Felipe Medrano y sus cuadrados mágicos

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

Desde un punto de vista matemático, un cuadrado mágico consiste simplemente en una matriz cuadrada, cuyas entradas son enteros positivos, de forma que al sumar los elementos de cada fila, columna y diagonal se obtiene siempre el mismo valor.

Estos objetos recibieron atención ya desde épocas muy antiguas. La relativa dificultad de su construcción les otorgaba un aura de misterio y hacía que fueran considerados objetos con un cierto carácter místico, cercanos al ocultismo, y con propiedades mágicas. Hay que tener en cuenta que, en la antigüedad, las propias matemáticas formaban un cuerpo de conocimiento cerrado y accesible solo a unos pocos iniciados. Los pitagóricos, por ejemplo, pueden verse como una secta desde el punto de vista filosófico o religioso en la que las matemáticas no jugaban un papel científico, sino que organizaban y sistematizaban toda su cosmología y su sistema de creencias.

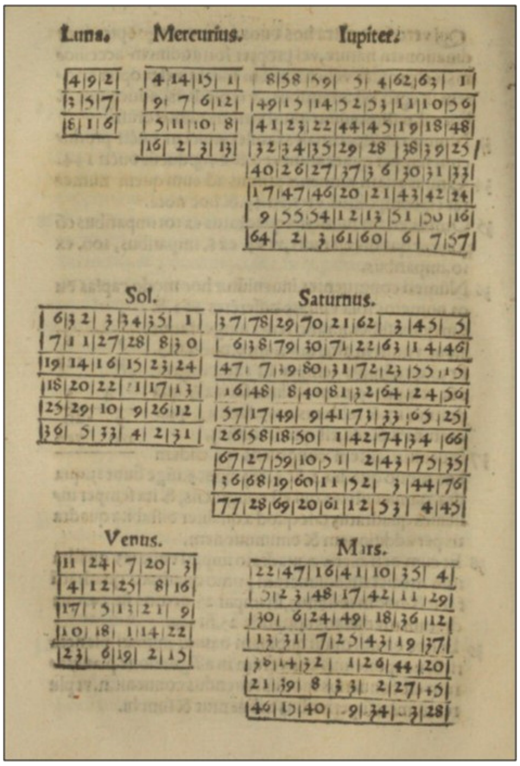
Según algunas fuentes, el origen de los cuadrados mágicos estaría en la India. De hecho, parece ser que en algunos tratados antiguos se utiliza vocabulario proveniente del ajedrez para describir el modo en que los números se desplazan en la matriz durante el proceso de construcción. En la figura adjunta podemos ver un cuadrado mágico grabado en los muros del templo jainita de Parshvanatha, construido en el siglo X en Khajuraho. Resulta interesante ver la grafía primigenia de las cifras y comprobar las diferencias y similitudes con su forma actual.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Al margen de su origen remoto, el tratamiento relativamente sistemático de los cuadrados mágicos se inició en el mundo árabe medieval. Por ejemplo, aparecen cuadrados mágicos en un importante texto de los siglos X-XI originario de Basora denominado *Enciclopedia de los hermanos de la pureza*. Este texto abordaba contenidos científicos (matemáticas, música, astronomía, etc.) pero también filosóficos y religiosos. Frecuentemente se considera que contiene elementos esotéricos, por lo que no resulta sorprendente la presencia de cuadrados mágicos. Este texto, por cierto, se difundió de forma bastante temprana en la taifa de Zaragoza, influyendo notablemente en el pensamiento filosófico de Avempace.

No solo los matemáticos de la India o los árabes prestaron atención a estos objetos. Existen también ejemplos de su presencia en textos chinos y japoneses. Posteriormente, como en muchos otros casos, la Europa medieval y renacentista recogió, asimiló y reelaboró estas ideas. Es muy conocido, por ejemplo, el cuadrado mágico que aparece en el grabado *Melancolía I* (1514) de Alberto Durero.

Luca Pacioli, a caballo entre los siglos XV y XVI, habla de cuadrados mágicos en un manuscrito titulado *De viribus quantitatis*, en el que se presentan juegos, acertijos y rompecabezas matemáticos; y que se considera como el primer texto que describe un juego de magia con cartas. Gerolamo Cardano en su *Practica arithmetice et mensurandi singularis* (1539) recoge cuadrados mágicos de distintos tamaños (el más grande de tamaño 9×9) en un contexto astrológico (puede apreciarse en la figura adjunta).



Más de dos siglos después de los ejemplos anteriores, en 1744, se publicó en Madrid un tratado relativamente breve (no llega a las 50 páginas de texto) titulado *Quadrados mágicos, que sobre los que figuraban los egipcios, y pythagoricos, para la superticiosa adoracion de sus falsos dioses ha adelantado el prolijo estudio de don Phelipe Medrano, cavallero del orden de Santiago*. La obra va dedicada a la entonces reina, Isabel de Farnesio, y lleva la aprobación de Diego de Torres y Villarroel. Diego de Torres era en ese momento catedrático de matemáticas en la Universidad de Salamanca, pero era mucho más conocido como autor de almanaques y pronósticos que publicaba bajo el pseudónimo de «El gran Piscator de Salamanca». Posiblemente exista relación entre su afición a las profecías y adivinaciones y sus elogiosas palabras hacia una obra centrada en tan mágico objeto:

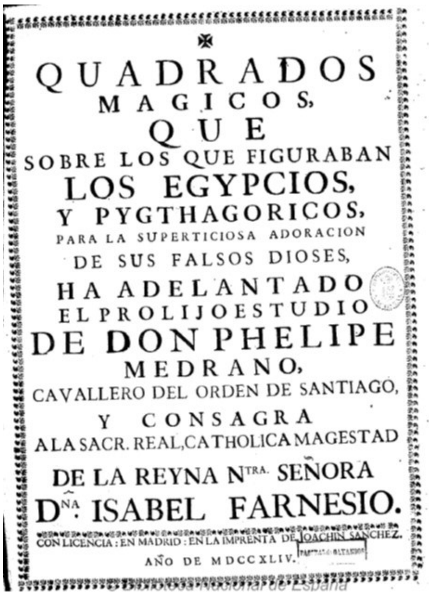
> La obra es muy digna de ser celebrada y el autor merece no solo el aplauso, los elogios y las estimaciones, sino también muchas gracias.

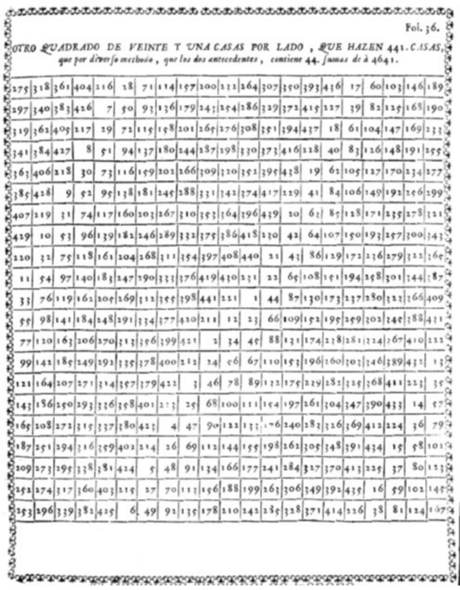
Tras la dedicatoria, las aprobaciones y los poemas de elogio al autor, el libro de Medrano comienza con un prólogo de tres páginas que se inicia de un modo muy ilustrativo:

> Halleme en conversación en que un caballero amigo mío, tomando nueve naipes, formó un cuadrado de tres casas por lado, con las circunstancias que para su bondad se requieren, causó a diversos circunstantes admiración.

Es de entender en estas palabras que el caballero amigo formó un cuadrado mágico con las nueve cartas y que dicho cuadrado sorprendió a los asistentes. Medrano entonces relata que se embarcó en el empeño de ser capaz de construir dichos objetos de forma sistemática. En el relato que hace hay otro interesante fragmento:

> Atribuían al sumo hacedor el cuadrado de una casa […] a Saturno el de tres, a Júpiter el de cuatro, a Marte el de cinco, […] y a la Luna el de nueve.

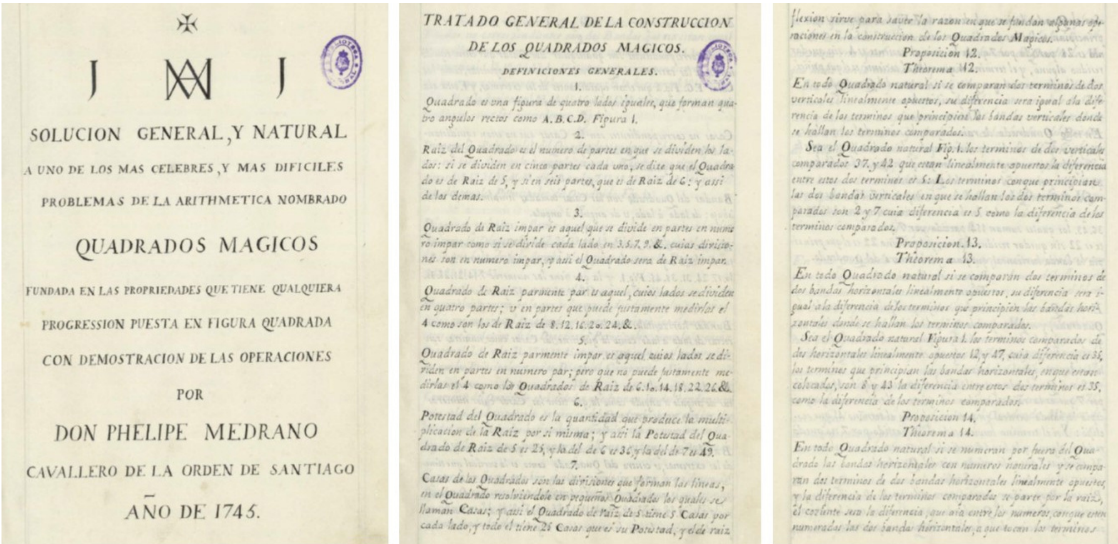




Estos dos pequeños fragmentos resultan interesantes porque hacen mención a los juegos de cartas y la astrología y los planetas (o dioses). Estos dos elementos nos llevan, respectivamente a las obras de Pacioli y Cardano que hemos comentado antes, si bien no es posible saber si Medrano tenía algún tipo de conocimiento de las mismas. Además, si se compara la descripción del autor con los cuadrados mostrados por Cardano, vemos que los tamaños difieren.

Sea como sea, tras el prólogo, la obra consiste meramente en una sucesión de 42 folios en los que se muestran cuadrados mágicos de diversos tamaños, desde 3×3, hasta 32×32. Desafortunadamente, no se da ni una sola pista o indicación sobre el procedimiento seguido para construirlos. De hecho, los tres últimos cuadrados presentados, de tamaño 32×32, se proponen inicialmente como problema. Se presenta el cuadrado casi vacío, como en un moderno sudoku, solo con unas pocas casillas conocidas y se pide completarlo. En los tres casos Medrano da la solución en el folio siguiente.

Para resolver el misterio habría que esperar un año. En 1745, el mismo Phelipe Medrano compuso un manuscrito titulado *Solucion general, y natural a uno de los mas celebres, y mas difíciles problemas de la Arithmetica nombrado quadrados mágicos fundada en las propiedades que tiene qualquiera progression puesta en figura quadrada con demostracion de las operaciones*. Esta obra es considerablemente más extensa que la anterior, supera holgadamente las 200 páginas de texto y tablas, y tiene un carácter mucho más matemático, tal y como su título ya da a entender. Quizás esta circunstancia explique, en parte, por qué este manuscrito jamás, hasta donde sabemos, llegase a ver la imprenta.



J M J

SOLUCION GENERAL, Y NATURAL
A UNO DE LOS MAS CELEBRES, Y MAS DIFICILES
PROBLEMAS DE LA ARITHMETICA NOMBRADO
QUADRADOS MAGICOS
FUNDADA EN LAS PROPRIEDADES QUE TIENE QUALQUIERA
PROGRESSION PUESTA EN FIGURA QUADRADA
CON DEMOSTRACION DE LAS OPERACIONES
POR
DON PHELIPE MEDRANO
CAVALLERO DE LA ORDEN DE SANTIAGO
AÑO DE 1745.

TRATADO GENERAL DE LA CONSTRUCCION
DE LOS QUADRADOS MAGICOS.
DEFINICIONES GENERALES.

1.
Quadrado es una figura de quatro lados iguales, que forman quatro angulos rectos como A. B. C. D. Figura 1.

2.
Raiz del Quadrado es el numero de partes en que se dividen los lados: si se dividen en cinco partes cada uno, se dize que el Quadrado es de Raiz de 5, y si en seis partes, que es de Raiz de 6: y assi de los demas.

3.
Quadrado de Raiz impar es aquel que se divide en partes en numero impar como si se divide cada lado en 3. 5. 7. 9. &. cuias divisiones son en numero impar, y assi el Quadrado sera de Raiz impar.

4.
Quadrado de Raiz parmente par es aquel, cuios lados se dividen en quatro partes; o en partes que puede justamente medirlos el 4 como son los de Raiz de 8. 12. 16. 20. 24. &.

5.
Quadrado de Raiz parmente impar es aquel cuios lados se dividen en partes en numero par; pero que no puede justamente medirlos el 4 como los Quadrados de Raiz de 6. 10. 14. 18. 22. 26. &.

6.
Potestad del Quadrado es la quantidad que produce la multiplicacion de la Raiz por si misma; y assi la Potestad del Quadrado de Raiz de 5 es 25, y la del de 6 es 36, y la del de 7 es 49.

7.
Casas de los Quadrados son las divisiones que forman las lineas, en el Quadrado resolviendole en pequeños Quadrados los quales se llaman Casas; y assi el Quadrado de raiz de 5 tiene 5 Casas por cada lado, y todo el tiene 25 Casas que es su Potestad, y el de raiz

flexion sirve para saver la razon en que se fundan algunas operaciones en la construccion de los Quadrados Magicos.

Proposicion 12.
Theorema 12.

En todo Quadrado natural si se comparan dos terminos de dos verticales linealmente opuestos, su diferencia sera igual a la diferencia de los terminos que principian las bandas verticales donde se hallan los terminos comparados.

Sea el Quadrado natural Fig. 1. los terminos de dos verticales comparados 37. y 42 que estan linealmente opuestos la diferencia entre estos dos terminos es 5: Los terminos conque principian las dos bandas verticales en que se hallan los dos terminos comparados son 2 y 7 cuia diferencia es 5 como la diferencia de los terminos comparados.

Proposicion 13.
Theorema 13.

En todo Quadrado natural si se comparan dos terminos de dos bandas horizontales linealmente opuestos, su diferencia sera igual a la diferencia de los terminos que principian las bandas horizontales donde se hallan los terminos comparados.

Sea el Quadrado natural Figura 1. los terminos comparados de dos horizontales linealmente opuestos 12, y 47, cuia diferencia es 35, los terminos que principian las bandas horizontales, en que estan colocados, son 8 y 43 la diferencia entre estos dos terminos es 35, como la diferencia de los terminos comparados.

Proposicion 14.
Theorema 14.

En todo Quadrado natural si se numeran por fuera del Quadrado las bandas horizontales con numeros naturales y se comparan dos terminos de dos bandas horizontales linealmente opuestos, y la diferencia de los terminos comparados se parte por la raiz, el coziente sera la diferencia, que aia entre los numeros, conque estan numeradas las dos bandas horizontales, a que tocan los terminos

De hecho, tal y como podemos apreciar en la imagen, el discurso tiene una clara organización euclidea. Se comienza con un listado de definiciones generales como:

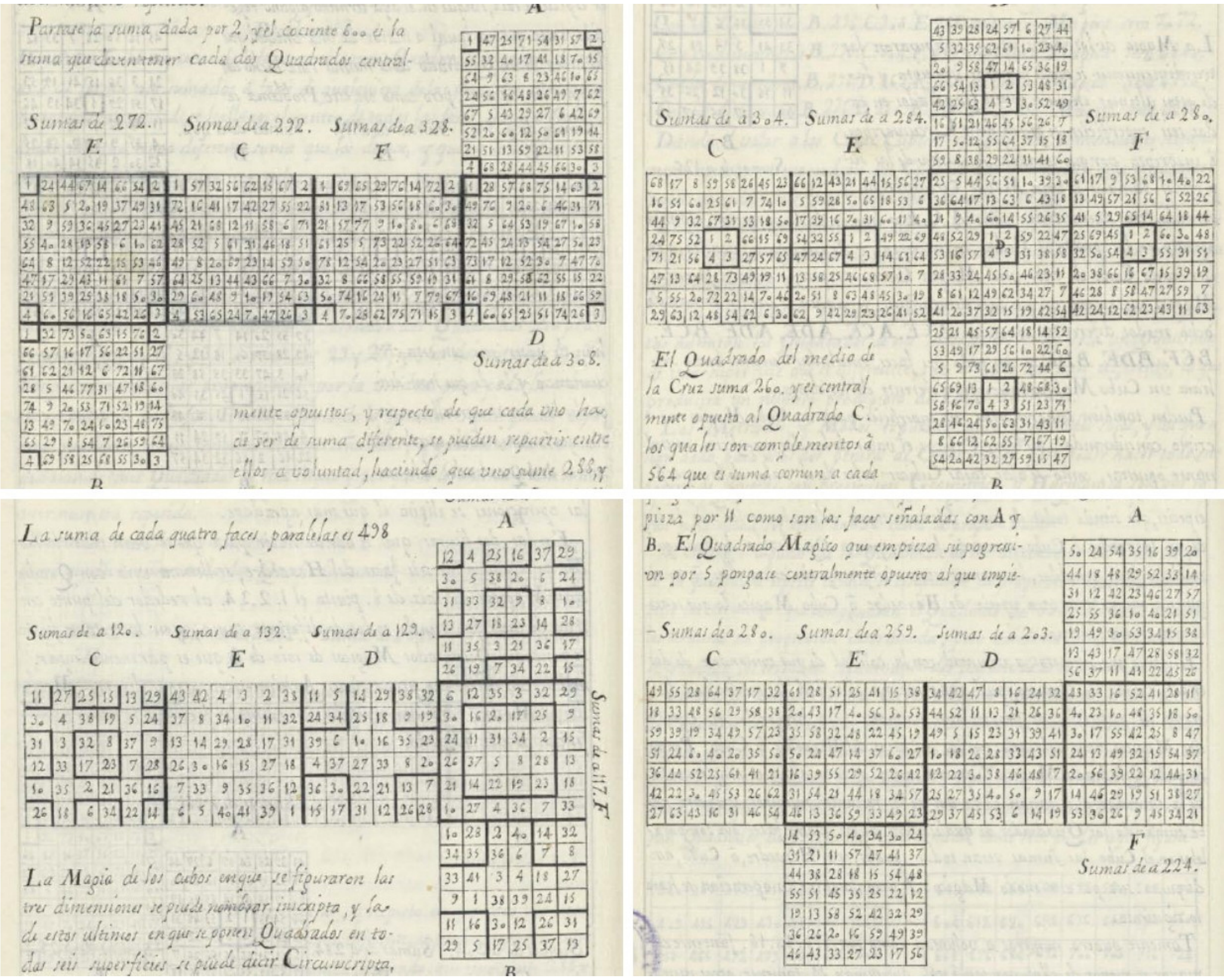
> Progression es un continuacion de quantidades que guardan entre ellas alguna suerte de semejanza, y cada una de estas quatidades se llama Termino.

A estas definiciones les sigue un listado de 46 teoremas con sus demostraciones. La primera proposición que se demuestra, por ejemplo, es:

> En toda Progression Arithmetica la suma de los dos terminos extremos es igual a la suma de qualquier dos terminos equidistantes de los extremos.

Tras el listado de teoremas, el autor pasa a describir y justificar con todo detalle, una serie de métodos para construir cuadrados mágicos. Los métodos presentados se organizan según la paridad del tamaño del cuadrado. Así, Medrano da dos métodos para el caso impar, tres métodos para el caso múltiplo de cuatro y dos métodos para el caso restante.

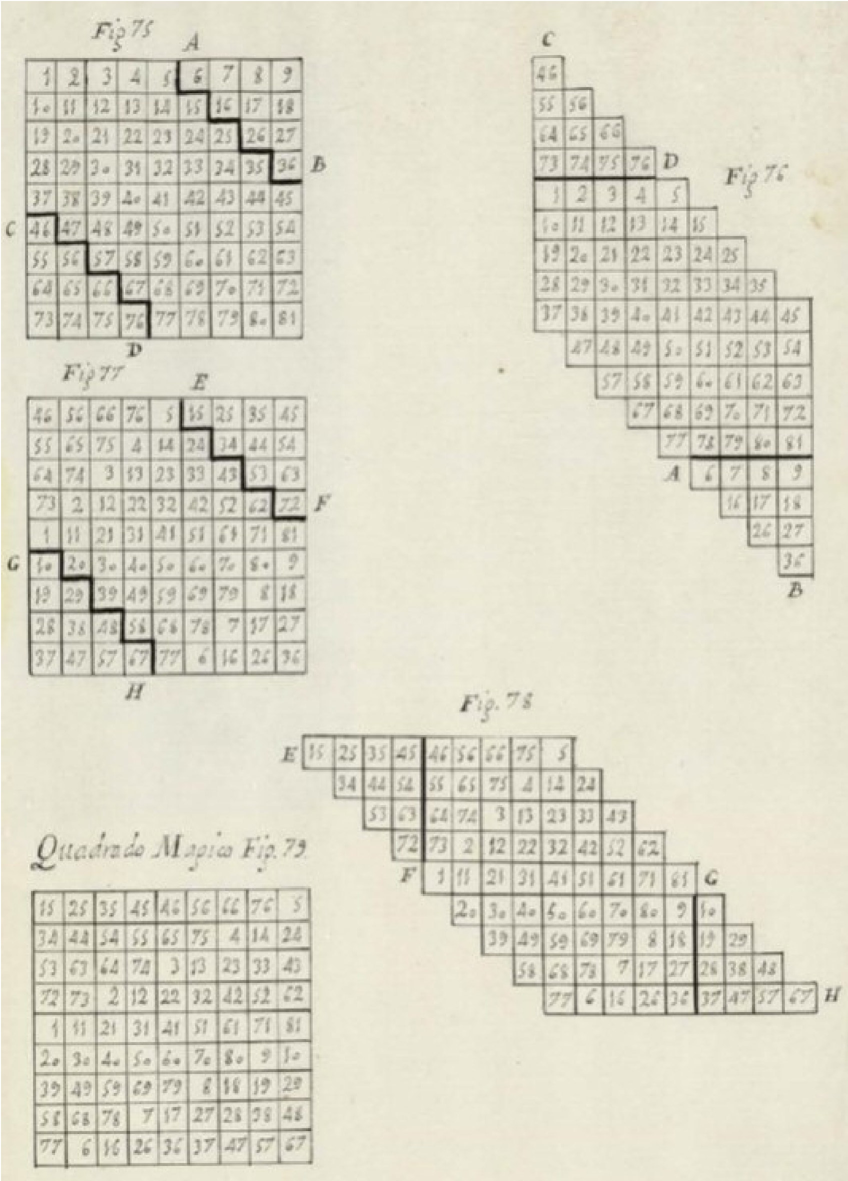
La parte final de la obra, antes de presentar una serie de tablas, figuras y un extenso catálogo de ejemplos, Medrano dedica 32 páginas a hablar de cubos mágicos. Es interesante observar, tal y como se aprecia en la figura, la variedad de desarrollos planos del cubo utilizada por el autor en sus descripciones.



Evidentemente, resultaría demasiado extenso entrar a describir aquí todos los distintos métodos y procedimientos de Medrano. Nos vamos a conformar con presentar el primero y más sencillo que da el autor. Se trata de un método para construir cuadrados mágicos de tamaño impar. El autor lo ejemplifica con un cuadrado de lado 9. El texto original utiliza la terminología presentada en las definiciones y hace referencia a las proposiciones demostradas. Nosotros omitimos dichas referencias y confiamos en que la terminología es razonablemente fácil de comprender con ayuda de las figuras correspondientes que se incluyen (hemos modernizado y simplificado el discurso, siendo las figuras a las que se refiere las que aparecen en la imagen de la página siguiente):

> Para hacer cualquier cuadrado mágico de lado impar, fórmese un cuadrado natural como el de la Figura 75. Háganse en él dos segmentos triangulares equiláteros, los cuales están ejecutados en el ángulo superior de la derecha y en el inferior de la izquierda. Muévase el triángulo *AB* abajo y *CD* arriba como están en la Figura 76, cópiense las nueve diagonales compuestas halladas y se tendrá un cuadrado como el de la Figura 77. Háganse otros dos segmentos triangulares equiláteros en el ángulo superior de la derecha y en el inferior de la izquierda, como son *EF* y *GH*. Muévase el triángulo *EF* a la izquierda y *GH* a la derecha como están en la Figura 78. Cópiese esta figura del modo que se quiera, ya sea poniendo las diagonales halladas por verticales o por horizontales y el cuadrado será mágico como el de la Figura 79.

Tal y como hemos comentado, el interés por los cuadrados mágicos no era algo meramente anecdótico. Además de algunos de los nombres mencionados, otras figuras importantes, como Pascal, escribieron sobre este tema. Aunque es difícil saber las fuentes de que disponía Medrano al abordar su trabajo, sí que tenemos constancia por una



carta de 1753 de que tenía conocimiento de un trabajo posterior titulado *Méthode facile pour faire tels quarrés magiques que l'on voudra* publicado en 1750 por el francés Louis-Léon d'Ons-en-Bray en la Académie Royale des Sciences de París. No sucede lo mismo en el sentido contrario. El francés menciona diversos autores en su introducción y afirma que se centra solo en los casos pares, ya que sobre los casos impares ya existen muchos trabajos (no menciona a Medrano). Una comparativa rápida parece indicar que los métodos de Medrano son aparentemente diferentes de los de d'Ons-en-Bray. Desafortunadamente, no tenemos constancia de que Medrano continuara trabajando en este tema y los datos sobre su vida son escasos. En todo caso, estamos ante un ejemplo interesante, y hasta cierto punto paradigmático, del relativo aislamiento que la ciencia española sufrió, pese a poder hacer aportaciones interesantes, durante gran parte de la historia.

Al inicio dijimos que la dificultad en su construcción otorgaba a los cuadrados mágicos un carácter misterioso. Terminamos con las palabras del anónimo académico francés que evaluó el trabajo de d'Ons-en-Bray en las Mémoires de la citada academia:

> Si los antiguos matemáticos que otorgaron a estas configuraciones numéricas el nombre de mágicas hubieran conocido la extrema simplicidad a la que su construcción se puede reducir, seguramente se lo habrían retirado. Esos cuadrados, sin embargo, nunca habrían merecido ese apelativo con mayor razón: la verdadera magia de las matemáticas consiste en abordar las cosas más sorprendentes mediante los métodos más simples.