

Estrellas tetraédricas. Tejiendo entre vértices y aristas

por

CAROLINA RUEDA PÉREZ
(IES Martínez Vargas, Barbastro)

Una de las cosas que más me gusta de enseñar es tener el poder de generar intriga que derive en asombro y descubrimiento. Es una sensación que me satisface mucho y consigo que me siga entusiasmando ofrecer estas emociones a nuestro alumnado. Hace ya unos años que llevé al aula por primera vez la propuesta didáctica que os voy a compartir a continuación. Para entonces solo la trabajé como un taller, con el que quería mostrar al alumnado que podemos hacer matemáticas con cualquier objeto cotidiano que tuviéramos a nuestro alcance. Entonces era mi primer año como docente y tuve la suerte de iniciarme junto a un gran compañero, Daniel Cejalvo, quien me dio rienda suelta para crear con mis alumnos y alumnas. Al poco tiempo de empezar el curso nos concedieron el programa Conexión Matemática ofrecido por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas (SAPM), en colaboración con el Departamento de Educación del Gobierno de Aragón. Entonces me pareció que mi taller sería una actividad atractiva en dicho contexto. El tiempo ha pasado y esa actividad puntual se ha convertido en una propuesta didáctica que articula varias situaciones de aprendizaje, en la que podemos trabajar muchos aspectos de la geometría de muchas maneras posibles, y es así como hoy os la vengo a presentar.

Algunos de los objetivos que pretendo conseguir con el taller son pasar del plano al espacio, mediante la manipulación y actividades de creación, trabajando en grupo, tomando decisiones, proponiendo problemas en los que invitamos al descubrimiento y haciendo uso significativo de lo digital. Espero que a muchos de vosotros os inspire y os ayude a enseñar las matemáticas como más nos gustan a nosotros y a ellos, creando.

A continuación presento la actividad, el material necesario para su realización, cómo están divididas las diferentes sesiones, cómo lo trabajo en el aula para dar respuesta a las competencias específicas y los saberes básicos que se desean conseguir, todo ello adaptándolo en la medida de lo posible a la Ley Orgánica 3/2020 (LOMLOE), de 29 de diciembre, por la que se modifica la actual Ley Orgánica 2/2006 (LOE), de 3 de mayo, de Educación.

La geometría

Según el diccionario de la Real Academia Española, **geometría** se define como:

Estudio de las propiedades y de las medidas de las figuras en el plano o en el espacio.

- Geometría algorítmica: Aplicación del álgebra a la geometría para resolver por medio del cálculo ciertos problemas de la extensión.
- Geometría analítica: Estudio de figuras que utiliza un sistema de coordenadas y los métodos del análisis matemático.
- Geometría del espacio: Parte de la geometría que considera las figuras cuyos puntos no están todos en un mismo plano.
- Geometría descriptiva: Parte de las matemáticas que tiene por objeto resolver los problemas de la geometría del espacio por medio de operaciones efectuadas en un plano y representar en él las figuras de los sólidos.
- Geometría plana: Parte de la geometría que considera las figuras cuyos puntos están todos en un plano.
- Geometría proyectiva: Rama de la geometría que trata de las proyecciones de las figuras sobre un plano.

¿Cuánto juego nos da esta rama de las matemáticas? Empezando por los puntos, que se unen infinitamente y dan lugar a formas maravillosas; pasando por las líneas que al unirse por un punto forman vértices y con ellos ángulos; y si cerramos, planos; y si... Y así vamos creando formas y volúmenes.

Las actividades que se presentan responden a todas las definiciones mencionadas con anterioridad, secuenciado en varias situaciones de aprendizaje, en la que pasaremos por la visualización, el reconocimiento, el análisis, la or-

denación y clasificación, acabando en una deducción formal. Se ajustan así al modelo de razonamiento geométrico de Van Hiele junto con el de VAK (Valenzuela, 2020). El primer modelo hace referencia a las fases planteadas por Van Hiele (1986) para desarrollar cada nivel de razonamiento, en su teoría para la didáctica de la geometría; la segunda son los estilos de aprendizaje propuestos en el modelo VAK de programación neurolingüística de Bandler y Grinder (1975).

Material necesario para la actividad

- Palos de madera, de diferentes o iguales longitudes.
- Gomas elásticas.
- Ovillos de lana.
- Papel y lápiz.
- Ordenadores.

Sesiones

La actividad está dividida en varias sesiones, ampliables cada una de ellas dependiendo de los objetivos que queramos alcanzar. Está dirigida a 2.º de ESO, pero se puede comenzar a trabajar en 1.º de ESO.

1.ª sesión

Comenzamos la actividad presentando al alumnado los palos de madera. Desde este primer momento vamos a utilizar un vocabulario geométrico, así que los palos los llamaremos aristas, podemos aprovechar para repasar otros conceptos básicos como longitud, vértice, puntos, caras, área, perímetro, todo enfocado al plano.

En ocasiones presento diferentes longitudes de aristas, y sin que el alumnado sepa qué vamos hacer con ellas, les pido que se levanten y cojan 6 del tamaño que más les guste, de esta forma podremos realizar parejas aleatoriamente, y reparto unas cuantas gomitas indicándoles que estas gomitas formarán vértices.

En un primer momento y de forma individual, cada uno tendrá que formar un triángulo, un cuadrado, un pentágono, un hexágono, etc. Podemos detenernos aquí todo lo que consideremos oportuno. Fomentaremos que apunten en una hoja todo lo que sea relevante para ellos, ya que es aquí cuando empezamos a descubrir y repasar conocimientos ya trabajados en Primaria. A partir de este momento, empezamos a formar conjeturas, estudiar relaciones y propiedades matemáticas. También podemos aprovechar para explicar el teorema de Pick, ya sea con lápiz y papel de tramas, o con GeoGebra. Este teorema es muy sencillo de aplicar y resulta muy intuitivo a la vez que interesante.

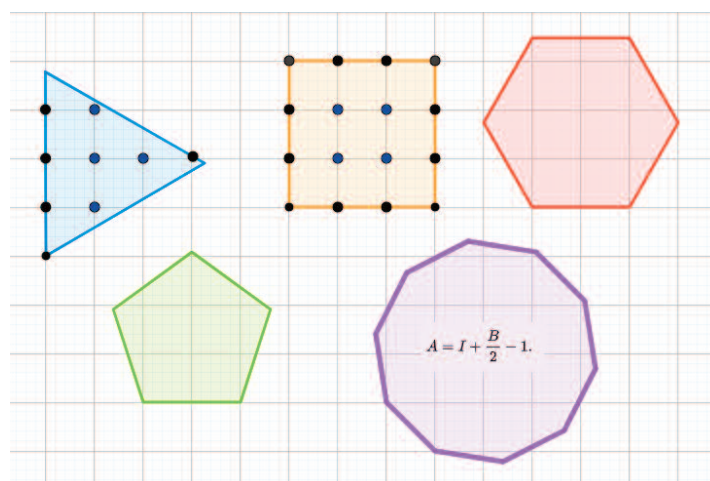


Figura 1. Polígonos regulares

En esta primera imagen podemos ver figuras realizadas con GeoGebra, para aplicar el teorema de Pick, el alumnado solo tiene que contar los puntos que quedan en el interior de la figura y sumarle la mitad de los que están en los bordes; al restar uno, obtienen el área de la figura representada. Es buen momento para comparar los resultados obtenidos con los que nos ofrecen las fórmulas más tradicionales, suelen quedar muy sorprendidos/as con esta actividad.

En esta primera sesión el objetivo principal es trabajar el sentido de la medida, a través de la experimentación, la manipulación y la visualización de objetos geométricos, construyendo figuras que nos ofrezcan la oportunidad de profundizar en conceptos básicos sobre las mismas.

2.ª sesión

Partiendo de la sesión anterior presentaremos un poliedro regular, el tetraedro, mencionaremos a Platón e invitaremos al alumnado a investigar en casa sobre el autor y los sólidos platónicos. Nos paseamos un poco por la historia de las matemáticas. A partir de aquí comienza nuestro reto, que consiste en montar un tetraedro (figura 2).

Para facilitar la construcción del tetraedro (figura 2) podemos ayudarnos nuevamente con GeoGebra, y presentarles dicha figura junto con su desarrollo (figura 3).



Figura 2. Tetraedro montado con palos de madera y gomas

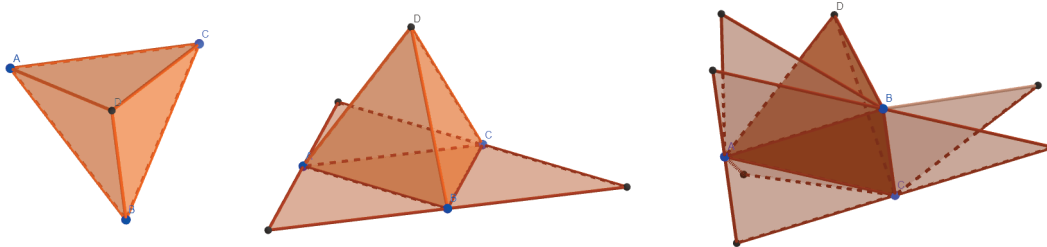


Figura 3. Desarrollo del tetraedro (Esta imagen ha sido creada con GeoGebra, que en su hoja de cálculo 3D ofrece un comando que recrea la animación del desarrollo de cualquier sólido)

Se trata de que con sus seis varillas de madera, aristas, consigan crear un tetraedro. Al principio se vuelven un poco «locos» y muy pocos llegan a crearlo, pero podemos ayudarles:

Primero cogemos tres palos a la vez, los atamos por uno de los vértices, luego unimos otros dos que ataremos en el vértice contrario junto con dos de las aristas ya atadas, y cuando obtengamos un cabestrillo, es decir de una única arista saldrán dos nuevas aristas por cada vértice, ataremos la sexta arista dando lugar a un tetraedro como se muestra luego en las imágenes. Es importante que estén fuertemente atadas, y a un par de centímetros del vértice, ya que más adelante lo manipularemos y si se sueltan los vértices damos lugar a la frustración.

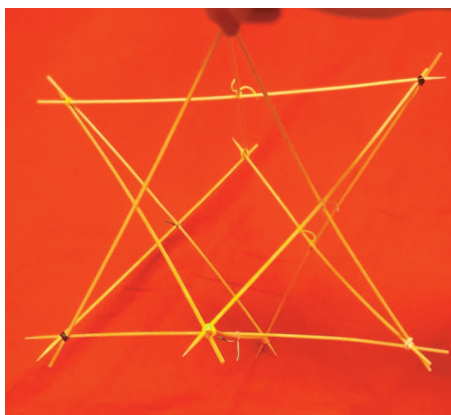


Figura 4. Estrella tetraédrica (Estrella creada con palos y gomas por la intersección de dos tetraedros)

Una vez que tengamos montado nuestro tetraedro, pedimos que se pongan por parejas, la pareja ha de tener una figura con las mismas longitudes, y juntos han de averiguar cómo podríamos montar una estrella con los dos tetraedros (figura 4).

En este punto la gran mayoría de las veces necesitan ayuda, han de saber que uno de los tetraedros ha de estar unido por todos sus vértices y el otro tendrá un vértice sin atar, de forma que cada una de las aristas entrará por cada una de las caras del otro tetraedro y saldrá por la cuarta cara donde uniremos las aristas. Una vez así, ataremos las intersecciones de las aristas dando lugar a la estrella.

Durante esta sesión se plantean preguntas como estas:

- ¿Cuántas caras tiene un tetraedro?
- Número de aristas, vértices... Explicar el teorema de Euler. Comprobar que se cumple.
- Cuál sería el área de la figura, cómo podríamos hallarla de forma rápida, recordar los tipos de triángulos y ver qué propiedades tiene el que estamos trabajando.
- ¿Cuántos vértices tendrá nuestra estrella tetraédrica?
- ¿Qué propiedades tiene esta figura?

Es fácil desde este punto trabajar el sentido espacial, desde lo concreto a lo visual, cuando el alumnado manipula abre su curiosidad, se concibe el aprendizaje de las matemáticas como algo divertido, lo cual ayuda mucho a desarrollar positivamente el sentido socioafectivo, trabajan la perseverancia, la superación de bloqueos, se plantean preguntas y buscan respuestas, al hacerlo por parejas se abren al debate, a tomar decisiones conjuntamente, interactúan y conversan entre iguales. Todas las veces que he realizado esta sesión han aparecido preguntas diferentes y el alumnado me ha sorprendido con aportaciones muy creativas.

3.ª sesión

Durante esta sesión vamos a trabajar la visualización, el razonamiento y la modelización geométrica. Como comenté al principio las situaciones de aprendizaje descritas en las diferentes sesiones, responden al modelo de Van Hiele (Vargas y Araya, 2013), como ejemplo voy a contextualizar la siguiente.

- Introducción: vamos a presentar la estrella tetraédrica montada el día anterior, recordando brevemente contenidos de las sesiones anteriores que sean relevantes, es el momento de preguntar a nuestro alumnado sobre sus indagaciones en la historia de los sólidos platónicos.
- Orientación guiada: comentaremos que el objetivo de esta sesión es que tienen que averiguar cuántas figuras planas podemos extraer, a través de lanas, uniendo vértices o intersecciones de la estrella
- Explicitación: la actividad se realizará por parejas, deben apuntar en una hoja el tipo de figura que obtienen con el color de lana usado y las características que cumple dicha figura (número de vértices, aristas, tipo de triángulo o cuadrilátero, si hay otras figuras diferentes...).
- Orientación libre: ahora cada pareja debe descubrir cuántas figuras semejantes a las anteriores pueden encontrar y anotarlas.
- Integración: invitarles a elaborar una lista con todo lo descubierto e indagar sobre si existe para ellos una regla a seguir para obtener de manera automática el número de figuras de cada tipo.

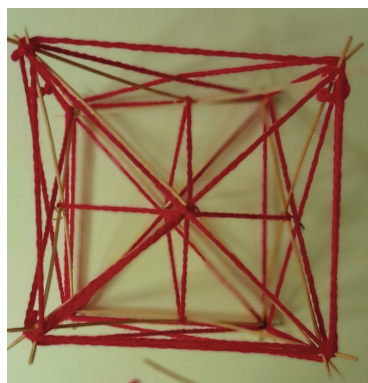


Figura 5. Cuadrados

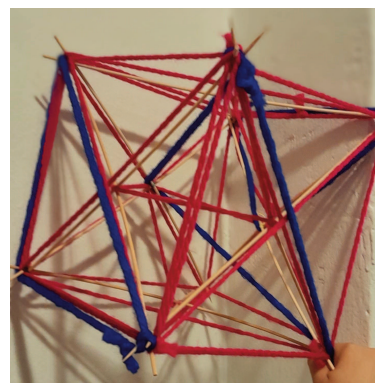


Figura 6. Triángulos

Esta actividad se puede adaptar a todo tipo de alumnado, responde a la diversidad, ofreciendo reflexiones más o menos exigentes dependiendo de los objetivos que se pretendan abordar con cada alumno/a. Por parte del pro-

fesorado es el momento de observar, anotar la evolución del alumnado, hasta dónde consigue llegar, cuáles son sus reacciones, cómo interpreta, cómo se expresa, etc. Es interesante atender a las preguntas y respuestas que van apareciendo a lo largo de la actividad.

4.ª sesión

En esta sesión presentaremos formalmente los cinco sólidos platónicos, hablaremos de volúmenes y capacidades, introduciremos las pirámides, los conceptos básicos que la acompañan, es nuevamente un buen momento para trabajar con GeoGebra todos estos conceptos.

En GeoGebra si nos vamos a la vista 3D, hay una pestaña que nos presenta pirámides con las alturas o bases que queramos, los diferentes sólidos platónicos y sus desarrollos. Si previamente hemos trabajado con GeoGebra en la primera sesión, podemos descubrir estas nuevas formaciones que nos ofrece el programa.

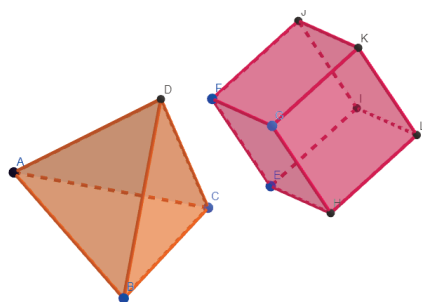


Figura 7. Tetraedro y cubo

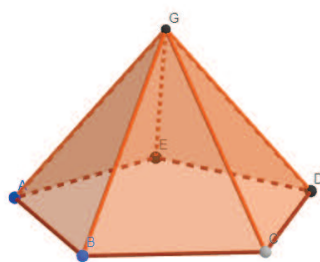


Figura 8. Pirámide

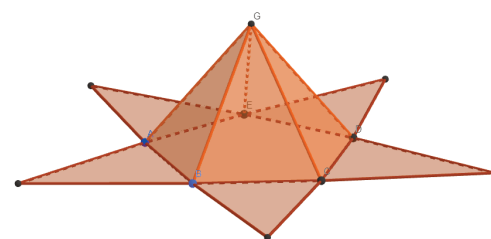


Figura 9. Desarrollo pirámide

Y comenzamos a montar estrellas partiendo de los sólidos platónicos. Para ello necesitamos imprimir el desarrollo de cada uno en un folio o cartulina para cada cara del poliedro regular, y todas las pirámides necesarias. Aquí podemos preguntar:

- ¿Cuántos folios necesito para cada figura?
- ¿Y para cada pirámide?
- ¿Qué área tiene cada figura? ¿Volumen?
- ¿Y la estrella en su conjunto?

Así en esta sesión haremos un recuento con el alumnado de todo el material necesario. En ocasiones he tenido la ayuda del departamento de dibujo, que han aprovechado para repasar conceptos de dibujo técnico, han creado dichas impresiones y han pegado los desarrollos de las figuras, dando diferentes texturas a las estrellas y haciendo creaciones muy mágicas. Esta es una actividad donde la creatividad sorprende, es un momento perfecto para dejar la imaginación actuar. De manera sencilla podemos obtener resultados como los que se muestran en la figura 10



Figura 10. Estrellas con poliedros regulares y pirámides

Merece la pena apuntar que todas las sesiones propuestas pueden llevar más de un día en realizarse. Todo dependerá de lo que queramos detenernos, del ritmo del alumnado y de las propuestas que les hagamos. En este sentido son muy versátiles. Personalmente las he llevado así al aula, pero cada año y con cada grupo ha sido diferente. Eso sí, todas las veces han sido igualmente sorprendentes.

Ejemplificación de situación de aprendizaje

Desde que ha entrado en vigor la LOMLOE son muchas las veces que en el departamento nos hemos preguntado si esto sería una situación de aprendizaje o si lo estamos haciendo bien. Estoy segura de que muchos de los docentes que damos esta materia en secundaria y bachillerato nos formulamos este tipo de preguntas. Para mí ha sido todo un descubrimiento leer y entender que esta propuesta corresponde a una situación de aprendizaje.

Las actividades presentadas persiguen ese objetivo, descubrir que detrás de muchas de las actividades que el profesorado lleva realizando desde hace tiempo hay una situación de aprendizaje, y que a través de lo manipulativo, y gracias a programas informáticos como GeoGebra, se puede facilitar y profundizar de una manera diferente en conceptos matemáticos que facilitan, y mucho, el aprendizaje a nuestro alumnado.

Con las actividades presentadas trabajamos todas las competencias específicas de la materia: la resolución de problemas cuando han de responder a los retos propuestos, el razonamiento al pensar cómo hacer cada una de las composiciones, la conexión cuando se dan cuenta de cómo a partir de una arista consiguen figuras tan complejas. Además comunican y representan usando recursos manipulativos, dibujando representaciones más complejas con GeoGebra, desarrollan positivamente sus destrezas socioafectivas hacia la materia con sus compañeros/as y hacia el profesor/a.

Y todo ello promovido por los saberes básicos, aquellos sentidos que trabajamos sin darnos cuenta diariamente. El sentido numérico, contando y enumerando las diferentes figuras que salían al unir vértices a través de las lanas. El sentido de la medida, estimando y prediciendo por ejemplo la obtención de figuras semejantes. El sentido más trabajado durante estas actividades, el espacial, con el que vemos la geometría desde una perspectiva amigable y satisfactoria. El algebraico, cuando intentamos formular cómo obtener todas las figuras planas o al utilizar los teoremas de Euler o Pick para hallar diferentes conceptos. El estocástico, aunque en menor medida, pero está presente al analizar y representar los datos que vamos obteniendo. Y el socioafectivo, generando una actitud positiva, trabajando la frustración, desarrollando habilidades y destrezas que nos facilitarán mucho el conocimiento y la comunicación. Todo ello, atendiendo a la diversidad, pasando por la historia de las matemáticas y sin olvidar lo divertido que es ir a clase cuando se proponen actividades de este tipo. Y si alguien se pregunta si es posible que funcione, doy fe de que sí, y os animo a probar.

Referencias bibliográficas

- VALENZUELA, J. E. (2020), *Enseñanza a partir de la teoría de Van Hiele y el modelo VAK: La teoría de Van Hiele y el modelo VAK como base de la enseñanza de la Geometría*, Editorial Académica Española, México.
- VARGAS, G. V., y R. G. ARAYA (2013), «El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la Geometría», *Uniciencia* Vol. 27, N.º1 , 74-94.