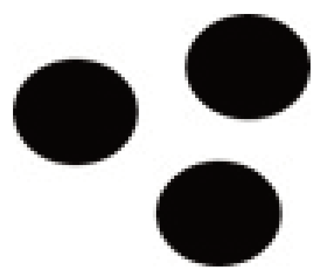
¿Qué es una fracción?

por
Antonio M. Oller Marcén
(Universidad de Zaragoza)

El concepto de fracción puede resultar complicado de entender inicialmente por diversos motivos. Para empezar, su carácter numérico puede ser dudoso por razones epistemológicas. ¿No sirven los números para contar? ¿No es la unidad algo indivisible por naturaleza? Por otro lado, está su representación. Aparecen dos cifras, pero conforman un solo número; y para empeorar las cosas, un mismo número se puede escribir de muchas formas diferentes. Por último, las fracciones (los números racionales) pueden tener asociados múltiples diferentes significados (medida, cociente, razón, etc.).

Todo lo anterior se puede concretar de forma muy clara de la siguiente manera. Si se nos pide representar gráficamente, por ejemplo, el concepto «3», todos representaremos algo similar a esto:



Sin embargo, si se nos pidiera representar gráficamente el concepto «2/5» la diversidad de respuestas será sustancialmente mayor y las diferencias irían seguramente más allá de cuestiones estéticas o circunstanciales relacionadas con la forma o con la disposición de los elementos del gráfico.

Las dificultades que surgen a la hora de tratar de dar una definición inicial sencilla del concepto de fracción se pueden rastrear en textos históricos dedicados a la enseñanza. Por ejemplo, en la *Conpusicion de la arte dela aritmética y juntamente de geometria* (1512), escrita por fray Juan de Ortega leemos lo siguiente:

> Y por tanto quiero que sepas que el número roto o quebrado es número que no tiene razón de número entero porque la principal denominación de las partes no se puede dividir como en número entero. Y por tanto sabrás que en cualquier número roto son necesarios dos números y debe siempre el menor estar sobre el mayor poniendo una raya pequeña en medio […] como este número cinco sextos, los 5 que están encima es el numerador y el de abajo, que es 6, se llama denominador. Y así el numerador que es el que está encima, siempre ese es el número quebrado y el denominador siempre significa y es número entero. Y por tanto has de notar que todo número que no fuese entero se llamará roto.

Este es todo el discurso que Ortega dedica en su libro a la introducción de las fracciones desde un punto de vista puramente conceptual. A partir de aquí, se limita a presentar un método para reducir a común denominador y a introducir distintos algoritmos para las operaciones. Como se puede observar, el texto es confuso —como mínimo— y se aprecia, por ejemplo, la dificultad asociada a la presencia de dos números enteros en la expresión fraccionaria de un número racional. Tenemos que pensar que el autor, de alguna forma, debía confiar en que los lectores se apoyarían en algún tipo de significado intuitivo de las fracciones, quizás relacionado con ideas vinculadas a relaciones parte-todo.

Una presentación ligeramente más clara en esta línea la podemos encontrar en el fragmento siguiente del *Sumario breue de la pratica dela arithmetica* (1515) del mosén Juan Andrés, escrito y publicado muy poco después:

> Has de saber que un número quebrado no es otra cosa sino un número que tiene una parte, o dos, o tres, o muchas partes de un entero; y no todas, porque si las tuviese todas no sería quebrado sino entero. Así mismo, un número quebrado es un número que no se puede nombrar por sí mismo, sino por otro número entero. Y has de saber que el número entero difiere del quebrado en esto: que el número entero se puede nombrar propiamente por sí mismo diciendo uno, dos, tres, cuatro, etc. y el número quebrado no se puede nombrar propiamente por sí mismo sin otro número entero del cual sale el tal número quebrado, así como decimos un tercio, dos quintos, tres cuartos etc.

Desde luego, el texto sigue siendo bastante enrevesado y contiene algunos elementos potencialmente problemáticos. Si un quebrado es «un número que tiene muchas partes de un entero», entonces, si tomo un entero (por ejemplo, 10) lo divido en partes (por ejemplo, en 5 partes), y cojo varias de esas partes (por ejemplo, 3 partes) obtengo 6; que es un entero. Es cierto que, en realidad, hemos tomado 6 de 10 y de ahí que Juan Andrés hable de que la fracción «no se puede nombrar propiamente por sí misma».

Sea como sea, en este fragmento aparecen ideas algo más concretas que en el anterior y que se vinculan explícitamente con el proceso de tomar partes de un total. Con todos los problemas que contiene el fragmento anterior —y son muchos— es posible pensar que un lector pudiera asumir de forma razonable que la fracción 5/7 surgía al tomar 5 objetos (partes) de un conjunto de 7 objetos (total). No obstante, conviene recalcar que este fragmento evita cualquier mención a subdivisiones de la unidad.

La aparición de la unidad en las definiciones antiguas de fracción es gradual. En un primer paso encontramos aproximaciones como la siguiente, que proviene del *Dorado contador* (1594) de Gerónimo de Santa Cruz:

> Quebrado en una parte o partes de la cosa entera […] y así cuando decimos siete doceavos, se entiende que dividida la cosa entera, si se puede, en 12 términos, los siete de ellos son siete doceavos, con tal que la división de los dichos términos, o partes, sean iguales.

La diferencia —quizás sutil, pero importante— entre este fragmento y el anterior es que se introduce la idea de dividir en partes. La necesidad de dividir «la cosa entera» presupone el hecho de que esa cosa entera forma una unidad que puede dividirse. En el fragmento de Juan Andrés, se toman «partes de un entero» sin necesidad de dividirlo. Se presupone que el entero ya está dividido en partes, que son las unidades. Esta necesidad de efectuar la acción de dividir hace que surja la imposición de que las partes sean iguales, y así lo remarca Santa Cruz. En el caso de Juan Andrés esto es innecesario, porque esas partes son las unidades, que son iguales por definición.

Casi cien años después, en la *Arithmetica demonstrada theorico-practica* (1699) de Juan Bautista Corachán encontramos ya una mención explícita a la unidad:

> Número quebrado […] es parte, o partes de la unidad, en cuanto supone, o representa algún todo dividido en partes iguales.

Aunque, como decimos, en este fragmento de Corachán ya se hace mención expresa a la unidad, el autor todavía se ve en la necesidad de señalar que dicha unidad hace referencia a un todo dividido en partes. Aún se detecta una concepción de la unidad aritmética como indivisible. Para poder dividirla en partes, la unidad debe representar un todo divisible.

Este escrúpulo en dividir la unidad termina por desaparecer en textos como el siguiente, que proviene del libro *Curiosidades útiles. Arithmetica, geometrica, y architectonica* (1719) escrito por el cura Bartholome Ferrer:

> El quebrado es una, o muchas partes, de aquellas en que se imagina dividida la Unidad, y nace de la división de un número menor por otro mayor, como si una unidad se ha de partir por tres le vendrá a cada uno un tercio, y este cociente es el quebrado.

Aquí, además de partir una unidad en partes (aunque sea de forma imaginada) vemos también una relación explícita con la operación de dividir. La fracción se identifica hasta cierto punto con (Ferrer dice que «nace de») el resultado de una división. En textos mucho más modernos, esto se aprecia con total claridad. La imagen encuadrada está tomada de unos *Elementos de matemáticas* (1879) escritos por Marcelino Gavilán Reyes.

En este fragmento de Gavilán de nuevo ha desaparecido por completo cualquier mención explícita a una unidad. En su lugar, la fracción pasa a ser en esencia un cociente indicado.

Hemos visto que a lo largo de la historia es posible identificar distintas aproximaciones al concepto de fracción. El listado que hemos presentado no es exhaustivo y, salvando algunos detalles, todas estas aproximaciones (partes de un todo, partes de la unidad, cociente, etc.) pueden ser matemáticamente válidas.

> **102.** Para comprender el origen de los quebrados volvamos á la división del número **40**. Dijimos que el cociente de dividir 38 por 5, no es un número entero, sinó un número comprendido entre los dos enteros consecutivos 7 y 8, y que tomando por cociente verdadero el menor 7, nos resultaba un resto 3, menor que el divisor 5 y por tanto, que era imposibe dividirle por él. Puesto que la división 3:5 es imposible, indiquémosla, sustituyendo, para más claridad en la escritura, el signo : por una raya horizontal, á fin de separar el dividendo del divisor, en esta forma $\frac{3}{5}$. Esta expresión, que no conocemos aún y que representa el cociente indicado del resto de una división inexacta por el divisor, es á lo que se ha dado el nombre de FRACCIÓN ó QUEBRADO. Es, pues, una canti-

Sin embargo, cada una de estas distintas aproximaciones tiene algunas implicaciones importantes, tanto desde el punto de vista conceptual, como procedimental. Por ejemplo, si se concibe la fracción como partes de un todo, no es posible aceptar la existencia de fracciones cuyo numerador sea mayor que su denominador. Si se concibe como partes de una unidad, pueden surgir problemas asociados a qué se considera como unidad, etc.

De este modo lo que nos interesa como docentes es ser conscientes de esta pluralidad de significados, de las problemáticas potencialmente asociadas a cada uno de ellos y de la necesidad de proporcionar una visión lo más completa posible de un objeto polifacético, como es el número racional. La historia nos puede ayudar en esta labor, así como a elegir una vía de entrada al concepto que trate de solventar algunos de los múltiples obstáculos asociados a su aprendizaje.

Entorno Abierto es una publicación digital bimestral que se edita en Zaragoza por la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas. *Entorno Abierto* no se identifica necesariamente con las opiniones vertidas en las colaboraciones firmadas.

Envío de colaboraciones a <sapmciruelos@gmail.com>

Blog: <http://sapmatematicas.blogspot.com.es/>

Twitter: @SAPMciruelos

Abril de 2023
ISSN: 2386-8821e