedan expresar en símbolos o palabras los nuevos conceptos.

Por tanto, el aprendizaje de un concepto es significativo cuando se logra que los alumnos representen el concepto mediante símbolos, de modo que, esta representación sea la conclusión de un proceso de aprendizaje significativo que relacionó sustancialmente sus conocimientos previos con el nuevo concepto mediante el análisis y reconocimiento de las características que lo determinan, con lo que los alumnos son capaces de determinar en diversos ejemplos cuándo este concepto se satisface y cuándo no.

2.2. Registros de representación semiótica

La representación de un concepto en símbolos significa el logro del aprendizaje adquirido y corresponde al desarrollo de una representación mental del concepto como parte del conjunto de concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto o situación y todo lo relacionado a ello (Duval, 1993).

No obstante, en el estudio de las matemáticas hay otras representaciones que son necesarias para la comprensión y manipulación de los conceptos, las representaciones semióticas, que son "producciones constituidas por el uso de signos que pertenecen a un sistema de representación que tiene sus propias restricciones de significado y funcionamiento."[1] (Duval, 1993, p. 39). Por ejemplo, la ecuación de una circunferencia es una representación semiótica del concepto circunferencia en el registro algebraico.

De acuerdo con (Duval, 1993) las representaciones semióticas son necesarias porque los objetos matemáticos no son accesibles mediante la percepción o experiencias intuitivas, como sí lo son los objetos "reales". Por tanto, las representaciones semióticas son esenciales para el estudio de los objetos matemáticos pues son la forma de accederlos, manipularlos y comprenderlos, de modo tal que incluso determinan y delimitan la forma de trabajarlos, ya que "la posibilidad de efectuar tratamientos sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación que se utilice."[2] (Duval, 1993 p. 38).

---

[1] Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement.
[2] La possibilité d'effectuer des traitements sur les objets mathématiques dépend directement du système de représentation sémiotique utilisé.

Sin embargo, un aspecto central en el aprendizaje de un objeto matemático es la distinción del objeto de sus representaciones. Por ejemplo, los alumnos deben distinguir que la ecuación de una circunferencia no es el concepto de circunferencia, al mismo tiempo deben reconocer la importancia que tiene su representación algebraica para su estudio y comprensión.

Para evitar la confusión entre el objeto matemático y sus representaciones es fundamental lograr la coordinación del objeto en varios registros de representación semiótica, de esta manera se logra una comprensión conceptual de los objetos (Duval, 1993). Así, en el estudio de las matemáticas el trabajo de representación de los objetos y la coordinación entre sus registros es lo que lleva al aprendizaje, pues no hay conocimiento que una persona pueda lograr sin una actividad de representación (Duval, 2017).

Por tanto, las representaciones semióticas son el medio para lograr la comprensión de los objetos matemáticos, que se ve culminada en el desarrollo de representaciones mentales, pues como afirma (Piaget, 2004) el proceso para lograr una representación[3] se da cuando se logran distinguir los significantes de los significados, es decir, los conceptos de sus representaciones, por lo que el desarrollo de las representaciones mentales depende de una interiorización de representaciones semióticas. De este modo podemos considerar que un alumno de bachillerato aprendió un concepto matemático cuando logra coordinar el concepto en diferentes representaciones semióticas y este proceso lo lleva a desarrollar representaciones mentales del concepto.

2.3. Desequilibrio cognitivo

Uno de los aspectos centrales para lograr un aprendizaje significativo es generar una duda en los estudiantes. De hecho, de acuerdo con (Díaz Barriga Arceo y Hernández Rojas, 2010) algo que se debe de trabajar para lograr este tipo de aprendizajes es determinar las discrepancias, contradicciones y similitudes entre las ideas nuevas y las previas, es decir se deben generar desequilibrios cognitivos en los alumnos ya que son “una de las fuentes de progreso en el desarrollo de los conocimientos.” (Piaget, 1998, p.14).

En términos generales un desequilibrio cognitivo es un desajuste en la estructura conceptual o teórica de los alumnos que los obliga a analizar eso que generó el desajuste para poder reestructurar su cuerpo de conocimientos, de modo que, en el proceso se integre el nuevo conocimiento relacionándolo con lo que ya sabían. Por ejemplo, al enseñar el concepto de infinito se puede hacer ver a los alumnos que sus concepciones comunes e intuición no corresponden con este concepto, específicamente el concepto de infinito contradice la noción común de que el todo es mayor que sus partes.

Tras generar un desequilibrio cognitivo el proceso de enseñanza y aprendizaje debe llevar a los alumnos a responderse los cuestionamientos a los que se enfrentaron y a superar el desequilibrio para reacomodar su estructura cognitiva incluyendo ahora el nuevo conocimiento. Este proceso se puede ejemplificar de la siguiente manera: Cada persona tiene en su mente un mapa geográfico de la ciudad o lugar donde habita, el cual está formado de manera individual de acuerdo con los lugares que dicha persona conoce o frecuenta y las rutas que toma para llegar a ellos. Cuando una persona aprende una nueva ruta para llegar a un lugar, o bien cuando conoce un lugar nuevo, el mapa geográfico que tiene en

[3] Piaget distingue diferentes tipos de representaciones, aquí nos referimos a la representación cognoscitiva, que se da cuando se logra el equilibrio entre la *asimilación* y la *acomodación*. Estos dos conceptos de abordan más adelante.

su mente se modifica, ya sea porque se agregó una nueva ruta para llegar de un punto a otro, o bien porque se anexó un nuevo lugar y la manera de llegar a él a partir de lugares previamente conocidos.

Esta misma situación se debe de dar para generar un aprendizaje significativo en los alumnos mediante la superación de un desequilibrio cognitivo, o se agrega a su estructura cognitiva una nueva forma de hacer algo, o se agrega un nuevo concepto y alguna relación, o relaciones, con otros que ya se tenían, lo que corresponde a dos procesos distintos intrínsecamente relacionados, *asimilación* y *acomodación*.

De acuerdo con (Piaget, 2016) la asimilación es la incorporación de un objeto externo a la estructura cognitiva, siguiendo con el ejemplo anterior corresponde a conocer un nuevo lugar o una nueva ruta; mientras que la acomodación son las modificaciones a la estructura debidas a los objetos que se integran, en nuestro ejemplo son las formas de llegar al nuevo lugar desde los lugares conocidos.

Entonces, el desequilibrio cognitivo es el detonante para modificar la estructura conceptual de los alumnos, pues de acuerdo con (Piaget, 1998) es esto lo que obliga a un sujeto a superar su estado actual, es el motor de búsqueda, sin él el conocimiento continuaría siendo estático. Por tanto, para la investigación que aquí se presenta se planteó usar el desequilibrio cognitivo como detonante para partir de los conocimientos previos de los alumnos y guiarlos mediante un proceso de enseñanza y aprendizaje hacia la asimilación y la acomodación, a través de generar relaciones sustanciales entre lo que ya sabían y lo que propició el desajuste, para lograr así incorporar el nuevo conocimiento a su estructura mental.

Lo podemos ejemplificar de la siguiente forma, el conocimiento que ya se tiene es como una casa y el nuevo conocimiento es una ampliación a la construcción. Para realizar la nueva construcción es necesario romper la edificación de la casa en algunos puntos para incorporar la ampliación y formar una nueva y sólida estructura, y la unión entre las partes debe ser estrecha y fuerte, deben conectarse sustancialmente donde en un principio se rompió la casa.

2.4. Visualización dinámica

La visualización dinámica consiste en la enseñanza de las matemáticas usando como recursos didácticos aplicaciones digitales, aplicaciones de visualización dinámica, por medio de las cuales se posibilita presentar y manipular simultáneamente objetos matemáticos en diferentes registros de representación semiótica, de modo tal que al manipular alguno de los elementos del objeto en uno de los registros esto causa que cambien de forma dinámica sus características correspondientes en los otros registros. De este modo se lleva a cabo el estudio y análisis de los objetos matemáticos conjuntando lo experimental con lo conceptual al experimentar y analizar las propiedades de estos objetos a través de su coordinación en varios registros de representación.

Por ejemplo, mediante la visualización dinámica se puede abordar el estudio de la gráfica de una función desarrollando una aplicación que permita a los alumnos modificar los parámetros de la función para analizar y visualizar dinámicamente los cambios que esto provoca en su gráfica. De este modo con la visualización dinámica se experimentan las relaciones geométricas de la gráfica de una función con los valores de sus parámetros en su expresión analítica.

La manipulación digital que se logra por medio de la visualización dinámica es uno de sus elementos didácticos más importantes pues permite a los alumnos interactuar y experimentar digitalmente con los elementos de un objeto o concepto matemático, y dinámicamente se puede observar y analizar su comportamiento y los cambios que esto genera en otros registros, lo que propicia el aprendizaje. Los softwares más usados para la visualización dinámica son los denominados de geometría dinámica, programas de computadora que permiten la interacción dinámica entre objetos matemáticos. El que se usó para el presente trabajo fue GeoGebra.

De este modo, la visualización dinámica es un enfoque de enseñanza de las matemáticas a través de recursos digitales, su principal característica es que fomenta que los alumnos analicen y experimenten digitalmente con los objetos matemáticos, específicamente con los elementos de los conceptos en diferentes registros de representación para propiciar que los alumnos logren la coordinación entre registros. Además, el proceso de enseñanza y aprendizaje bajo este enfoque toma como base los conocimientos previos de los alumnos para propiciar y superar un desequilibrio cognitivo a través del cual se insertarán relaciones sustanciales del nuevo conocimiento con el que ya se tiene. Representamos esto en el siguiente esquema

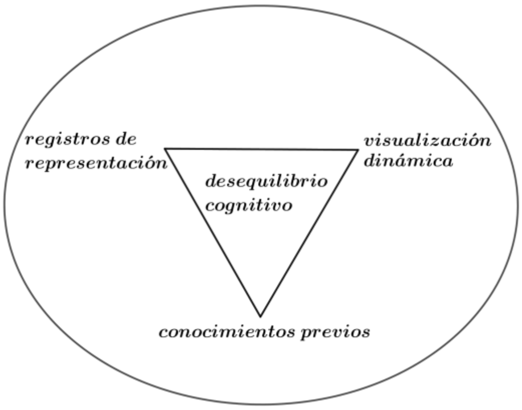


Figura 1. Esquema del enfoque de enseñanza de las matemáticas de *visualización dinámica*.

El punto de inicio son los conocimientos previos del alumno que se simboliza en el vértice del triángulo con la leyenda de "conocimientos previos". A partir de ahí se construye el triángulo hacia arriba esquematizando que obtendremos una nueva estructura, nuevos conocimientos sobre los que ya se tenían. Los otros dos elementos que determinan este enfoque de enseñanza son los registros de representación y la visualización dinámica, que se esquematizan en los otros dos vértices del triángulo. El triángulo esquematiza la forma de trabajo, el inicio y las dos directrices del proceso, y ya que parte de ese proceso busca la generación de desequilibrios cognitivos esto se esquematiza con una leyenda al interior del triángulo. Todos estos elementos se encierran en el esquema representando que forman un solo enfoque con diversos elementos relacionados entre sí, trabajando en conjunto con el propósito de lograr aprendizajes significativos en los alumnos.

3. Metodología

Se realizó un planteamiento didáctico para el concepto de derivada mediante el enfoque de enseñanza descrito de visualización dinámica, el cual se enmarcó en el Programa de Estudio de Cálculo Diferencial e Integral I y II del Colegio de Ciencias y Humanidades (CCH). En este programa el concepto de derivada se ubica en la segunda unidad del curso de Cálculo I. La primera unidad de este curso concierne a la noción de límite.

La enseñanza del concepto de derivada se centró en su interpretación geométrica, y se tomó como base el conocimiento previo de los alumnos a través de la noción intuitiva de recta tangente: la recta que toca a una curva en un solo punto. Con respecto a esta noción se buscó generar un desequilibrio cognitivo en los alumnos al mostrar una limitación acerca de ella, que no es suficiente para caracterizar a esta recta en cualquier curva. Por ejemplo, en una función polinomial de grado tres hay puntos para los cuales la recta tangente puede tocar a la curva más de una vez.

Para este planteamiento se desarrollaron nueve aplicaciones de visualización dinámica nombradas de la siguiente forma:

1. ¿Qué es una recta tangente a una curva?
2. Secante.
3. Tangente.
4. Pendiente de una recta.
5. Interpretación geométrica de la derivada.
6. La derivada de la parábola.
7. La gráfica de la derivada.
8. Sobre la existencia de la derivada.
9. Sacando derivadas geométricamente.

Las aplicaciones se diseñaron para trabajar con los alumnos mediante discusiones y análisis que llevaran a la construcción del concepto de derivada, con cada una de ellas se plantea el estudio de diversos elementos del concepto. El título de la aplicación sugiere el sentido que cada una tiene. Por ejemplo, con la primera se estudia la limitación de la noción intuitiva de recta tangente al analizar un ejemplo de una curva cuyas rectas tangentes en algunos de sus puntos la tocan más de una vez.

Con la segunda aplicación, Secante, se busca retomar los elementos algebraicos y geométricos de la pendiente de una recta. Además, analizar que cuando los puntos de la secante coinciden en la aplicación deja de visualizarse la recta porque un punto no determina una recta, entonces la expresión algebraica de su pendiente se indetermina. Esto mismo ocurre en la tercera aplicación, Tangente, en la que se hace el mismo trabajo, pero ahora también se incluye el análisis numérico en la función cuadrática.

En este punto se guía el estudio para que los alumnos concluyan que al acercar los puntos de la recta secante se está haciendo tender un punto hacia otro, y que, por tanto, el proceso que se está realizando corresponde a un límite. A través de este análisis los alumnos concluyeron que el proceso de límite que se realiza es sobre las pendientes de las rectas secantes que tienden a la pendiente de la recta tangente. La siguiente imagen muestra la aplicación al visualizar la tangente a la curva.

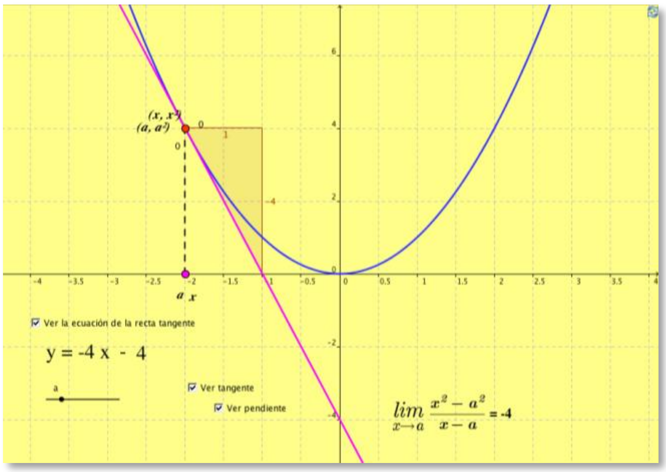


Figura 2. Aplicación de visualización dinámica *Tangente*.

En el análisis de esta aplicación se explicó que la derivada de una función f en un punto es $\lim_{x\longrightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, que resulta ser la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto, y que la recta tangente a la curva en un punto es la que tiene como pendiente a la derivada. Se enfatizó que se trata de un concepto local que se relaciona con la pregunta inicial: ¿qué es una recta tangente a una curva?, y se concluyó que con el concepto de derivada se puede entender el hecho de que la recta tangente puede tocar a la curva en más de un punto. De este modo se logró una generalización de la noción intuitiva de recta tangente.

A través de este proceso se buscó llevar a los alumnos a superar el desequilibrio cognitivo, hacia la asimilación y acomodación del nuevo conocimiento al relacionarlo sustancialmente con su conocimiento previo. No obstante, para lograr la comprensión de un concepto es necesario poder identificar cuándo se cumple y cuándo no, además de poder aplicarlo. Por tanto, el trabajo con las aplicaciones restantes tiene este propósito.

La cuarta aplicación, Pendiente de una recta, es para enfatizar que la pendiente es una razón entre variaciones en el contradominio y en el dominio de la función, la cual determina el crecimiento de la función y qué tan rápido lo hace. Entonces, para cada punto del dominio puede corresponderle una razón, hecho que se estudia en la quinta aplicación, Interpretación geométrica de la derivada, a través de una función polinomial de grado 3. Como se muestra en la Figura 3, se hace ver que para cada valor de x se tiene una recta tangente con su respectiva pendiente, por lo que a cada valor del dominio le corresponde un único valor, su derivada. Por tanto, lo que se tiene es una función, la función derivada.

Esta concepción de la función derivada se refuerza con la sexta aplicación, La derivada de la parábola, en ella se aborda nuevamente la interpretación geométrica de la derivada ahora en una parábola, así se trabaja la coordinación entre tres registros de representación: gráfico, algebraico y numérico.

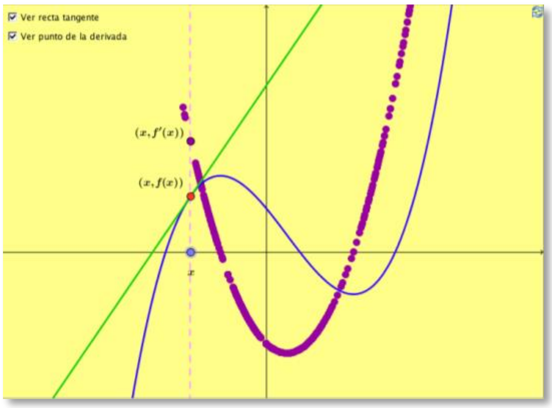


Figura 3. Gráfica de la derivada a partir de la pendiente de la recta tangente a la función en cada punto.

Con la séptima aplicación, La gráfica de la derivada, se analiza cómo obtener la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función. En este caso se hace el análisis con la gráfica de una función trigonométrica. Se analizó cómo es la pendiente de la recta tangente a lo largo de la curva, cómo va cambiando y cómo esto corresponde con la función derivada.

Como se muestra en la Figura 4, en la séptima aplicación se pueden estudiar las gráficas de la función y la de su derivada al mismo tiempo, cada una en un plano cartesiano distinto, y bajo el esquema de visualización dinámica los elementos de cada una de estas gráficas están relacionados dinámicamente entre sí. Es así como, mediante esta aplicación también se analizaron los puntos de inflexión y los máximos y mínimos de la gráfica de la función y su relación con la gráfica de la derivada.

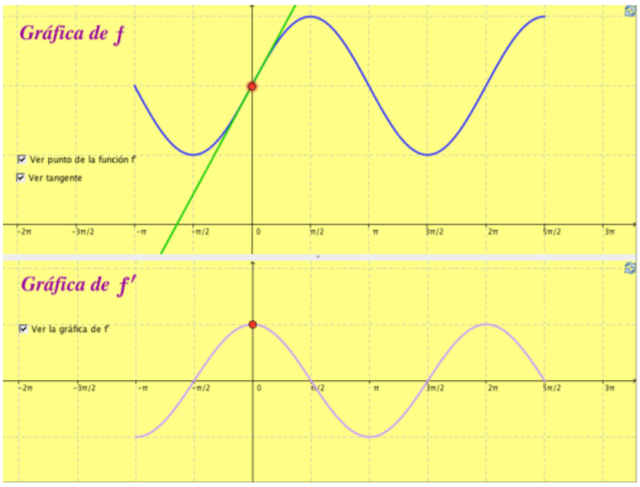


Figura 4. Aplicación *La gráfica de la derivada* para estudiar la gráfica de la derivada a partir de la gráfica de la función.

Con la octava aplicación, Sobre la existencia de la derivada, se mostró que la derivada no siempre existe, es decir, un caso en que no se satisface el concepto. Para esto se presenta una función con discontinuidad de brinco y se estudian las pendientes de las rectas tangentes a la curva en cada parte de su gráfica, como se muestra en la Figura 5, y se analizó como debería ser la gráfica de la función derivada, que también estaría rota en el punto de discontinuidad de la función.

Se guió la discusión para llegar a entender que los límites laterales del cociente de diferencias en el punto son diferentes, por tanto, no existe el límite del cociente en tal punto, entonces no hay derivada. Cabe mencionar que en el desarrollo del tema no se menciona la continuidad explícitamente, para este caso solo se hace mención que la gráfica de la función está "rota". La continuidad no es un tema del programa de Cálculo del CCH.

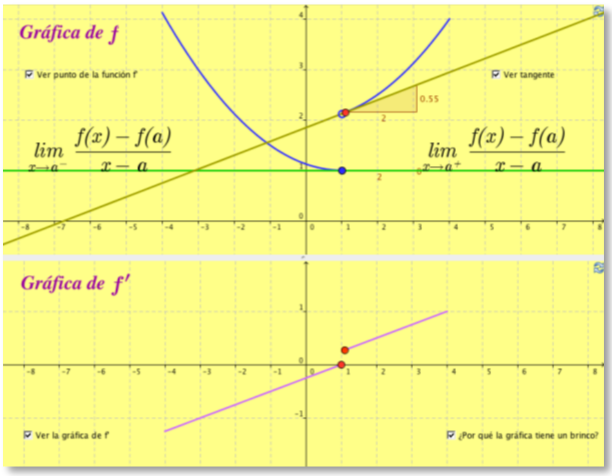


Figura 5. Aplicación *Sobre la existencia de la derivada* para determinar un caso en el que no existe la derivada en un punto.

Por último, con la novena aplicación, Sacando derivadas geométricamente, se analizó cómo obtener la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de una función. Para ello se analiza una función formada en diversos intervalos por diferentes tipos de funciones: contantes, lineales, trigonométricas y cuadráticas, con puntos de discontinuidad y otros en los que se forman picos. En cada uno de los intervalos se analizan las pendientes de las rectas tangentes a la curva en diferentes puntos. Como se muestra en la Figura 6 en esta aplicación se tienen dos planos cartesianos, en uno se tiene la gráfica de la función y en el otro la gráfica de su derivada.

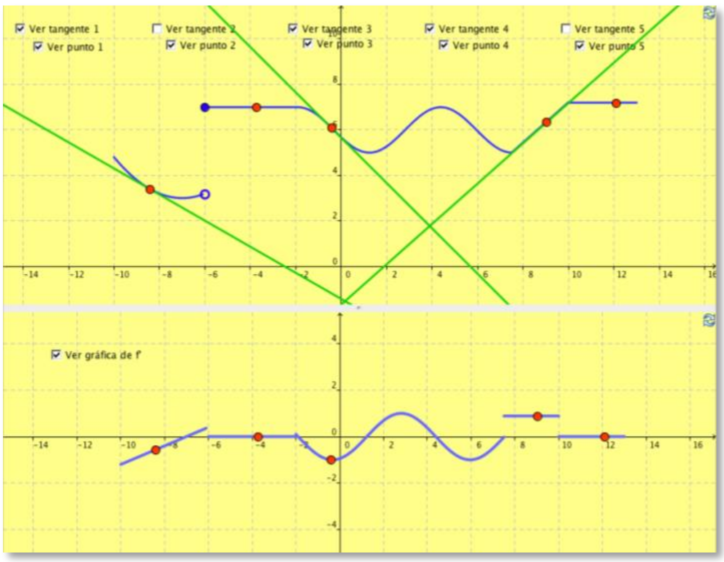


Figura 6. Aplicación *Sacando derivadas geométricamente* para obtener la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función.

3.1. Instrumentos de evaluación

Se evaluó la comprensión que los alumnos lograron del concepto de derivada a partir de la aplicación didáctica descrita mediante visualización dinámica. Se hizo a través de una valoración cuantitativa y una cualitativa para ponderar si los alumnos lograron la coordinación del concepto de derivada entre registros de representación, si reconocen el concepto en diferentes representaciones, si pueden determinar cuándo se satisface o no el concepto, y si pueden aplicarlo para identificar la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función. Entre más de estas habilidades lograron mostrar los alumnos, se consideró que mejor fue la comprensión que alcanzaron.

Los instrumentos cuantitativos fueron un pre-test y un post-test referentes al concepto de la derivada y su interpretación geométrica. Se aplicaron, respectivamente, en la primera y última sesión de trabajo con el grupo. Ambos test constan de veinte preguntas, dieciocho de opción múltiple con cuatro opciones de respuesta, una de falso o verdadero y una de opción múltiple con dos opciones de respuesta.

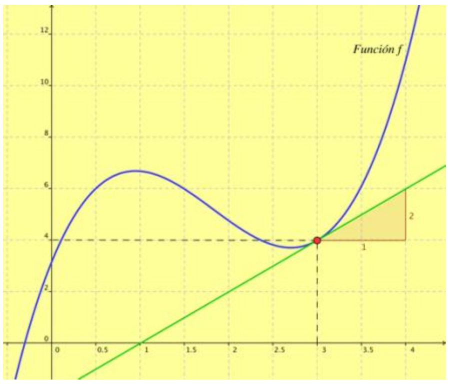
A través del pre-test se estableció una primera ponderación sobre los conocimientos de los alumnos relacionados con el tema de estudio, la que permitió después hacer un contraste con la ponderación del post-test que evaluó los conocimientos adquiridos por los alumnos luego de aplicar el planteamiento didáctico que se diseñó.

Las preguntas de los test se clasificaron de acuerdo con la taxonomía de Bloom en: conocimiento, comprensión, aplicación y análisis. Ambos tuvieron la misma distribución de preguntas, 3 de conocimiento, 6 de comprensión, 5 de aplicación y 6 de análisis; y hubo preguntas que formaron parte de ambos test, en total fueron 36 preguntas diferentes. Algunas de las preguntas son las siguientes:

Dada la gráfica de una función f y un punto a en su dominio, ¿cuál es la recta tangente a la curva en el punto $(a, f(a))$?

- **a)** La recta que pasa por $(a, f(a))$.
- **b)** La recta que tiene pendiente $f'(a)$.
- **c)** La recta que pasa por a y tiene pendiente $f'(a)$.
- **d)** La recta que pasa por $(a, f(a))$ y tiene pendiente $f'(a)$.

Dada la siguiente gráfica de la función f, ¿cuál es el valor de la derivada de f es $x = 3$?

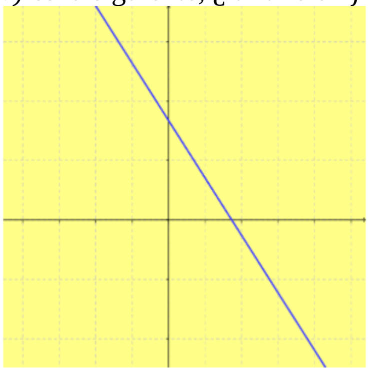


a) 2 b) 6 c) 4 d) 1

Si el valor de la derivada de una función f en $\sqrt{2}$ es $\frac{1}{2}$, ¿cuál es el valor del siguiente límite $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \frac{f(x)-f(\sqrt{2})}{x-\sqrt{2}}$?

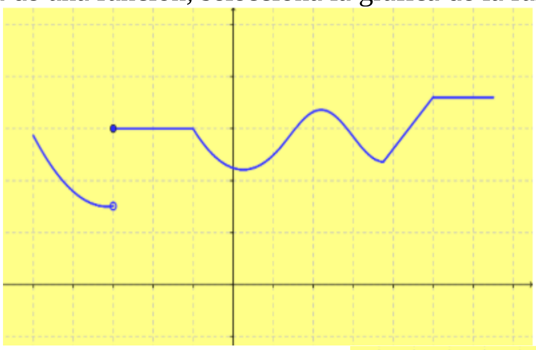
a) ∞ b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{1}{2}$

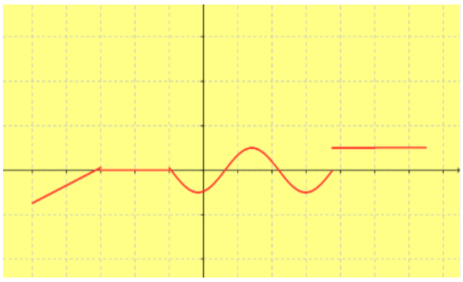
Si la gráfica de una función $f'(x)$ es la siguiente, ¿la función f tiene un máximo o un mínimo?

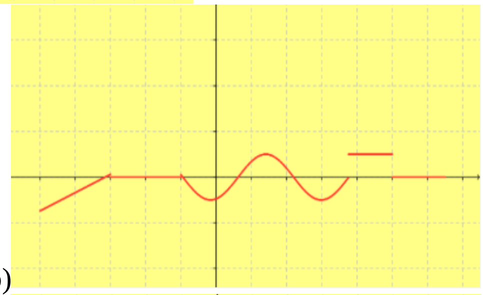


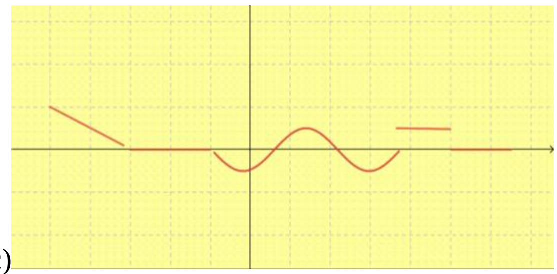
a) Tiene un máximo b) Tiene un mínimo

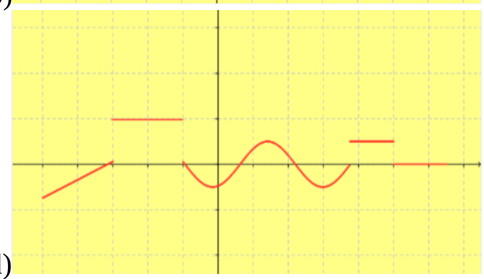
Dada la siguiente gráfica de una función, selecciona la gráfica de la función derivada.



a) 

b) 

c) 

d) 

Por otro lado, la valoración cualitativa se realizó con tres instrumentos, uno fue un glosario en el que los alumnos debían definir con sus propias palabras alguno de los conceptos abordados en el desarrollo del tema, tales como: derivada, recta tangente, recta secante, entre otros. Otro fue un cuestionario de opinión de veinte preguntas, usando una escala tipo Likert con cuatro niveles de respuestas: Nunca, A veces, Frecuentemente y Siempre. Este cuestionario también se aplicó en la última sesión de trabajo. El último instrumento fue una entrevista que se aplicó a siete alumnos que se seleccionaron con base en los resultados de los test y en las observaciones del trabajo en clase.

4. Aplicación

La aplicación del planteamiento didáctico descrito para el concepto de derivada mediante el enfoque de enseñanza de visualización dinámica se realizó en un grupo de la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral I del CCHA. Se tuvieron seis sesiones de trabajo con los alumnos, dos sesiones de dos horas durante tres semanas. Para el momento de la aplicación de este planteamiento didáctico los alumnos habían iniciado el estudio de la segunda unidad del curso de Cálculo I, de modo que tenían concluido el estudio de la primera unidad que es referente al concepto de límite; y respecto del concepto de derivada, habían trabajado una introducción al concepto, conocían el término derivada y que se relaciona con el concepto de límite.

El método educativo utilizado fue b-learning a través una plataforma educativa Moodle. Las aplicaciones de visualización dinámica que se diseñaron para la enseñanza de este tema se cargaron en esta plataforma, y desde ahí se trabajaron en el salón de clases usando una computadora y un proyector. Asimismo, los diferentes instrumentos de evaluación también se aplicaron usando este recurso tecnológico.

La primera y última sesiones de trabajo se llevaron a cabo en un laboratorio de cómputo. Al inicio se inscribió a los alumnos a la plataforma, se presentó de manera general su uso y navegación, y se aplicó el pre-test. En la última sesión se aplicó el post-test y el cuestionario de opinión. Para contestar los test los alumnos podían hacer anotaciones en su cuaderno.

Las demás sesiones de trabajo se llevaron a cabo en el aula mediante análisis y discusiones de las propiedades del concepto de derivada usando como recurso didáctico las aplicaciones de visualización dinámica; los alumnos manipularon las aplicaciones mediante un mouse inalámbrico, de modo que, digitalmente interactuaron con los objetos de estudio y sus diferentes elementos.

Respecto a los instrumentos de evaluación cualitativa el glosario de conceptos se aplicó luego de trabajar con la tercera aplicación de visualización dinámica, es decir, después de lograr el concepto de derivada. Mientras que las entrevistas se aplicaron después de la sexta sesión de trabajo, con una duración de 15 minutos por alumno.

5. Análisis de datos

5.1. Cuantitativo

El número de alumnos para realizar este análisis fue 34, se consideraron solo los alumnos que contestaron ambos test. En las siguientes gráficas se presentan las distribuciones de las calificaciones obtenidas por los alumnos en los dos test.

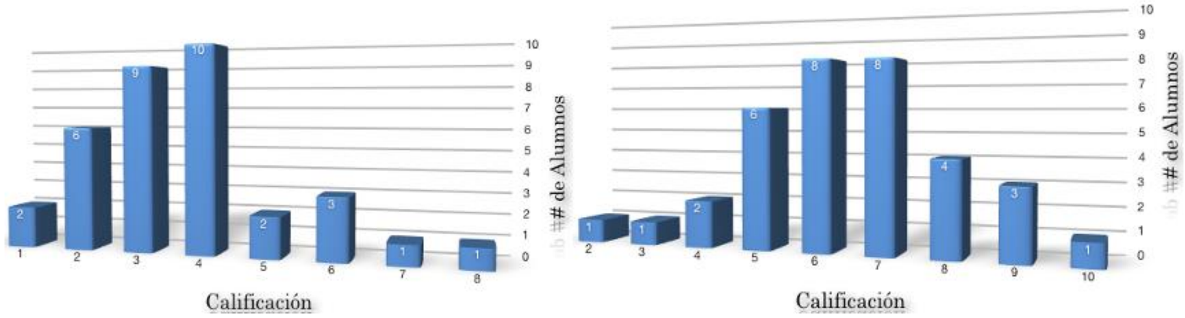


Figura 7. Distribución de calificaciones de los tests, a la izquierda el *pre-test* a la derecha el *post-test*.

Del pre-test al post-test hubo 29 alumnos que mejoraron su resultado, 3 que lo mantuvieron y 2 que incluso bajaron. Y como se puede observar de las gráficas, 24 alumnos obtuvieron un resultado aprobatorio en el post-test, logrando algunas calificaciones de 9 y 10; mientras que el pre-test solo lo acreditaron 5 alumnos y la calificación más alta fue 8.

Como se mencionó en la metodología, las preguntas de los test se clasificaron en: conocimiento, comprensión, aplicación y análisis, con la misma distribución en ambos test, 3 preguntas de conocimiento, 6 de comprensión, 5 de aplicación y 6 de análisis. Los resultados en este contexto fueron que en las cuatro categorías hubo un significativo aumento del pre-test al post-test sobre la cantidad de respuestas correctas que se obtuvieron. De las preguntas de conocimiento hubo 42 respuestas correctas en el pre-test mientras que para el post-test fueron 80; las de comprensión pasaron de 74 a 126 respuestas correctas; las de aplicación de 76 a 119; y las de análisis de 73 a 122. Por tanto, de estos datos podemos observar que en todos los niveles de conocimiento que se evaluaron hubo una mejora significativa en las respuestas correctas obtenidas por los alumnos.

5.2. Cualitativo

5.2.1 Glosario de conceptos

En el glosario de conceptos participaron 31 alumnos distintos que definieron alguno de los siguientes conceptos: derivada, recta tangente, recta secante y límite. Además, algunos alumnos también hicieron comentarios a las participaciones de otros compañeros. De estas participaciones de los alumnos se encontró evidencia de la comprensión lograda del concepto de derivada, de la formulación de representaciones del concepto y de su expresión por medio de palabras.

Como ejemplos las participaciones de dos alumnos que definieron el concepto de derivada a través de su interpretación geométrica, el primero además definió la recta tangente y su intrínseca relación con la derivada. El segundo complementa su definición mencionando que la derivada es una función. A continuación, se muestras las dos participaciones:

Ejemplo 1:

La tangente es la recta que tiene como pendiente a la derivada. Inversamente, la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva EN UN PUNTO.

También la derivada es una función.

Ejemplo 2:

> la derivada es la pendiente de la recta tangente en el punto, es una funcion que da pendientes

Se puede observar que los dos alumnos expresan de forma correcta la noción del concepto de derivada a través de su interpretación geométrica, lo que fue el centro del planteamiento didáctico que se realizó, lograron una representación geométrica del concepto y la expresan en palabras.

Otra de las participaciones de los alumnos fue para definir recta tangente, en esta definición se relaciona de forma explícita la noción intuitiva de recta tangente con el concepto de derivada. De modo que, se muestra la formación de una relación sustancial del conocimiento previo con el nuevo, pues menciona que la recta tangente es la que toca a la curva en un punto y además debe tener como pendiente a la derivada. Tal definición es la siguiente:

> es la recta que pasa por un punto de una curva y que tiene como pendiente a la derivada 🙂

Entre las participaciones que comentaron los alumnos está la siguiente, un alumno definió tangente así:

> es la recta que toca la curva en un punto y su pendiente es la derivada

y otro alumno comentó esto:

> Puede tocarla en más de un punto. La diferencia es que si uno de los puntos por los que pasa la recta tiene como pendiente la derivada es tangente a ese punto de la función sin importar que intersecte a más puntos.

La definición que se da es esencialmente la misma que acabamos de comentar, pero en este caso un alumno quiso hacer una precisión. La definición no está mal y el comentario no la contradice, solo hace explícito el hecho de que la recta tangente no necesariamente tiene que tocar a la curva en un solo punto. Esto evidencia la comprensión que los alumnos lograron del concepto de derivada con respecto a la situación con la que se buscó generar el desequilibrio cognitivo, que asimilaron y acomodaron el nuevo conocimiento y generaron una relación sustancial entre el concepto de derivada y su conocimiento previo.

Por otro lado, hay que mencionar que también hubo alumnos que no lograron la comprensión del concepto de derivada. Por ejemplo, un alumno hizo la siguiente definición de derivada:

> la deriva es la recta que intersecta a la tangente

lo que expresa falta de comprensión del concepto y una relación mal entendida de éste con la noción de recta tangente.

5.2.2 Entrevistas

Para realizar las entrevistas se seleccionaron a los dos alumnos que bajaron su calificación del pre-test al post-test, a los dos que se mantuvieron y a dos de los que mejoraron, de estos últimos los que tuvieron las diferencias más grandes.

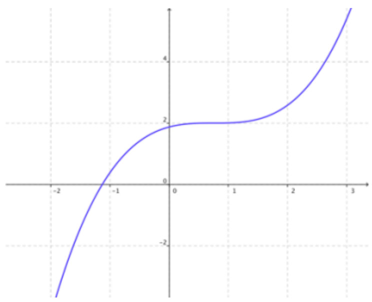
Estos seis alumnos se seleccionaron primero por sus resultados en los test, pero hay que destacar que ellos también son parte de los alumnos que realizaron las definiciones que se presentaron en la sección anterior. Cabe aclarar que esto no se buscó, las participaciones en el glosario de conceptos se seleccionaron por ser representativas, al cruzar la información resultó que sus resultados también fueron representativos en los test. El séptimo alumno que se entrevistó se seleccionó por su trabajo en clase, durante las sesiones de trabajo mostró una notoria comprensión de los conceptos.

Las entrevistas se video grabaron para su análisis, en cada una se hicieron las mismas seis preguntas en el mismo orden. La primera fue: ¿Cuál de los dos exámenes fue más difícil? De las respuestas de los alumnos se sigue que en general consideraron que ambos test presentaron la misma dificultad. Aunque, uno de los alumnos que bajo en su calificación mencionó que la razón de esto fue que el tener más conocimientos lo confundió.

La segunda pregunta fue: ¿Cuáles preguntas fueron más difíciles, las que tenían gráfica, las que eran solo texto o las que tenían expresiones algebraicas? De las respuestas se sigue que a todos los entrevistados les pareció que las preguntas con gráficas fueron más fáciles que el resto porque, de acuerdo con ellos, se podían apoyar en la gráfica para responder. En su mayoría les parecieron más difíciles las que tienen expresiones algebraicas, seguidas de las que solo presentan texto, estas últimas principalmente a dos de ellos.

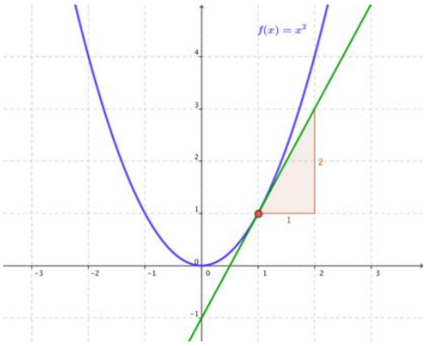
La tercera pregunta fue: ¿Qué significa la expresión $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-3$? De las respuestas se obtuvo que 5 de los 7 alumnos identificarón claramente una derivada en su expresión algebraica; 1 lo dudó; 4 de ellos además identificarón una relación geométrica con la recta tangente, es decir, coordinaron dos registros de representación. Un alumno de los que mantuvo su calificación en los test no logró identificar la derivada algebraicamente, dijo que fue porque no entendió límites, tema de la unidad previa a la aplicación que se hizo. El alumno que destacó por su trabajo en el aula identificó la expresión algebraica, el sentido del valor numérico y su representación geométrica, es un ejemplo de la coordinación que lograron los alumnos del concepto de derivada en los tres registros de representación que se trabajaron.

La cuarta pregunta fue: ¿Dónde vale cero la derivada de la siguiente gráfica?



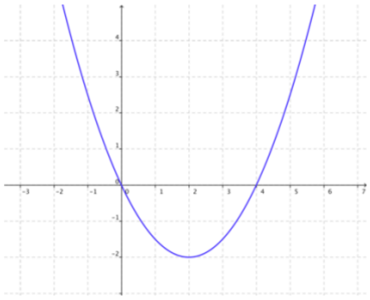
De la respuesta se obtuvo que 4 de los 7 alumnos analizaron adecuadamente el problema y dieron una respuesta correcta; 3 mencionaron que no pueden saber con precisión porque no tienen la expresión de la función o valores específicos, que su respuesta está limitada a solo un análisis visual de la función; 2 alumnos, uno de los que mejoró su calificación y uno de los que la mantuvo, no lograron realizar el análisis. El que mejoró dijo que solo puede valer cero la derivada en máximos o mínimos y en la situación presentada no hay tales.

La quinta pregunta fue: Describe mediante una expresión algebraica la situación planteada en la siguiente imagen



De las respuestas se obtuvo que 2 alumnos lo plantearon por medio de la expresión algebraica de la derivada; 2 interpretaron la derivada geométricamente y la usaron para dar la ecuación de la recta tangente; 1 supo que es una derivada pero no logró el planteamiento completo; 1 no pudo hacer ningún planteamiento, este último es uno de los alumnos que mantuvo su calificación.

La sexta pregunta fue: Si la siguiente gráfica es de la función f', indica si la función f tiene algún máximo y/o mínimo y en dónde



De las respuestas se obtuvo que solo uno de los alumnos que mejoró su calificación y el que destacó en el aula lograron hacer el análisis correcto. El otro alumno que mejoró su calificación entendió que hay que buscar cambios de signo, pero no logró aclarar su idea. Los otros cuatro respondieron que el máximo está en el punto dónde la gráfica que se presenta tiene un mínimo, no lograron coordinar correctamente las características de la gráfica de la función derivada y las de la función.

5.2.3 Cuestionario de opinión

El cuestionario de opinión lo formaron 29 preguntas, tales como: ¿El diseño de los materiales utilizados por el profesor ayudó a tu comprensión del tema?, ¿Estudiaste el tema haciendo uso de la plataforma?, ¿Las herramientas digitales presentadas son apropiadas para el desarrollo del tema?, entre otras.

Se analizaron las respuestas de los 34 alumnos que realizaron los dos test. Con base en ellas se observó que en general los alumnos consideran que el uso de las aplicaciones de visualización dinámica sí favorecieron su comprensión del tema; 29 de ellos afirmaron que sí usaron estas aplicaciones para estudiar el tema, mientras que 5 alumnos dicen que no lo hicieron.

Se puede resaltar que en general los alumnos consideran que lograron una buena comprensión del tema y todos afirman que adquirieron nuevos conocimientos; sólo 3 alumnos consideraron no haber logrado una buena comprensión del tema.

6. Conclusiones

Los datos cuantitativos muestran que la mayoría de los alumnos lograron una comprensión del concepto de derivada, ya que lograron coordinar el concepto en diferentes registros de representación. La gran mayoría de ellos también fueron capaces de aplicarlo en análisis geométricos para identificar la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función. En casos sencillos algunos también lograron a partir de la gráfica de la función derivada deducir el tipo de gráfica de la función de la que es derivada.

Los resultados cualitativos indican que la mayor parte de los alumnos del grupo lograron formar una representación mental del concepto de derivada, que pueden expresar en palabras; y que formaron relaciones sustanciales entre el concepto de derivada y sus conocimientos previos, específicamente con la noción intuitiva de recta tangente, conocimiento a partir del cual se buscó generar un desequilibrio cognitivo en los alumnos, de modo que, a partir del proceso de enseñanza y aprendizaje que se aplicó se lograron llevar a cabo en los alumnos los procesos de asimilación y acomodación.

En general los alumnos afirmaron que sí utilizaron las diferentes aplicaciones de visualización dinámica para estudiar el concepto de derivada y que la forma de trabajo propició su interés, de lo que, en conjunto con los resultados obtenidos, se puede concluir que el planteamiento realizado bajo el enfoque del constructo de visualización dinámica favoreció su proceso de aprendizaje.

En resumen, se planteó un enfoque de enseñanza de las matemáticas considerando diferentes aspectos teóricos y el uso de recursos digitales como herramienta didáctica, que en conjunto se enmarcan en el constructo de visualización dinámica. La esencia de la enseñanza de las matemáticas a través de la visualización dinámica es que posibilita que los alumnos manipulen digitalmente los objetos matemáticos, sobre todo permite propiciar el análisis, la conjetura, la experimentación y la discusión de forma activa, para llegar a obtener conclusiones y poder comprobarlas. Así, se tiene una estructura teórica y didáctica para un uso de recursos digitales que propicia el aprendizaje de los alumnos.

Mediante este enfoque de enseñanza los alumnos lograron representar el concepto de derivada usando símbolos lingüísticos de acuerdo con su uso convencional, por lo que podemos concluir que lograron un aprendizaje significativo. La enseñanza de las matemáticas mediante visualización dinámica se centra en la forma de guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje usando recursos digitales para detonar y potenciar las habilidades de los alumnos a través de su interacción digital con los objetos matemáticos.

De este modo las aplicaciones de visualización dinámica son el recurso didáctico principal que permite potenciar los recursos digitales para ser herramientas especializadas para el estudio de las matemáticas. Bajo este enfoque es labor del profesor diseñar estas herramientas y guiar su uso. Corresponde ahora ampliar la investigación realizada desarrollando diferentes planteamientos didácticos con este enfoque de enseñanza, para trabajar diversos conceptos en distintas áreas de las matemáticas a nivel bachillerato.

Bibliografía

Álvarez-Manilla, J. M. (1991). La enseñanza por computadora. Estrategias didácticas básicas. *Perfiles Educativos*, (51-52), 74-79.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., y Hanesian, H. (2019). *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2a ed.). México: Trillas.

Díaz Barriga Arceo, F., y Hernández Rojas, G. (2010). *Estrategias Docentes para un Aprendizaje Significativo. Una interpretación constructivista* (3a ed.). México: Mc Graw Hill.

Duval, R. (1988). Graphiques et Equations. L'articulaction de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitivies*, 1, 235-253.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitivies*, 5, 37-65.

Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2a ed.) Colombia: Universidad del Valle.

Gutiérrez Mendoza, L. (2019). Enseñanza de la derivada y el límite apoyada con TIC / Teaching and Learning of the Derivative and the Supported Limit with Digital Resources. *Revista Internacional De Aprendizaje En Ciencia, Matemáticas Y Tecnología*, *5*(2), 57–62.

Gutiérrez, P. Boero (eds) (2006). *Teaching and Learning Geometry with Technology*. Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education Past, Present and Future, 275–304.

Piaget, J. (2016). *El nacimiento de la inteligencia en el niño*, México: Booket.

Piaget, J. (1998). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo* (5a ed.), México: Siglo XXI.

Piaget, J. (2004). *La formación del símbolo en el niño*. México: Fondo de Cultura Económica.

Piaget, J. (2009). *La psicología de la inteligencia* (3ª ed). Barcelona: Crítica.

Santos Trigo, M., & Benítez Mojica, D. (2003). Herramientas tecnológicas en el desarrollo de temas de representación para la resolución de problemas. *Perfiles Educativos, 25* (100), 23-41.

Tellechea Armenta, E. (2011). Visualización dinámica en la enseñanza de la derivada. *Memorias de la XX Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemáticas*, 33-38.

Vygotsky, L. (1986), *Thought and Language*. Cambridge: MIT Press.

Edgar Enrique Solís de los Reyes, Matemático por la Facultad de Ciencias de la UNAM. Maestro en Docencia para la Educación Media Superior (Matemáticas) por la Facultad de Estudios Superiores Acatlán, UNAM. Especialidad en Matemáticas para Bachillerato por la Facultad de Ciencias de la UNAM. Profesor Titular de Tiempo Completo en la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades Plantel Azcapotzalco, Área de Matemáticas, UNAM. Líneas de trabajo: Historia de las Matemáticas, Filosofía de las Matemáticas y Matemática Educativa. Otra publicación: Martíez-Adame Isais, Carmen., y Solís de los Reyes, E.E. Del concepto de límite a los conjuntos no medibles. *Miscelánea Matemática*, 68 (2019), 69-83. Email: eesr@unam.mx