Herramientas geométricas para un rey

por
Antonio M. Oller Marcén
(Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza)

A menudo se dice que para hacer matemáticas solo se necesita lápiz y papel. Esta frase no es completamente cierta. Surge de una visión de las matemáticas como una disciplina puramente abstracta que no requiere de un contacto directo con la realidad, y de los matemáticos como personas a las que no les interesa la aplicación de sus teorías. Esta concepción, que resulta muy atractiva en ocasiones, también puede conllevar la creación de ciertos estereotipos que se debería tratar de evitar.

Es cierto que al hacer matemáticas hemos de realizar razonamientos sobre modelos abstractos al margen de los objetos reales que han dado lugar a dichos modelos. Pero también es cierto que la creación de dichos modelos y la aplicación de los resultados obtenidos requieren habitualmente de un contacto directo con la realidad. Al modelizar la realidad y aplicar resultados surge la necesidad de utilizar algún tipo de herramientas. Más aún, las herramientas disponibles pueden imponer a veces restricciones sobre la actividad matemática o favorecer métodos y técnicas concretos. Por ejemplo, no es casual que el hoy llamado método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales apareciera en China siglos antes del nacimiento del matemático de Brunswick. Los instrumentos utilizados para calcular por los matemáticos chinos (unas barras de entre 3 y 14 centímetros) y el modo en que se utilizaban, facilitaban el manejo de «información matricial».

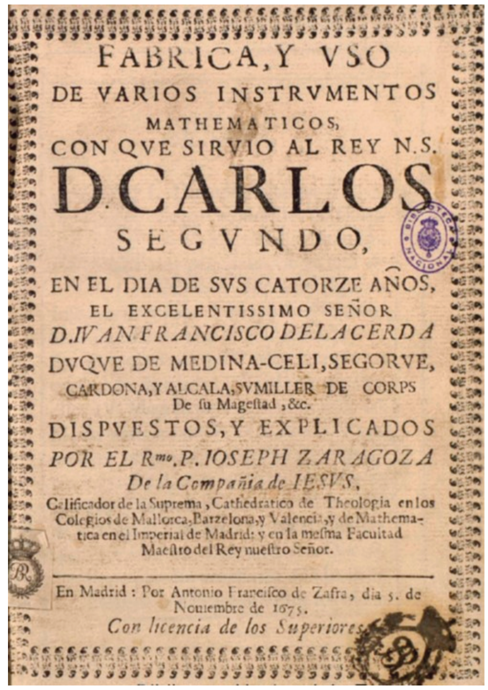
Evidentemente las «herramientas matemáticas» disponibles han variado a lo largo de la historia y también diferían entre distintas culturas. Para realizar operaciones aritméticas se han utilizado piedrecillas, ábacos, reglas deslizantes, tablas, máquinas mecánicas, calculadoras electrónicas, ordenadores, etc. En el caso de la geometría la evolución también ha sido muy grande, desde el uso de varas y cuerdas hasta el software de diseño gráfico o los medidores láser.

Benito Bails, en sus *Principios de Matemática para la Real Academia de San Fernando* publicados en 1758 señalaba la gran importancia de las herramientas en el ejercicio de la geometría práctica y la necesidad de hacerse con unas de calidad:

> Estuches de matemáticas cabales se hallan aquí pocos; los instrumentos de los más, la pantómetra sobre todo, son toscos e imperfectos. Los mercaderes que los traes de fuera del Reino hacen con este género lo que con todos, piden lo que venden, no lo mejor, ni acaso lo bueno. El matemático, el aficionado que quiera un estuche de matemáticas que le sirva, no debe regatear su precio; y es alhaja que bien merece encargarse con tanto cuidado como un puño de espadín o una cadena de reloj.

La importancia de estos instrumentos queda también de manifiesto por el hecho de que, por su decimocuarto cumpleaños, el rey Carlos II recibió como regalo del duque de Medinaceli un conjunto de instrumentos matemáticos. Hay que tener en cuenta que en ese momento los 14 años constituían la mayoría de edad y, en este caso, la subida al trono de Carlos II tras la regencia de su madre Mariana de Austria. Es decir, este conjunto de instrumentos matemáticos fue el regalo que se le hizo al rey al acceder al trono.

El regalo iba acompañado de un libro de más de 200 páginas en que se describen los instrumentos y su uso. El libro fue escrito por el jesuita Joseph Zaragoza, uno de los más importantes matemáticos españoles de esa época, que completó el encargo de fabricar los instrumentos y escribir la obra en menos de un mes. Para conseguir esta proeza leemos en el prólogo que la obra se iba imprimiendo conforme se escribía, que Zaragoza necesitó ayuda de otros dos colegas jesuitas y que en ese periodo el autor dedicaba las noches a escribir, las mañanas a calibrar los instrumentos y dibujar las láminas, y las tardes a su trabajo habitual.

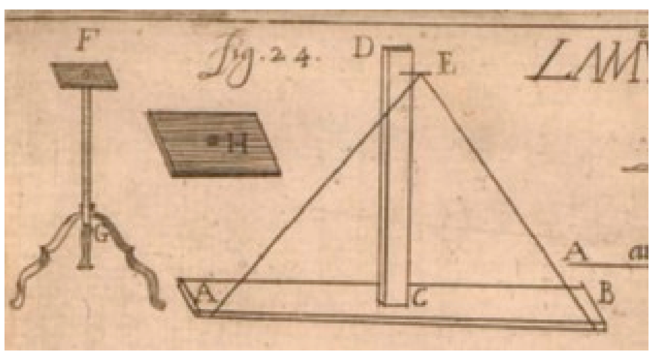


FABRICA, Y VSO
DE VARIOS INSTRVMENTOS
MATHEMATICOS,
CON QVE SIRVIO AL REY N.S.
D. CARLOS
SEGVNDO,
EN EL DIA DE SVS CATORZE AÑOS,
EL EXCELENTISSIMO SEÑOR
D. IVAN FRANCISCO DE LA CERDA
DVQVE DE MEDINA-CELI, SEGORVE,
CARDONA, Y ALCALA, SVMILLER DE CORPS
De su Mageftad, &c.
DISPVESTOS, Y EXPLICADOS
POR EL Rmo. P. IOSEPH ZARAGOZA
De la Compañia de IESVS,
Calificador de la Suprema, Cathedratico de Theologia en los Colegios de Mallorca, Barzelona, y Valencia, y de Mathematica en el Imperial de Madrid: y en la mesma Facultad Maeftro del Rey nueftro Señor.
En Madrid: Por Antonio Francifco de Zafra, dia 5. de Nouiembre de 1675.
Con licencia de los Superiores.

En total el regalo constaba de los siguientes elementos:

— Una regla de latón de una vara de largo, con diversas subdivisiones.
— Una pantómetra militar, también con diversas subdivisiones lineales y angulares.
— Un triángulo filar, de dos pies.
— Una cruz geométrica.
— Un rombo gráfico.
— Un triángulo equilátero de tres pies y medio de lado y cuatro dedos de ancho, graduado de minuto en minuto.
— Un triángulo equilátero de dos pies y medio de lado y un dedo de ancho, graduado de 10 minutos en 10 minutos.
— Un catalejo.
— Un compás harmónico.
— Un compás de varilla para usar con la pantómetra y tomar medidas.
— Una cadenilla de 10 pasos geométricos (50 pies).
— Una mesa de palosanto para usar el triángulo filar y un soporte para el catalejo.
— El pie de la mesa y de todos los instrumentos.
— Una escuadra de una vara.
— Una caja para todo lo anterior y otra más pequeña con instrumentos adicionales grabados con su nombre.
— El libro en que se explican los instrumentos y su uso.

El contenido del libro consiste en una descripción de cómo se fabrican los instrumentos geométricos correspondientes, junto con una serie de explicaciones y ejercicios prácticos sobre cómo realizar con ellos diversas medidas y construcciones relacionadas con la topografía, fortificación, etc.



El triángulo filar se describe de la siguiente manera (adaptamos el discurso e incluimos la figura original de la obra de Zaragoza):

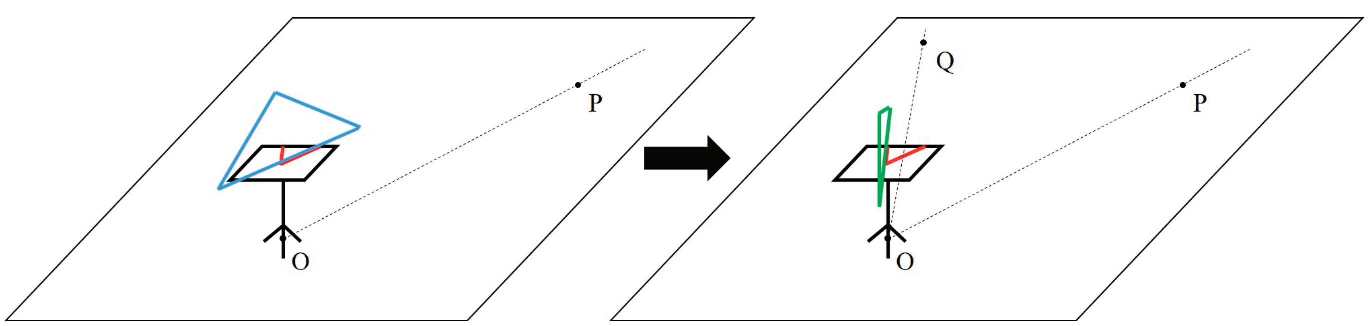
> El triángulo filar, que se forma con un hilo, tiene admirables usos en la práctica de la campaña porque además de ser muy seguro y fácil de usar, tiene igual facilidad su construcción y se puede hacer en el campo. En la Fig. 24 es AB una regla que por lo menos tenga media cuarta de ancho, y de largo media vara. CD es otra regla de un dedo y perpendicular sobre AB. En D se pone un clavo ED que salga 3 dedos y después se coloca un hilo asegurando que el plano del triángulo sea perpendicular al plano de la regla AB. El pie del instrumento es FG. En el punto F hay una tablilla cuadrada fija horizontal de la que sobresale una espiga. Esta espiga se puede encajar en un agujero no pasante que está en el centro de otra tabla cuadrada H mayor que la anterior. De este modo la tabla H se puede colocar horizontal encima de la tabla F y girar completamente en torno a su centro.

Así pues, esencialmente tenemos una mesa horizontal que puede rotar manteniéndose paralela al suelo y sobre la cual podemos colocar el triángulo *ABE* formado por un hilo. Con este aparato, Zaragoza propone las siguientes prácticas de campaña sobre el terreno:

— Trazar una perpendicular a una recta por un punto de la misma.
— Trazar una paralela a una recta por un punto cualquiera.
— Trazar una perpendicular a una recta por un punto exterior.
— Medir un ángulo.
— Trazar un ángulo igual a uno dado.
— Trazar una recta que forme un ángulo dado con otra recta dada.
— Construir un polígono regular dado su centro.
— Construir un polígono regular dado su lado.
— Trazar planos en distintas situaciones.

El modo de trabajar se fundamenta, básicamente, en proyectar una construcción realizada en un papel situado sobre la tabla *H* utilizando el plano del triángulo de hilo para determinar las líneas de visión. Por ejemplo, para construir un hexágono regular alrededor de un punto del terreno Zaragoza propone lo siguiente.

Supongamos que, sobre el terreno, queremos construir un hexágono regular centrado en *O* y cuyo primer vértice sea, por ejemplo, *P*. Colocamos la mesa de trabajo sobre el punto *O*. Como el ángulo central de un hexágono regular es de 60º, dibujamos en un papel un ángulo de 60º y lo fijamos en la mesa de manera que el vértice del ángulo sea el centro (en rojo en la figura). Colocamos el triángulo de hilo (en azul en la figura) de forma que la base esté sobre uno de los lados del ángulo. Giramos la tabla de la mesa (recordar que gira libremente) hasta que ese lado del ángulo sea paralelo a *OP*. Para ello basta ir girando hasta que visualmente los dos hilos se superpongan uno sobre otro y sobre el punto *P*. En ese momento, sin girar la mesa, tomamos el triángulo (recordar que es una pieza suelta) y lo recolocamos de forma que ahora su base esté sobre el otro lado del ángulo (en verde en la figura). Entonces, colocamos un punto *Q* de forma que los dos hilos se superpongan visualmente entre sí y con *Q*. La línea *OQ* da la dirección en la que se encuentra el siguiente vértice del hexágono y basta con trasladar la distancia *OP* sobre *OQ*. Los demás vértices se obtienen repitiendo este procedimiento.

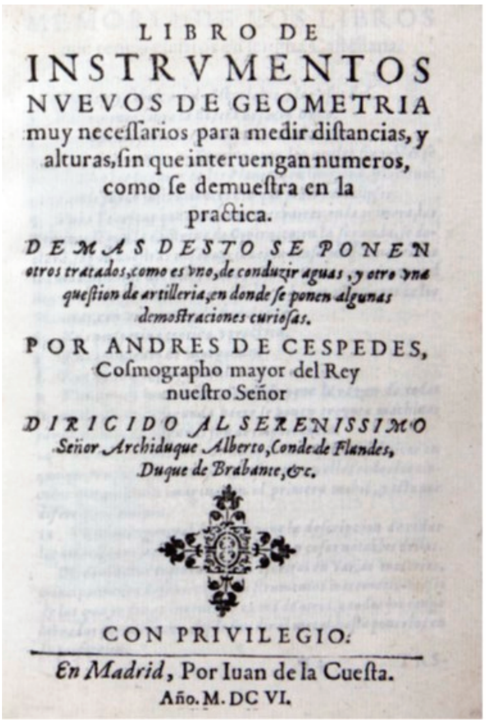


El resto de construcciones realizadas con el triángulo filar transcurren de una forma más o menos análoga. Cada uno de los restantes instrumentos tiene sus particularidades, sus usos y sus técnicas correspondientes.

A la vista de esta situación surge una interesante dicotomía entre la resolución teórica de un problema y su resolución en la práctica. En los *Elementos* de Euclides (Libro IV, Proposición 15) ya aparece la construcción de un hexágono inscrito en un círculo. Pero esa construcción, plenamente satisfactoria desde el punto de vista teórico, no puede llevarse a cabo en la práctica cuando se trabaja a «escalas reales» sobre el terreno. Entonces surge la necesidad de trasladar esa construcción al contexto real.

En ocasiones la construcción no es directamente trasladable y debe modificarse. En el ejemplo que nos ocupa la idea se basa en que el ángulo central del hexágono regular es conocido y simplemente se traslada sobre el terreno. Pero, como comentábamos al principio, el uso de este procedimiento viene marcado esencialmente por la herramienta que se utiliza. El método funciona porque la mesa puede rotar, porque el hilo es fino, porque el triángulo se puede reubicar, etc. Otras herramientas dan lugar a otros procedimientos de construcción diferentes y hacen uso quizás de otras propiedades de los hexágonos regulares.

Por ejemplo, en la figura siguiente vemos otros instrumentos extraídos de un libro de 1606 titulado *Libro de instrumentos nuevos de geometría* y escrito por Andrés de Céspedes. Se trata de un báculo de Jacob, de un cuadrante y de un nivel. Nuevamente, cada uno de ellos tiene sus usos y procedimientos que el autor de la obra se encarga de desentrañar.



LIBRO DE
INSTRVMENTOS
NVEVOS DE GEOMETRIA
muy neceſſarios para medir diſtancias, y alturas, ſin que interuengan numeros, como ſe demueſtra en la practica.

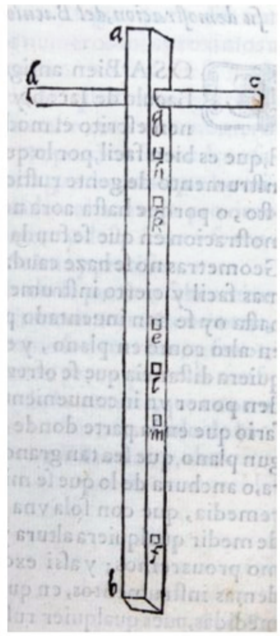
DEMAS DESTO SE PONEN otros tratados, como es vno, de conduzir aguas, y otro vna queſtion de artilleria, en donde ſe ponen algunas demoſtraciones curioſas.

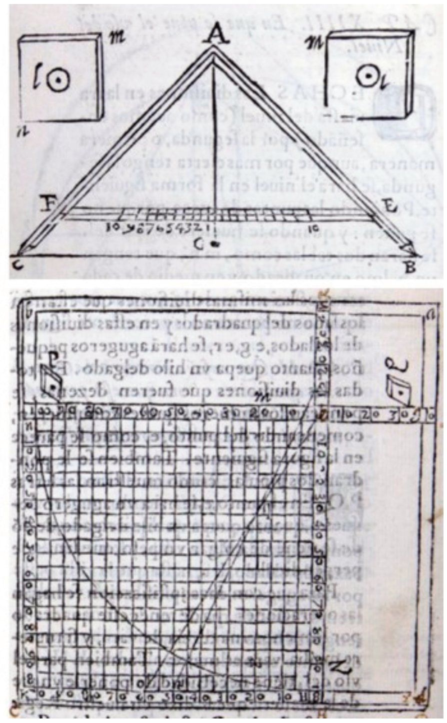
POR ANDRES DE CESPEDES, Coſmographo mayor del Rey nueſtro Señor

DIRIGIDO AL SERENISSIMO Señor Archiduque Alberto, Conde de Flandes, Duque de Brabante, &c.

CON PRIVILEGIO.

En Madrid, Por Iuan de la Cueſta.
Año. M. DC VI.





Puede parecer que todo esto no tiene interés desde un punto de vista matemático, pero no es así. Es posible que un método correcto teóricamente sea inaplicable en la práctica. También es posible que nos encontremos con una herramienta con la que no estamos familiarizados, y necesitemos utilizarla para realizar una construcción. Saber adaptar los conocimientos que tengamos (ya sean teóricos o prácticos en el uso de un instrumento) al uso de otro diferente, conlleva un trabajo matemático intenso.

Estos ejemplos provienen de un contexto geométrico ya abandonado pero la problemática no es exclusiva de la geometría. Pensemos, por ejemplo, en los criterios para determinar si un número es primo o no. El teorema de Wilson da una caracterización completa de los números primos. Un entero n es primo si y solo si $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$. Sin embargo, este resultado es inútil en la práctica.

En la actualidad, el uso de herramientas informáticas, conlleva este tipo de situaciones y se puede pensar, por ejemplo, que diseñar y programar algoritmos presenta dificultades muy similares.