A INFLUÊNCIA DA ESCOLARIZAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS E PROBABILÍSTICOS: UM ESTUDO REALIZADO NA EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

The influence of schooling in combinatorial and probabilistic problem solving: A study in youth and adult education

Ewellen Tenorio de Lima
Rute Elizabete de Souza Rosa Borba

Resumo

O presente artigo é fruto de uma dissertação de mestrado que investigou as contribuições que a exploração de problemas combinatórios pode trazer ao raciocínio probabilístico e vice-versa. Tal estudo foi realizado com 24 estudantes da Educação de Jovens e Adultos, em diferentes momentos da escolarização a partir de entrevistas clínicas individuais que envolveram a proposição de 20 situações-problema. O recorte aqui apresentado tem por foco a influência que a escolarização exerceu nos desempenhos apresentados. Observou-se que a escolarização influenciou não apenas um avanço quantitativo, mas mais fortemente qualitativo, se refletindo na adoção de estratégias e representações simbólicas mais refinadas e/ou eficientes quando da resolução de tais problemas. Defendemos que é essencial que o ensino da Combinatória e da Probabilidade proporcione o contato com os diferentes tipos de problemas combinatórios e probabilísticos, bem como que leve ao aprimoramento de estratégias e representações, visando-se o desenvolvimento de ambos os raciocínios em questão.

Palavras-chave: Combinatória. Probabilidade. Educação de Jovens e Adultos. Resolução de Problemas. Influência da Escolarização.

Abstract

The present paper is part of a master's thesis which investigated the contributions that the exploration of combinatorial problems can bring to probabilistic reasoning and vice versa. The study was conducted with 24 students of Youth and Adult Education, in different moments of schooling, in the context of clinical interviews that involved the preposition of 20 problems. We focus here on the influence of schooling regarding the performances. It was observed that schooling influenced the performances not only in a quantitative way but more strongly in a qualitative one – being reflected in the adoption of more refined and/or efficient strategies and symbolic representations. We argue that it is essential that Combinatorics and Probability teaching provide contact with different types of combinatorial and probabilistic problems, as well as that it leads to improvement of the use of strategies and representations, focusing on the development of both forms of reasoning.

Keywords: Combinatorics. Probability. Youth and Adult Education. Problem Solving. Influence of Schooling.

Os raciocínios combinatório e probabilístico

A Combinatória e a Probabilidade são áreas da Matemática que têm situações aleatórias como objeto de estudo. Em função disso, o levantamento e entendimento de possibilidades é parte essencial de problemas de natureza combinatória e/ou probabilística. Os raciocínios combinatório e probabilístico são, ainda, componentes do raciocínio lógico-matemático, o qual mune crianças, jovens e adultos de ferramentas para o enfrentamento de situações (cotidianas ou não) nas quais a incerteza se faz presente e permitem, dentre outras competências: relacionar conjuntos de elementos, pensar sobre proporções, analisar e compreender fenômenos aleatórios.

Diferentes autores apontam a importância do ensino formal da Combinatória e da Probabilidade ao longo da escolarização básica, tendo-se em vista o amplo desenvolvimento desses raciocínios (FISCHBEIN, 1975; BORBA, 2016; CAMPOS; CARVALHO, 2016). No entanto, ainda são poucos os estudos que vêm sendo realizados com etapas iniciais da escolarização, visto que tradicionalmente o estudo referente a tais áreas da Matemática vinha sendo desenvolvido no Ensino Médio – quadro que é ainda mais alarmante no que diz respeito à Educação de Jovens e Adultos.

Além disso, autores como Piaget e Inhelder (1951 *apud* BATANERO; GODINO; NAVARRO-PELAYO, 1996), Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996) e Santos (2015) destacam que o raciocínio combinatório é essencial à compreensão da ideia de probabilidade, dada a importância do conceito de *espaço amostral* para o cálculo de probabilidades e a natureza combinatória por trás da construção do conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento. Defendemos, ainda, que o caminho oposto também é válido: o entendimento de conceitos probabilísticos pode consistir em uma importante ferramenta para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, a partir do aprofundamento de discussões acerca de problemas de Combinatória (LIMA, 2018).

Dado o posto, o estudo ao qual o presente artigo se refere surgiu do interesse em investigar, além de conhecimentos referentes a um e outro raciocínio (combinatório e probabilístico), as relações entre essas duas áreas da Matemática e, no presente texto, a influência da escolarização nos desempenhos apresentados. Para tal, adotou-se como principal referencial teórico a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1986; 1996), teoria que, inclusive, acrescenta evidências à existência de relações entre conhecimentos de Combinatória e Probabilidade, como apresentado na seção que segue.

A Teoria dos Campos Conceituais e o campo conceitual das estruturas multiplicativas

Conhecimentos acerca da Combinatória e da Probabilidade estão inseridos no campo conceitual das estruturas multiplicativas, que abarca situações que "exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações" (VERGNAUD, 1996, p. 167). Tal fato reforça a existência de relações entre conceitos combinatórios e probabilísticos, uma vez que um campo conceitual consiste em "um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão" (VERGNAUD, 1996, p. 10).

Ainda, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, um conceito pode ser definido como um tripé de três conjuntos: o das *situações* (que dão sentido ao conceito – S), o dos *invariantes* (propriedades e relações constantes nas diversas situações – I) e o das *representações simbólicas* (utilizadas para representar os conceitos – R). Vergnaud (1986, p. 9) chama atenção, ainda, ao fato de que "uma situação não coloca na obra em geral todas as propriedades de um conceito" bem como "não coloca habitualmente em jogo um conceito sozinho". Tais afirmações reforçam a importância da exploração de diversas situações ao se abordar determinado conceito, bem como do estudo das relações entre diferentes conceitos que podem ser abordados a partir de uma situação.

Nesse sentido, no presente trabalho foram consideradas diferentes *situações*, *invariantes*, e *representações simbólicas*, tanto no que diz respeito a problemas combinatórios quanto a problemas probabilísticos.

Situações combinatórias e as demandas cognitivas da Probabilidade

No que diz respeito à Combinatória, foram propostos problemas que abordaram as ideias de *produto de medidas* [1], *arranjo, combinação* e *permutação*. Esses problemas diferenciam-se entre si em função de seus invariantes de *ordem* e de *escolha* e tal classificação unificada foi proposta por Borba (2010). Os problemas de *produto de medidas* envolvem dois ou mais conjuntos, dos quais os elementos devem ser escolhidos de forma que cada elemento de um conjunto seja relacionado a cada um dos demais conjuntos. Além disso, nesse tipo de problema a ordenação de elementos não constitui possibilidades distintas. Por sua vez, nos problemas de *arranjo* tratamos de um conjunto único, dos quais alguns elementos devem ser escolhidos e a ordem determina novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de *arranjo*, nos problemas de

[1] Nomeado por diversos autores, como Nunes e Bryant (1997), de *produto cartesiano*.

combinação escolhem-se alguns elementos de um conjunto único maior. Entretanto, neste último caso a ordem não é determinante de novas possibilidades. Por fim, nos problemas de *permutação* também existe um conjunto único, mas neste caso todos os seus elementos devem ser utilizados e as distintas possibilidades são formadas a partir da mudança de ordem dos mesmos.

Visando variar as *situações* probabilísticas exploradas, foi adotada como referencial a argumentação de Bryant e Nunes (2012) referente às demandas cognitivas ao amplo entendimento da Probabilidade. São elas relativas à *compreensão da aleatoriedade*, à *construção de espaço amostral*, à *quantificação e comparação de probabilidades* e ao *entendimento de correlações.*

No que diz respeito à primeira demanda cognitiva citada acima, a mesma está relacionada à compreensão de que existem fenômenos aleatórios, isto é, situações sobre as quais não sabemos, de início, o resultado. Ao lidar com a *aleatoriedade* são exploradas situações nas quais se pode saber os resultados possíveis, mas não se pode saber os resultados antecipadamente, ou seja, são situações que envolvem eventos que "as pessoas sabem que podem acontecer, mas não têm certeza se e quando eles acontecerão" (BRYANT; NUNES, 2012, p. 3, tradução nossa). A segunda exigência cognitiva está relacionada à quantificação e construção do conjunto que indica todos os possíveis resultados de um dado evento aleatório. Bryant e Nunes (2012) destacam que "problemas em Probabilidade são sempre sobre um conjunto de eventos possíveis, mas incertos, que ocorrem aleatoriamente. [...] Nós precisamos saber precisamente quais são esses possíveis eventos" (p. 29, tradução nossa). A construção de tal conjunto é essencial para a resolução de grande parte dos problemas probabilísticos e consiste, também, em uma importante articulação com a Combinatória, pois a construção do conjunto composto por todas as possibilidades relativas a uma dada situação é uma construção de natureza combinatória.

A terceira demanda cognitiva está, por sua vez, intimamente relacionada à anterior e também ao raciocínio proporcional. A *quantificação de probabilidades*, a partir da concepção clássica [2], pressupõe o estabelecimento de uma razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, sendo dependente do estabelecimento do espaço amostral. Por outro lado, a *comparação de probabilidades* demanda, além disso, uma análise baseada no caráter proporcional das probabilidades, para que as comparações em jogo sejam adequadamente realizadas, visto que tanto o cálculo quando a comparação de probabilidades "devem estar baseados em todas as quantidades do espaço amostral e não apenas na quantidade do evento que queremos prever" (BRYANT; NUNES, 2012, p. 46, tradução nossa). Por fim, a última demanda cognitiva apontada por Bryant e Nunes (2012) diz respeito ao entendimento de *correlações*, se referindo à capacidade de distinguir quando dois eventos co-ocorrem em razão da existência de uma relação genuína e não do acaso.

Autores como Fischbein (1975), Borba (2016) e Campos e Carvalho (2016), têm defendido a importância da escolarização formal contínua para o amplo desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico. Ainda que noções intuitivas sejam desenvolvidas fora da escola, o desenvolvimento desses raciocínios depende de escolarização específica, que deve propiciar o contato com uma classe variada de problemas combinatórios e probabilísticos. Assim, para realização do presente estudo, partiu-se da defesa da importância da exploração de diferentes problemas, de seus *invariantes* e, também, da importância das diferentes *representações simbólicas* para o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico.

Método

O estudo conduzido teve por objetivo sondar conhecimentos no que diz respeito à Combinatória e à Probabilidade, bem como buscar entender relações que se estabelecem entre tais áreas da Matemática em contexto de resolução de problemas e quais contribuições tais relações podem trazer para um e para outro raciocínio. Os dados foram coletados junto a 24 estudantes da Educação de Jovens e Adultos.

[2] Godino, Batanero e Cañizares (1991) apontam outras concepções de Probabilidade, dentre elas: a frequentista, a subjetiva, a lógica, a formal e a geométrica. No presente estudo, teve-se por foco a concepção clássica, que possui relação mais estreita com a Combinatória.

Dentre as variáveis consideradas nesse estudo, além do tipo de problema e a ordem de apresentação destes, estava a influência da escolarização formal nos desempenhos dos participantes, variável esta que constitui o foco de discussão do presente artigo. Por esse motivo, os dados foram coletados com estudantes da EJA em diferentes momentos de escolarização: oito estudantes do Módulo II (equivalente aos 4º e 5º anos do Ensino Fundamental – fim dos Anos Iniciais), oito estudantes do Módulo IV (equivalente aos 8º e 9º anos – fim dos Anos Finais do Ensino Fundamental) e oito estudantes da EJA Médio 3 (equivalente ao último ano do Ensino Médio).

Em função da importância que um contato mais estreito entre pesquisadora e participantes assume na busca pelo entendimento dos procedimentos utilizados para a solução dos problemas, bem como dos raciocínios dos estudantes, optou-se pela realização de entrevistas clínicas individuais[3]. Durante tais entrevistas, os estudantes resolveram problemas combinatórios e probabilísticos.

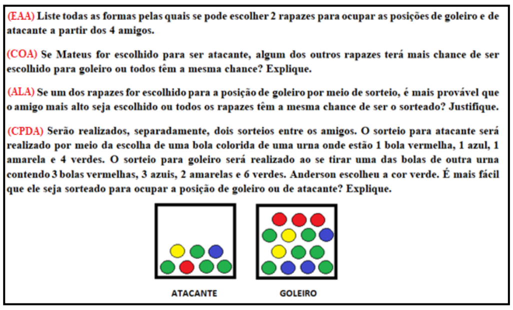
Instrumentos de Coleta

Tendo em vista que as relações que se estabelecem entre a Combinatória e a Probabilidade eram foco do estudo desenvolvido, a ordem de apresentação desses blocos de problemas consistiu em uma importante variável do estudo. No Teste 1, os problemas combinatórios eram propostos antes de cada bloco de problemas probabilísticos a ele correspondente. Já no Teste 2, a ordem de resolução dos problemas propostos era inversa: blocos de problemas probabilísticos primeiro, seguidos dos problemas combinatórios a eles relacionados. Os problemas propostos basearam-se nos aportes teóricos adotados, explorando diferentes *situações* combinatórias (BORBA, 2010) e demandas cognitivas da probabilidade (BRYANT; NUNES, 2012). Os problemas combinatórios e probabilísticos propostos eram iguais nos dois testes. Dado o número elevado de problemas – 20, sendo quatro combinatórios e 16 probabilísticos – são apresentados a seguir (Figuras 1 e 2), a título de ilustração, os problemas referentes à situação combinatória de *arranjo* presentes nos instrumentos de coleta utilizados.

Figura 1: Problema combinatório relativo à situação de arranjo.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Figura 2: Problemas probabilísticos relativos à situação de arranjo.



EAA→ espaço amostral de arranjo;
COA → correlação[4] de arranjo;
ALA → aleatoriedade de arranjo;
CPDA → comparação de probabilidades diferentes de arranjo.

Fonte: (LIMA, 2018, p. 72)

Análise de dados

Para fins de análises quantitativas, foram atribuídas as seguintes pontuações: no que diz respeito aos problemas combinatórios, 0 (zero) pontos quando menos da metade das possibilidades foi indicada, 1 (um) ponto quando metade ou mais das possibilidades foi indicada e 2 (dois) pontos quando todas as possibilidades referentes ao problema combinatório em questão foram indicadas; já no que se refere aos problemas probabilísticos propostos foram atribuídos 0 (zero) pontos quando houve erro, 1 (um) ponto quando houve acerto com justificativa inadequada e 2 (dois) pontos para

[3] A escolha por tal método de coleta de dados evidencia o interesse em analisar os raciocínios dos participantes ao resolverem os problemas propostos, visto que a entrevista clínica proporciona "compreender como o sujeito pensa, como analisa situações, como resolve problemas, como responde às contra sugestões do examinador" (CARRAHER, 1998, p. 6).

[4] A proposta de problemas probabilísticos que abordam o entendimento de *correlações* está sendo atualmente revista pelas autoras para estudos futuros.

acertos com justificativas probabilisticamente adequadas[5].

Dada a pluralidade das resoluções dos problemas combinatórios, estas foram classificadas, também, em função das estratégias/*representações simbólicas* utilizadas. Nesse sentido, teve-se uso de: enumeração oral, listagens, valor do enunciado, adição e multiplicação. Foi considerado uso de *enumeração oral* quando o participante não utilizou registro escrito durante a resolução do problema, apenas indicando oralmente diferentes possibilidades relativas à situação combinatória abordada. Quando houve registro escrito para indicação de cada possibilidade, a resolução foi classificada como *listagem*, havendo grande variedade na natureza da construção desse registro: listagens sistemáticas ou não, listagens reduzidas ou extensivas e, ainda, generalização de listagens por alguns participantes. O *uso de valor do enunciado* é uma estratégia/*representação simbólica* que evidencia falta de raciocínio combinatório, visto que o estudante apenas repete um dos valores presentes no enunciado do problema. A *adição*, quando tem os valores presentes no enunciado como parcelas,também é uma estratégia/*representação* que não resolve adequadamente problemas combinatórios, que possuem natureza multiplicativa. Por fim, o uso de *multiplicação* foi subclassificado em *multiplicação adequada* e *multiplicação inadequada*, visto que a multiplicação direta leva à correta resolução apenas quando se trata da situação de *produto de medidas*.

Apresentação e análise dos resultados

De acordo com a pontuação atribuída aos problemas propostos, o desempenho total máximo era de 40 pontos. O desempenho médio dos participantes da pesquisa foi de 17,2 pontos (tendo o desempenho individual variado entre 2 e 33 pontos). Nesse aspecto, a influência da escolarização se evidenciou, ao se observar o desempenho total médio em cada um dos grupos de participantes: 8,6 pontos no G1 (Anos Iniciais), 18,8 pontos no G2 (Anos Finais) e 24,1 pontos no G3 (Ensino Médio)[6]. Verificou-se, assim, uma grande melhora de desempenho dos Anos Iniciais para os demais níveis de ensino, mas apenas uma pequena melhora dos Anos Finais para o Ensino Médio.

Os resultados obtidos foram insatisfatórios, uma vez que os problemas propostos foram construídos de modo a serem de simples resolução para os diferentes participantes da pesquisa. Tais problemas possuíam poucas etapas de escolha, baixo número de possibilidades, linguagem acessível e contextos adequados ao público da EJA. Além disso, os mesmos problemas foram resolvidos por todos os participantes. Eram esperados, assim, desempenhos muito melhores por parte do G3, cujos estudantes estavam concluindo a Educação Básica no momento da realização da pesquisa.

Dada a influência do tipo de situação abordada no desempenho dos participantes, é de suma importância que sejam analisados, também, os desempenhos apresentados nos diferentes problemas combinatórios e probabilísticos presentes nos instrumentos de coleta utilizados.

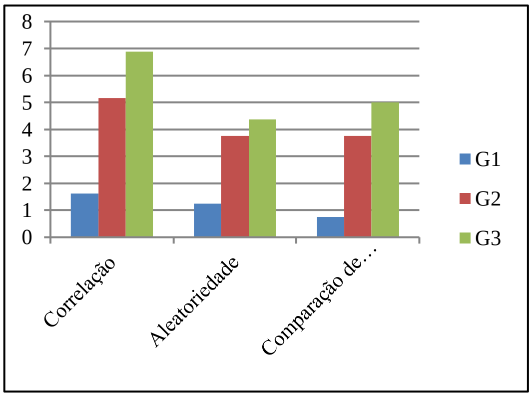
No que diz respeito à Combinatória, o desempenho máximo em cada tipo de problema (*produto de medidas*, *combinação*, *permutação* e *arranjo*) era de 2 pontos. Os desempenhos médios gerais foram de: PM → 1,17 pontos; C → 0,25 pontos; P → 0,75 pontos e A → 0,75 pontos. Esse resultado corrobora estudos anteriores (PESSOA, 2009; AZEVEDO 2013; LIMA, 2010), referentes a diferentes níveis e modalidades de ensino, que têm apontado os problemas de *produto de medidas* como aqueles de mais fácil resolução dentre os combinatórios, bem como maiores dificuldades com os problemas de *combinação*, seja por incompreensão de seus invariantes ou por dificuldades de esgotamento de possibilidades.

No caso específico dos desempenhos em cada tipo de problema combinatório, a escolarização não teve influência diretamente positiva nos desempenhos apresentados, uma vez que os desempenhos do G2 e G3 foram bem próximos e, por vezes, o G1 apresentou desempenhos maiores que os demais, como se pode observar no Gráfico 1.

[5] Foram propostos quatro problemas combinatórios e 16 probabilísticos. A pontuação máxima possível de ser obtida era, portanto, de 40 pontos.

[6] Houve diferença estatisticamente significativa ao se comparar o desempenho médio do G1 com os demais: G1 e G2 → p = 0,034; G1 e G3 → 0,001. O mesmo não ocorreu entre o G2 e G3 → p = 0,340.

Gráfico 1: Desempenho médio por grupo – problemas combinatórios

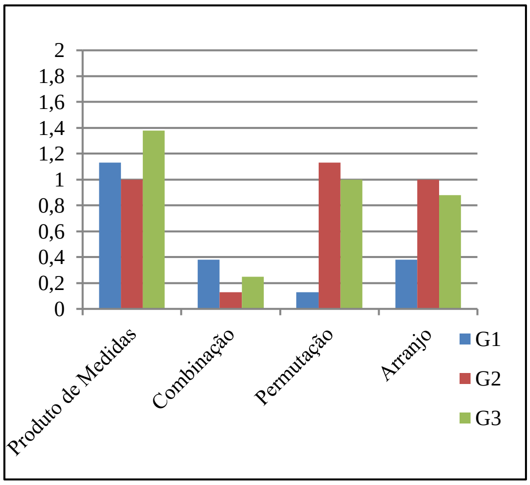


Fonte: Acervo da pesquisa.

O problema combinatório de *combinação* foi aquele em que todos os grupos mostraram apresentar grandes dificuldades[7]. Já na *permutação*, os estudantes dos Anos Finais e do Ensino Médio tiveram desempenhos muito melhores do que os dos Anos Iniciais. Em início da escolarização, compreender como permutar todos os elementos de um agrupamento dado traz muitas dificuldades que são gradativamente superadas nas fases finais de escolarização.

Por outro lado, o desempenho em cada tipo de problema probabilístico poderia ir até 8 pontos (pois existiam quatro problemas que abordavam cada demanda cognitiva considerada). Os desempenhos médios nos problemas de *correlação*, *aleatoriedade* e *comparação de probabilidades diferentes* foram de 4,54 pontos, 3,13 pontos e 3,17 pontos, respectivamente. Nesses tipos de problema a situação combinatória relacionada não influenciou o desempenho, por isso, os mesmos foram contabilizados conjuntamente. Os resultados referentes aos problemas probabilísticos de *espaço amostral*, cujos desempenhos dependeram diretamente do tipo de situação combinatória abordada ou revisitada, serão apresentados mais adiante. O tipo de teste (situações combinatórias seguidas de situações probabilísticas, ou vice-versa) também não influenciou os desempenhos nos problemas probabilísticos (LIMA, 2018) e, dessa maneira, essa variável não aparece nas análises aqui apresentadas.

Gráfico 2: Desempenho médio por grupo – problemas probabilísticos.



Fonte: Acervo da pesquisa.

A partir do Gráfico 2 é possível perceber que houve influência direta da escolarização no desempenho apresentado pelos grupos de participantes ao resolverem os problemas probabilísticos propostos[8]. Tendo em vista que a pontuação atribuída ao desempenho nesses problemas levou em consideração, também, as justificativas apresentadas pelos participantes, percebe-se que com o avançar da escolarização os estudantes foram capazes de apresentar maior coerência em suas resoluções, aumentando o desempenho, ainda que insatisfatório, como será aprofundado adiante.

É válido destacar, ainda, a grande dificuldade dos participantes dos diferentes grupos ao resolverem os problemas de *comparação de probabilidades diferentes*, como já observado em estudos anteriores (BATISTA; FRANCISCO, 2015; LIMA; SILVA, 2017). Nesse tipo de problema é essencial que o caráter proporcional seja levado em consideração. Observa-se, ainda, que a dificuldade referente a essa exigência cognitiva de compreensão da probabilidade, é muito maior no início da escolarização.

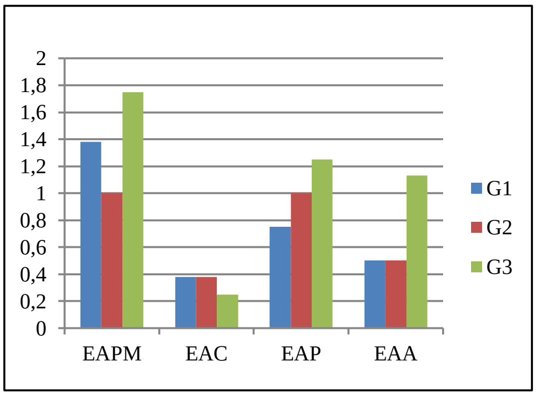
Por sua vez, no que se refere à construção de *espaços amostrais*, considerou-se

[7] Foi observada diferença estatisticamente significativa de desempenho apenas no que diz respeito ao problema de *permutação*, entre o G1 e os demais: G1 e G2 → 0,003 e G1 e G3 → 0,008.

[8] Houve diferença estatisticamente significativa entre o G1 e os demais nos problemas de CO (G1 e G2 → $p = 0,005$; G1 e G3 → $p < 0,001$) e de AL (G1 e G2 → $p = 0,023$; G1 e G3 → $p = 0,004$). Já nos problemas de CPD houve diferença significativa de desempenho apenas ao se comparar o G1 com G3, sendo $p = 0,015$.

os resultados por tipo de situação combinatória explorada ou revisitada pelos participantes, visto que isso influenciou fortemente o desempenho dos mesmos: a dificuldade apresentada na situação combinatória de *combinação*, por exemplo, teve efeito sobre a explicitação das possibilidades (construção do *espaço amostral*) referente ao mesmo problema. Assim, o desempenho máximo em cada problema considerado separadamente era de 2 pontos. O desempenho médio geral foi de 1,38 pontos no problema de *espaço amostral de produto de medidas*; 0,33 pontos no problema de *espaço amostral de combinação*; 1 ponto no problema de *espaço amostral de permutação* e 0,71 pontos no problema de *espaço amostral de arranjo*. No Gráfico 3 é possível observar, ainda, a influência da escolarização nesses desempenhos[9].

Gráfico 3: Desempenho médio por grupo – espaços



amostrais.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Os desempenhos em questão espelham as dificuldades com as respectivas situações combinatórias. Dessa maneira, os melhores desempenhos foram observados ao se levantar o espaço amostral relacionado à situação de *produto de medidas* e os piores desempenhos dizem respeito ao espaço amostral de *combinação*. Mais uma vez, a grande dificuldade com esse segundo tipo de situação combinatória, comprometeu os desempenhos de todos os grupos. No que diz respeito aos demais problemas, o avançar da escolarização levou a melhores desempenhos, mas os mesmos não foram tão expressivos, tendendo a se refletir nos extremos – G1 e G3.

Com base nos dados quantitativos apresentados é válido ressaltar que os desempenhos observados foram menores do que o que se esperava tendo-se em vista as expectativas de aprendizagem postas em currículos prescritos da EJA (BRASIL, 2001; BRASIL, 2002; PERNAMBUCO, 2012), principalmente no que diz respeito ao G3, pois nessa etapa da escolarização é comumente dado maior destaque ao trabalho com a Combinatória e com a Probabilidade. Esperava-se, portanto, que os estudantes desse grupo tivessem apresentado desempenhos estatisticamente superiores aos demais.

No entanto, os avanços observados sob uma ótima qualitativa foram muito importantes. Tais avanços estiveram, em grande parte, associados à utilização de estratégias/*representações simbólicas* de maneira adequada e/ou que potencializavam a resolução dos problemas (problemas combinatórios), bem como à apresentação de justificativas matematicamente válidas, que demonstram uma compreensão mais ampla das situações exploradas (no caso dos problemas probabilísticos).

O comportamento quanto ao uso de estratégias/*representações simbólicas utilizadas* pelos diferentes grupos de participantes pode ser observado nas Tabelas 1 e 2.

[9] Foi observada diferença estatisticamente significativa de desempenho apenas no que se tratou do problema de *espaço amostral* no problema de *produto de medidas* (EAPM), entre G2 e G3, sendo p = 0,019.

Tabela 1: Estratégias/representações simbólicas utilizadas – problemas combinatórios.

		Não Revisitou	Uso de Valor do Enunciado	Enumeração Oral	Adição	Listagens	Multiplicação[10]
G1	PM1	-	-	50%	25%	-	25%
	PM2	50%	-	-	50%	-	-
	C1	-	-	75%	-	-	25%
	C2	100%	-	-	-	-	-
	P1	-	25%	50%	-	-	25%
	P2	50%	25%	25%	-	-	-
	A1	-	-	75%	-	-	25%
	A2	100%	-	-	-	-	-
G2	PM1	-	-	100%	-	-	-
	PM2	-	-	100%	-	-	-
	C1	-	-	100%	-	-	-
	C2	50%	-	25%	-	-	25%
	P1	-	-	100%	-	-	-
	P2	50%	-	50%	-	-	-
	A1	-	-	100%	-	-	-
	A2	25%	-	50%	-	25%	-
G3	PM1	-	-	75%	-	-	25%
	PM2	25%	-	25%	-	-	50%
	C1	-	-	50%	-	25%	25%
	C2	25%	-	50%	-	-	25%
	P1	-	-	50%	-	50%	-
	P2	25%	-	25%	-	25%	25%
	A1	-	-	75%	-	25%	-
	A2	50%	-	25%	-	-	25%

G1 →Módulo II (4º e 5º anos do Ensino Fundamental);
G2 → Módulo IV (8º e 9º anos do Ensino Fundamental);
G3 → EJA Médio 3 (3º ano do Ensino Médio);
PM1 → produto de medidas (teste 1);
PM2 → produto de medidas (teste 2);
C1 → combinação (teste 1); C2 → combinação (teste 2);
P1 → permutação (teste 1); P2 → permutação (teste 2);
A1 → arranjo (teste 1); A2 → arranjo (teste 2).

Fonte: Acervo da pesquisa.

É possível perceber que o uso de estratégias/*representações simbólicas* inadequadas à resolução de problemas combinatórios (como a adição e o uso de valor do enunciado) apareceram apenas no G1. Isso demonstra uma maior incompreensão da natureza dos problemas em questão. Por outro lado, estratégias como a enumeração oral (amplamente utilizada por todos os grupos) podem dificultar o esgotamento, pois, por vezes, os participantes esqueciam quais possibilidades já haviam sido consideradas. É importante ressaltar que o G3 se destacou positivamente por ir abandonando aos poucos a enumeração oral e investindo em estratégias/*representações simbólicas* mais sistemáticas. Os estudantes desse grupo utilizaram mais amplamente a listagem espontaneamente, estratégia que facilitou o acompanhamento das possibilidades já consideradas através do registro escrito. Foi possível observar, ainda, que o uso da listagem foi se modificando em função da escolaridade. Estudantes do G3 demonstraram maior compreensão da estrutura dos diferentes problemas ao utilizarem abreviações e, assim, diminuírem o tempo gasto com as listagens.

Dado o nível de escolarização desse grupo (G3), esperava-se, ainda, que os mesmos utilizassem de maneira mais significativa as estratégias/*representações* próprias da Combinatória. De certa forma, o observado confirmou a expectativa. Entretanto, é válido destacar uma dificuldade que surgiu para esse grupo em função do reconhecimento do caráter multiplicativo dos problemas propostos (avanço frente aos G1 e G2) – demonstrando, assim, a importância de que o ensino formal foque nas especificidades dos conhecimentos referentes à Combinatória e à Probabilidade para o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico. O uso da multiplicação direta em diferentes problemas levou a alguns erros. Muitas vezes, esses participantes utilizavam outras estratégias (como a enumeração oral ou a listagem), mas, ao confrontar os resultados, optavam pelo obtido a partir da multiplicação, revelando acreditar que o uso de 'cálculo' seria o mais adequado para resolução dos problemas. Decorre desse resultado a importância de que durante a escolarização os estudantes sejam munidos de estratégias/*representações simbólicas* cada vez mais refinadas (como o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e fórmulas) e possam perceber as particularidades de diferentes tipos de situações, para que possam resolver problemas adequadamente, visto que "as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão colocada exige várias etapas" (VERGNAUD, 1996, p.184).

[10] O uso de multiplicação direta para resolução dos problemas combinatórios só levava ao resultado correto nos problemas de *produto de medidas*.

Mesmo com melhores desempenhos, reforçamos que o G3 poderia ter avançado ainda mais. Acreditamos que tal fato se deve a um déficit no ensino formal específico de Combinatória e de Probabilidade.

No que diz respeito aos problemas probabilísticos, é possível perceber mais claramente o avanço qualitativo em função da escolarização. Não apenas o número de erros diminuiu no G2 e G3, como o número de acertos com justificativas adequadas foi muito maior no G3, em todos os problemas. Esse resultado evidencia uma maior compreensão dos problemas probabilísticos, visto que os participantes desse grupo não só acertaram mais, como conseguiram justificar suas respostas baseados em argumentos matematicamente válidos, o que demonstra um avanço muito positivo (Tabela 2).

Tabela 2: Desempenho qualitativo – problemas probabilísticos.

		Erro	Acerto – justificativa inadequada	Acerto – justificativa adequada
G1	**CO**	65,63%	28,13%	6,25%
	AL	75%	18,75%	6,25%
	CPD	81,25%	18,75%	-
G2	**CO**	28,13%	15,63%	56,25%
	AL	12,5%	68,75%	12,5%
	CPD	53,13%	-	46,88%
G3	**CO**	6,25%	15,63%	78,13%
	AL	15,63%	59,38%	25%
	CPD	34,38%	6,25%	59,38%

G1 → Módulo II (4º e 5º anos do Ensino Fundamental);
G2 → Módulo IV (8º e 9º anos do Ensino Fundamental);
G3 → EJA Médio 3 (3º ano do Ensino Médio);
CO→ correlação;
AL→aleatoriedade;
CPD→comparação de probabilidades diferentes.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Por fim, dada a natureza distinta dos problemas de *espaço amostral* propostos, bem como a influência do tipo de situação combinatória relacionada a esses problemas nos desempenhos, na Tabela 3 são apresentados os resultados referentes às estratégias/*representações simbólicas* utilizadas por cada grupo.

Tabela 3: Estratégias/representações simbólicas utilizadas – problemas de espaço amostral.

		Enumeração oral[11]	Listagem extensiva não sistemática	Listagem extensiva sistemática	Listagem reduzida não sistemática	Listagem reduzida sistemática	Generalização de listagem
		%	%	%	%	%	%
G1	**EAPM**	62,5	37,5	-	-	-	-
	EAC	75	25	-	-	-	-
	EAP	75	25	-	-	-	-
	EAA	75	12,5	12,5	-	-	-
G2	**EAPM**	-	87,5	-	-	12,5	-
	EAC	-	87,5	-	-	12,5	-
	EAP	-	87,5	-	-	12,5	-
	EAA	-	75	-	-	12,5	12,5
G3	**EAPM**	-	50	50	-	-	-
	EAC	-	87,5	-	12,5	-	-
	EAP	-	75	-	25	-	-
	EAA	-	37,5	37,5	12,5	12,5	-

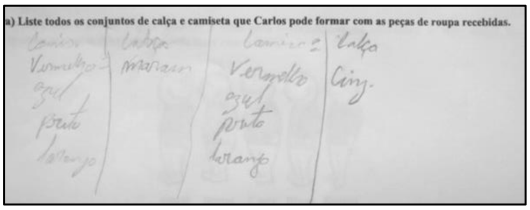
G1 → Módulo II (4º e 5º anos do Ensino Fundamental);
G2 → Módulo IV (8º e 9º anos do Ensino Fundamental);
G3 → EJA Médio 3 (3º ano do Ensino Médio);
EAPM→espaço amostral de produto de medidas;
EAC→espaço amostral de combinação;
EAP→espaço amostral de permutação;
EAA → espaço amostral de arranjo.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Nesses problemas a listagem foi utilizada de diferentes formas em função da escolarização. O G1, por exemplo, apresentou muitas dificuldades com leitura e escrita e, por vezes, seus participantes enumeraram oralmente as possibilidades que compõem os espaços amostrais correspondentes – estratégia menos eficiente ao se comparar com a listagem escrita, pois torna mais difícil a percepção das possibilidades já consideradas. Por sua vez, os G2 e G3 utilizaram listagens de diferentes naturezas, sendo elas extensivas ou reduzidas (Figura 3 e 4). O G3 variou mais as representações utilizadas e foi o grupo que mais utilizou listagens *sistemáticas* e *reduzidas*, o que fez com que as resoluções demandassem menos tempo.

[11] Por dificuldades de leitura e escrita alguns estudantes não foram capazes de construir registros escritos ao construir os espaços amostrais solicitados. Foi permitido, portanto, que os mesmos indicassem oralmente as possibilidades correspondentes.

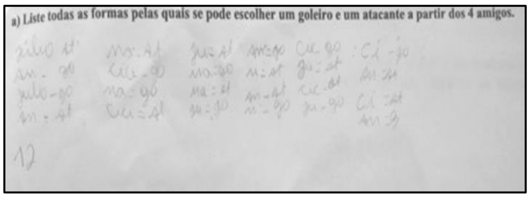
Figura 3: Problema de espaço amostral de produto de medidas, resolvido com listagem extensiva sistemática – P19 (Estudante do G3).



Fonte: LIMA (2018, p. 113).

O estudante P19 ao explicitar o espaço amostral referente ao problema de *produto de medidas* – cujo enunciado era: "*Carlos começou a trabalhar em uma rede de supermercados e acabou de receber o seu fardamento: 4 camisetas em cores diferentes com o logo da empresa e 2 calças. Quantos conjuntos de uniforme diferentes Carlos pode formar com as peças recebidas?*" acompanhado de ilustração – relacionou cada uma das quatro camisetas à calça marrom e, em seguida, as mesmas quatro camisetas à calça cinza. Realizou, dessa forma, um levantamento sistemático das possibilidades de conjuntos de uniforme que podem ser formados a partir das peças de roupa disponíveis, listando os nomes das cores por extenso.

Figura 4: Problema de espaço amostral de arranjo, resolvido com listagem reduzida sistemática – P17 (Estudante do G3).



Fonte: LIMA (2018, p. 122).

Por sua vez, o estudante P17 ao resolver o problema de construção de espaço amostral referente ao problema de *arranjo* (ver Figura 1) utilizou abreviações – listagem sistemática – para representar os nomes de cada um dos rapazes e para indicar as posições a serem ocupadas por cada um (representação reduzida). Além disso, compreendendo o *invariante de ordem* de tal problema, considerou cada dupla duas vezes (repetindo-as em cada coluna), fazendo a troca na ordem das posições a serem ocupadas para o jogo de futebol (atacante ou goleiro).

O Quadro 1 sintetiza as discussões do presente texto, evidenciando as especificidades de cada grupo frente ao uso de estratégias/*representações simbólicas* ao resolver os problemas combinatórios e probabilísticos propostos.

Quadro 1: Representações simbólicas/estratégias mais utilizadas (por Grupo).

	G1	**G2**	**G3**
Problemas Combinatórios	- Não revisitou; - Bastante enumeração oral; - Estratégias inadequadas: adição e uso de valores do enunciado.	-Diminuição no uso de enumeração oral e de não revisitação; - Uso de registro escrito – listagens;	- Maior uso de listagens escritas; - Amplo uso de multiplicação.
Espaços Amostrais	- Enumeração Oral – dificuldades com leitura e escrita; - Listagem Extensiva.	- Listagem extensiva (algumas sistemáticas); - Algumas listagens reduzidas.	- Listagem não sistemática (reduzidas ou extensivas); - Mais sistematização e variação de estratégias.
Demais Problemas Probabilísticos	- Erros baseados em preferências pessoais; - Justificativas inadequadas.	- Diminuição de erros; - Muitos casos de justificativas adequadas.	- Maioria das justificativas adequadas.

G1 → Módulo II (4º e 5º anos do Ensino Fundamental);
G2 → Módulo IV (8º e 9º anos do Ensino Fundamental);
G3 → EJA Médio 3 (3º ano do Ensino Médio).

Fonte: Acervo da pesquisa.

A partir da síntese elaborada, referente a cada um dos grupos, pode-se perceber a influência (quantitativa e qualitativa) da escolarização sobre os desempenhos apresentados pelos estudantes da EJA participantes da pesquisa. No caso dos problemas combinatórios, a escolarização foi proporcionando o abandono gradual de estratégias/*representações simbólicas* não adequadas à resolução de problemas dessa natureza, como a *adição* (utilizada pelo G1) e levando os estudantes dos grupos G2 e G3 ao uso de listagens (e posterior refinamento das mesmas) e à percepção do caráter multiplicativo desses problemas. No que diz respeito aos problemas de *espaços amostrais* esse avanço se evidenciou pela dificuldade do G1 em produzir listagens (o que fez com que os estudantes desse grupo enumerassem oralmente as possibilidades) e posterior avanço nos G2 e G3 no aperfeiçoamento (sistematização e uso de abreviações) do uso das listagens. Por fim, ao se tratar dos demais problemas probabilísticos, os estudantes dos G2 e G3 apresentaram maior número de acertos, bem como de justificativas adequadas aos problemas propostos – evidenciando uma compreensão gradual de conceitos probabilísticos ao avançar da escolarização.

Frente aos desempenhos abaixo do esperado, ressaltamos a importância do ensino específico que tenha em vista o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico. Defendemos que tal ensino deve explorar variadas *situações* e seus *invariantes*. Além disso, o ensino deve proporcionar o contato e refinamento do uso de *representações simbólicas* adequadas à resolução de problemas de diferentes naturezas.

Contudo, os avanços de desempenho, ainda que pequenos, contribuíram para a evidenciação das relações entre a Combinatória e a Probabilidade. No Teste 1, o melhor desempenho ao levantar espaços amostrais proporcionou a descoberta de novas possibilidades dos problemas combinatórios revisitados, visto que ao utilizar registros por escrito muitos participantes puderam avaliar e modificar as respostas dadas anteriormente, repensando os *invariantes* considerados e reconhecendo a listagem (de diferentes naturezas) como uma importante *representação simbólica* à resolução de problemas combinatórios (especialmente quando estes possuem um número baixo de possibilidades – caso dos problemas propostos no estudo). Por outro lado, o bom desempenho referente ao raciocínio combinatório, relacionado ao levantamento de possibilidades considerando as peculiaridades dos diferentes problemas, estiveram associados a um melhor desempenho em Probabilidade. Isso pode se dever a um maior entendimento dos *espaços amostrais*, compreensão que se mostra essencial ao sucesso frente às demais demandas exploradas, pois reflete o caráter não-determinístico e proporcional dos problemas abordados.

Os resultados discutidos demonstram que os diferentes grupos de participantes possuem conhecimentos combinatórios e probabilísticos e que esse conhecimento levou a melhores desempenhos em função da escolarização. Para potencializar esse efeito da escolarização, vamos ao encontro de diferentes autores que defendem que a instrução formal é indispensável para o desenvolvimento do raciocínio combinatório e do raciocínio probabilístico – seja na EJA ou no ensino regular (FISCHBEIN, 1975; BARRETO, 2012; BORBA, 2016; CAMPOS; CARVALHO, 2016).

Algumas considerações

O estudo de dissertação desenvolvido (LIMA, 2018) teve por foco as relações que se estabelecem entre Combinatória e Probabilidade, a partir dos problemas propostos, visando explorar as potencialidades de articulação dessas áreas para o desenvolvimento de ambos os raciocínios: o combinatório e o probabilístico. O recorte aqui apresentado voltou-se para uma das variáveis do estudo: a escolarização dos participantes.

Espera-se, com base em estudos anteriores e em documentos curriculares, que a escolarização proporcione o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático e a ampla compreensão das estruturas multiplicativas. Em função disso, esperava-se um melhor desempenho frente a problemas combinatórios e probabilísticos por parte dos estudantes da EJA participantes do estudo.

Apesar do não atendimento pleno das expectativas, foi possível, contudo, observar que a escolarização influenciou positivamente os desempenhos apresentados (quantitativamente e, mais fortemente, qualitativamente). Destacou-se a escolha das estratégias/*representações simbólicas* utilizadas, que evidenciaram, com o aumento da escolarização, uma maior compreensão da natureza dos problemas combinatórios e probabilísticos propostos e/ou facilitaram a resolução dos mesmos. O avanço da escolarização esteve relacionado, também, a uma maior evidenciação da contribuição da articulação entre Combinatória e Probabilidade a um e outro raciocínio, o que nos leva a defender que o ensino formal explore ambas as áreas da Matemática em questão, bem como as relações entre as mesmas.

É válido ressaltar, ainda, a importância do ensino formal específico de conceitos combinatórios e probabilísticos para potencialização do desenvolvimento de ambos os raciocínios, a partir da exploração de diferentes *situações* e de seus *invariantes*, munindo os estudantes (da EJA, bem como do ensino regular) de estratégias para resolver problemas, além de ampliar o repertório de *representações* *simbólicas* e refinar o uso das mesmas ao longo da escolarização.

Referências

AZEVEDO, J. **Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades:** é melhor no papel ou no computador? (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2013.

BARRETO, F. **O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos.** (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2012.

BATANERO, C.; GODINO, J. D.; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio**. Madrid: Síntesis, 1996.

BATISTA, R.; FRANCISCO, V. Noções probabilísticas de alunos da EJA. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 4º SIPEMAT. p. 1225-1236. **Anais...** Ilhéus, 2015.

BORBA, R. O raciocínio combinatório na Educação Básica. In: Encontro Nacional de Educação Matemática – X ENEM. **Anais...** Salvador, 2010.

BORBA, R. Antes cedo do que tarde: o aprendizado da Combinatória no início da escolarização. In: Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais – Encepai. **Anais...** Recife, 2016.

BRASIL. **Educação para jovens e adultos:** ensino fundamental: proposta curricular - 1º segmento. Brasília: MEC, 2001.

BRASIL. **Proposta Curricular para a Educação de Jovens e Adultos**: segundo segmento do ensino fundamental: 5ª a 8ª série. v. 3. MEC: Secretaria de Educação Fundamental, 2002.

BRYANT, P.; NUNES, T. Children's understanding of probability: a literature review. **Nuffield Foundation**. 2012, 86p. Disponível em: <http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf>. Acessado em 28.07.2018.

CARRAHER, T. **O método clínico usando os exames de Piaget**. 5. ed. – São Paulo: Cortez, 1998.

CAMPOS, T. M.; CARVALHO, J. I. Probabilidade nos anos iniciais da educação básica: contribuições de um programa de ensino. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – Em Teia, Recife, v. 7, n. 1, set. 2016.

FISCHBEIN, E. **The intuitive sources of probabilistic thinking in children**. Dordrecht, 1975.

GODINO, J.; BATANERO, C.; CAÑIZARES, M. J. **Azar y probabilidad**. Madrid: Síntesis, 1991.

LIMA, E.; SILVA, A. Conhecimentos matemáticos de estudantes da Educação de Jovens e Adultos: estatística, probabilidade, combinatória e porcentagem. In: Encontro Pernambucano de Educação Matemática – VII EPEM. **Anais…** Garanhuns, 2017.

LIMA, E. **Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA:** investigando relações. 2018. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2018.

LIMA, R. **O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos:** do início da escolarização até o ensino médio**.** (Dissertação: Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2010.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco:** Parâmetros Curriculares de Matemática - Educação de Jovens e Adultos. Secretaria de Educação: 2012.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. (Tese. Pós-graduação em Educação). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2009.

SANTOS, J. **A produção de significações sobre combinatória e probabilidade numa sala de aula do 6º ano do Ensino Fundamental a partir de uma prática problematizadora**. (Tese. Pós-graduação em Educação). Universidade São Francisco. Itatiba, 2015.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, p. 155-191, 1996.

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas: Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, v. 1, p.75-90, 1986.

Ewellen Tenorio de Lima: Doutoranda em Educação Matemática e Tecnológica pela Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. ewellentlima@gmail.com

Rute Elizabete de Souza Borba: Doutora em Psicologia Cognitiva pela Oxford Brookes University. Docente do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco – UFPE. resrborba@gmail.com