NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 114, julio de 2023, páginas 7-22

Una propuesta de actividad didáctica olímpica para la enseñanza del circuncentro apoyada por GeoGebra

Paulo Vitor da Silva Santiago
(Universidade Federal do Ceará. Brasil)
Francisco Régis Vieira Alves
(Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará. Brasil)

Fecha de recepción: 21 de abril de 2022
Fecha de aceptación: 09 de marzo de 2023

Resumen El objetivo de este trabajo es presentar la estructura de una propuesta didáctica olímpica dirigida a la enseñanza de un triángulo con el apoyo de GeoGebra, fundamentada en la Teoría de las Situaciones Didácticas y la Teoría de los Registros de Representación Semiótica. Dadas las dificultades de los estudiantes en Geometría Plana, buscaremos apoyo en el desarrollo de los registros dinámicos disponibles en el software GeoGebra a través de la trayectoria, la percepción y la intuición. La metodología aplicada fue la investigación cualitativa exploratoria. La aplicación se realizó de forma remota, debido a la pandemia de COVID-19, con estudiantes del 3º año de la enseñanza media de la red pública estatal en Brasil.

Palabras clave Geometría plana; Representación semiótica; Teoría de las Situaciones Didácticas; GeoGebra.

Abstract The objective of this work is to present the structure of an Olympic didactic proposition aimed at teaching the circumcenter with the support of GeoGebra, based on the Theory of Didactic Situations and the Theory of Registers of Semiotic Representation. Given the difficulties of students in Plane Geometry, we will seek support in the development of dynamic records available in the GeoGebra software through trajectory, perception and intuition. The methodology applied was qualitative exploratory research. The application was carried out remotely, due to the COVID-19 pandemic, with students from the 3rd year of high school in the state public network in Brazil.

Keywords Flat geometry; Semiotic Representation; Theory of Didactic Situations; GeoGebra.

1. Introducción

La geometría plana es un contenido que exige un cierto grado de conocimiento geométrico entre los estudiantes, y la representación de esto se puede comprobar en las bajas tasas de las evaluaciones externas, como se puede analizar en los documentos del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes — PISA para la Escuela, una de las evaluaciones más importantes a nivel mundial. Según el Instituto de Matemáticas Pura y Aplicada (2019), estos índices en Brasil en las pruebas del Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) son descritos por las secretarías de educación en forma de informes y formación docente, indicando un déficit de calidad de enseñanza en Matemáticas y Portugués.

Entre las definiciones que se encuentran en los puntos notables de un triángulo. Jesus (2018) describe: baricentro, circuncentro y ortocentro, además de los enunciados y demostraciones de algunas proposiciones, el circuncentro de un triángulo acutángulo cobra importancia para la descripción de aplicaciones y su relación directa con el punto de encuentro de las bisectrices internas.

En cuanto al objeto matemático objeto de estudio en esta investigación - el circuncentro de un triángulo acutángulo - hay lagunas en el proceso de enseñanza y aprendizaje, en el cual este contenido es presentado en el libro IV de Euclides de manera prolija, no explorado la visualización de las puntas de un triángulo, y así lo señalan autores como (Commandino, 1944; Heath, 1908; Gutierrez, 2020).

En base a este supuesto y teniendo en cuenta la relevancia que tiene el circuncentro de un triángulo acutángulo para la comprensión del estudiante de los elementos y puntos notables de un triángulo, se propone la siguiente pregunta de trabajo: ¿Cómo puede el estudiante comprender mejor el contenido del circuncentro de un triángulo usando GeoGebra, basado en una concepción de visualización y razonamiento intuitivo? Para ello se utilizó la herramienta GeoGebra por ser un software de fácil acceso y manipulación, siendo eficaz para la enseñanza de la Geometría, entre otras áreas (Arnao y Salazar, 2017; Alves, 2019; Santos et al., 2021).

En el proceso de estructuración de la situación didáctica olímpica, se utilizó como recurso tecnológico digital el software GeoGebra. Bortolossi (2016) describe que GeoGebra es un software que incluye recursos numéricos, simbólicos, gráficos y de programación en álgebra, aritmética, geometría, funciones, probabilidad y estadística.

Así, el objetivo de este trabajo fue trabajar el circuncentro de un triángulo acutángulo en una práctica de enseñanza de las matemáticas, estructurando la visualización 2D, ampliando a la vista 3D, con el apoyo del software GeoGebra, considerando los fundamentos de la Teoría de las Situaciones Didácticas y en la Teoría de los Registros Semióticos de Representación, sustentando la práctica del docente sobre su objeto de estudio.

La metodología adoptada para esta investigación es exploratoria, de carácter cualitativo, como una forma de interpretar la visualización, percepción e intuición de los estudiantes como parte de situaciones didácticas olímpicas propuestas para el aprendizaje del circuncentro de un triángulo acutángulo. Esta propuesta didáctica olímpica se lleva a con un grupo de alumnos de 16 a 18 años de secundaria, de una escuela regular del ámbito público de la ciudad de Quixeramobim - Ceará, Brasil, la cual se desarrolla en cuatro clases en virtual.

En los siguientes apartados se abordarán aspectos históricos, epistemológicos y didácticos sobre el circuncentro de un triángulo, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), como guía para la didáctica laborada; la Situación Didáctica Olímpica (SDO), basada en Problemas Olímpicos (PO) internacionales; los Registros Semióticos relacionados con GeoGebra y su importancia para el método de tus representaciones geométricas.

2. Teoría de las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas fue desarrollada por Guy Brousseau, con el objetivo de estudiar los momentos interactivos en la búsqueda del conocimiento y las relaciones entre profesor, alumno y el conocimiento matemático a trabajar en el aula. Las situaciones didácticas se utilizan para enseñar y por lo tanto abarcan todo el entorno que rodea al alumno, al docente y al sistema educativo (Brousseau, 1997).

El *milieu* constituye un ambiente donde el estudiante no deduce la intención didáctica contenida en la actividad, fue concebido por Brousseau en el estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas, en el cual el alumno interactúa adversamente, instigando, a través del pensamiento de sus acciones, para buscar soluciones a las situaciones problema propuestas por el docente.

Almouloud (2007) describe que la TSD se sustenta en tres hipótesis: (I) el estudiante aprende amoldándose a sí mismo a un *milieu* que crea obstáculos, diferencias y desacuerdos. El conocimiento, la solución de adaptación del estudiante, se demuestra a través de nuevas resoluciones que evidencian el conocimiento matemático; (II) un *milieu* sin finalidad didáctica no es considerable para promover el aprendizaje matemático del estudiante, es decir, el docente debe elaborar, estructurar un método en el que se construyan situaciones problema capaces de motivar este conocimiento en el aula.; (III) el *milieu* y los problemas deben unir los conocimientos matemáticos incluidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

La fase dialéctica descrita contribuyó como inspiración para el propósito del TSD entre el docente, el estudiante y el medio, considerando que el estudiante no observa la posibilidad de anticipar la respuesta de la actividad y, Así, se puede pensar qué método para tal anticipación de la resolución se puede utilizar, el docente no debe intervenir en este momento del problema propuesto, es decir, hay algo que analizar y aprender (Brousseau, 1988). Alves (2016), la acción preliminar se lleva a cabo por un grupo de estudiantes que comprometen el problema para llegar a una solución.

En el segundo momento, el estudiante "[...] encuentra casos intermedios, donde no se evidencia la condena [...]" (Brousseau, 1988). Siguiendo este contexto, el grupo de estudiantes manifiesta una nueva postura sobre el pensamiento matemático para su resolución de problemas, teniendo lugar el análisis del cálculo o razonamiento matemático.

Así, al final de la actividad, el docente dice cuál es el tema que se aborda en la pregunta, para que cada miembro del grupo de estudiantes aprenda a tener una respuesta segura, "[…] para que la clase determine, sin siendo lo que enseña el profesor, e indica el método que se puede aplicar [...]" (Brousseau, 1988), los estudiantes pueden traer reintentos para aprovechar las ideas de otros compañeros de clase si son aceptables.

Los momentos descritos anteriormente muestran diferentes situaciones de actuación de los estudiantes en un contexto de resolución con temas de la olimpiada internacional. Frente a la relación del estudiante (o estudiantes) con esta multiplicidad de uso del conocimiento matemático y el cuestionamiento del docente, Brousseau creó una tipología de situaciones didácticas, observando los principales momentos de interacción de las actividades desarrolladas en el aprendizaje de las Matemáticas. Alves (2016), dividiéndose en cuatro fases (acción, formulación, validación e institucionalización).

El trabajo consiste en desarrollar un PO de una secuencia didáctica olímpica que permita la inserción, en el aula, con el apoyo de GeoGebra en la transposición didáctica, es decir, en la configuración de la situación para que todos los estudiantes actúen de manera interactiva. Esta propuesta metodológica enfocada en el contexto de la Olimpiada Matemáticas Internacional, de un PO internacional, basado en las etapas dialécticas de la TSD, que se denomina SDO (Santos y Alves, 2017).

Situación dialéctica de acción: en esta fase, el estudiante observa el problema, toma su propia decisión y, al final de algunos momentos interactivos, analiza el resultado encontrado en la situación problema. En el transcurso de las preguntas incluidas en la actividad, se desarrollan nuevas estrategias para la toma de decisiones (intuitiva) del grupo/individuo.

Situación dialéctica de formulación: en este momento, el sujeto recupera conocimientos para corresponder a la actividad propuesta. La formulación requiere que el sujeto se reúna con otro miembro del grupo, con quien debe discutir información sobre los temas. Los interlocutores realizan la comunicación del contenido para determinar el control de un medio externo con el fin de descubrir una formulación idónea para las preguntas.

Situación dialéctica de validación: en esta etapa, los estudiantes elaboran las descripciones en demostraciones y escriben qué teorías se pueden utilizar para resolver los problemas propuestos.

Situación dialéctica de institucionalización: el profesor ahora retoma la situación, demostrando qué conocimientos obtenidos en las etapas anteriores son importantes para construir el conocimiento conquistado, informando el teorema y/o propiedad propuesta en la situación didáctica, permitir que la clase comprenda las soluciones de cada pregunta.

Gutierrez (2020), informa que la formación docente debe destacarse por el cambio del docente naturalmente en un sentido similar a la necesidad de incluir nuevos métodos de enseñanza para involucrar a los estudiantes en sus dificultades de aprendizaje y errores conceptuales, con el fin de despertar el interés en la clase. Así, la situación didáctica olímpica se entiende como algo en lo que prima la dialéctica de la superación y el contexto.

En el siguiente tema se describe la SDO y sus fundamentos desarrollados por varios autores que trabajan con problemas matemáticos olímpicos.

3. Situaciones Didácticas Olímpicas

Una situación didáctica olímpica, según Alves (2021), se utiliza como metodología de enseñanza, trayendo a un ambiente de aula interactiva momentos característicos de ejercicios relacionados con la investigación matemática, incluidos en la preparación de olimpíadas matemáticas nacionales o internacionales. De esta manera, se adapta el problema olímpico, con la ayuda del software GeoGebra, para brindar más interacción a los estudiantes y, como resultado, se produce un mejor aprendizaje centrado en las matemáticas olímpicas.

Desde esta perspectiva, esta metodología surge de una ecuación característica, SDO = PO + TSD, en la que los problemas olímpicos son preguntas extraídas de la Olimpiada Matemática Internacional, y se adopta la Teoría de Situaciones Didácticas como teoría de la enseñanza que permite al docente sistematizar accesos y barreras que los estudiantes pueden enfrentar, a través de una conjetura/construcción. Así, debe basarse en las fases de acción, formulación, validación e institucionalización, en el momento del desarrollo de las situaciones didácticas olímpicas, permitiendo al educador tener un mejor control sobre los procedimientos realizados por los alumnos (Alves, 2021).

En las obras de Santos y Alves (2017), Silva et al. (2021), Santiago (2021) y Alves (2021), se aplica SDO como propuesta didáctica para que los docentes construyan en el aula en la disciplina matemáticas, mediante la inserción de PO, así como también lo utilizan en la preparación de la

Olimpiada Internacional de Matemáticas (OMI). Con base en los estudios de Silva, Alves y Menezes (2021, p. 384), cuya investigación evidenció la enseñanza de estos temas olímpicos a través de una secuencia didáctica frente a las hipótesis de la TSD, se entiende "[…] la dinamización y visualización de la figura presentada en la situación problema, lo que proporciona una mayor exploración de las propiedades matemáticas". Santiago (2021), describe que la Situación Didáctica Olímpica se inicia "con la intención de enseñar no hablando directamente de la solución, sino que el docente organice un camino para que el alumno construya su conocimiento matemático".

Además, se estructuró con base en el trabajo de Santos y Alves (2017, p. 145), quienes mencionan a TSD como una oportunidad para construir "[...] un ambiente que fomente la investigación en matemáticas de tal manera que los estudiantes puedan reproducir, aunque sea de manera elemental [...]", el proceso similar al de un matemático en el desarrollo de sus hipótesis.

En la investigación desarrollada por Alves (2021, p. 133), se mostraron dos SDO para diferenciar los métodos tradicionales comunes utilizados en el trabajo del docente en esta Olimpiada internacional, así como en el ambiente del aula. De esta manera, el autor destaca el papel del docente, "[...] para que el grupo de estudiantes comprenda los conceptos matemáticos científicos de interés y con teoría matemática formal que los rige, como consecuencia del juego formal y la elección de una estrategia victorioso". En conjunto, los artículos mencionados anteriormente cuentan con el software GeoGebra como soporte tecnológico, lo que les permitió observar, construir las figuras y actuar como herramienta digital para la comprensión de nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Las preguntas de este artículo se basarán en Problemas Olímpicos (PO), que, según Santos y Alves (2017), son situaciones problema trabajadas en torneos de matemáticas, en los que participan estudiantes de matemáticas. La llamada Situación Didáctica Olímpica (ODS) permea los estadios dialécticos de la Teoría de las Situaciones Didácticas con los Problemas Olímpicos que, según Santos y Alves (2017), son aplicaciones determinadas entre el estudiante o grupo de estudiantes, un medio (matemático conocimiento de las Olimpiadas) y un sistema educativo destinado a mejorar el conocimiento de los estudiantes para las competiciones y problemas de matemáticas olímpicas.

En ese sentido, el profesor observa las cuestiones que se incluyen en este contexto olímpico para que se organicen las investigaciones y los estudios y se brinde control sobre las acciones de los estudiantes, analizando en qué momento puede ocurrir el desarrollo del aprendizaje. Esta estructuración de la Situación Didáctica Olímpica permite mejorar su formación y adaptar su planificación.

GeoGebra se utiliza como soporte tecnológico digital para unir la Teoría de Situaciones Didácticas, a través del contacto, visualización y movimiento de las figuras, promoviendo métodos de aprendizaje para el estudiante y también para la comprensión de nuevas estrategias para problemas matemáticos olímpicos, confrontándose en aprobación de la resolución de la Situación Didáctica Olímpica.

En esta perspectiva, se pretende explorar el problema propuesto desde la Teoría de las Situaciones Didácticas, vinculado a los Registros Dinámicos de Representación Semiótica, presentado en el siguiente tema.

4. Registros Dinámicos de Representación Semiótica y GeoGebra

La geometría euclidiana es la parte de las matemáticas que se centra en objetos idealizados. Así, existen objetos geométricos, trabajados en la educación básica, como las siguientes formas geométricas:

triángulo, cuadrado, círculos, esferas son idealizaciones de formas físicas que existen en la vida cotidiana. Comprender las teorías axiomáticas es comprender el significado y la necesidad de los argumentos. Fischbein (1993), la comprensión del significado de los objetos, se estructura sobre un razonamiento deductivo hipotético, un sentido de coherencia y consistencia, competencia en el pensamiento proposicional independiente de las restricciones prácticas en el aula.

Volviendo a la cuestión específica de la teoría de los registros de representación semiótica, tiene que colaborar en la comprensión del desarrollo de la construcción del pensamiento geométrico. Duval (2006) introduce el concepto de registro de representaciones para explicar cómo los sistemas de representación, además de transmitir conocimientos matemáticos, pueden ser herramientas que ayuden en la creación y desarrollo de nuevas ideas y conceptos. En este sentido, se identificaron cuatro tipos de registros: lenguaje natural; sistema de escritura de números, álgebra y símbolos, figuras y gráficos. Describe el papel de los registros de representación en el proceso de comprensión y generación de ideas matemáticas a través del concepto de transformación, clasificados en dos tipos: a) procesamiento es la transformación de una representación simbólica en otra, registrada en el mismo tipo (por ejemplo, registro Imagen); b) la conversión es una transformación entre representaciones simbólicas pertenecientes a registros de diferente naturaleza (por ejemplo, registros de lenguaje natural y dibujo).

Al aprender geometría, es necesario registrarse en lenguaje natural y/o registrar símbolos y dibujos. Al introducir el concepto de conceptos de imagen (en cursiva), Fischbein (1993) muestra la relevancia de la estrecha relación entre estos dos registros. El concepto de imagen (en cursiva) tiene dos componentes: un concepto y una figura. El componente conceptual presenta lenguajes naturales y/o simbólicos, caracteriza cierta clase idealizadora (por ejemplo, la definición de un cuadrado). Los componentes de la imagen, por otro lado, son visuales (forma, posición, tamaño) y se expresan a través del diseño geométrico (por ejemplo, diseño cuadrado). Identificar las relaciones entre los elementos geométricos es la esencia de la geometría - por eso las demostraciones que tratan de teoremas la explican - y, para ello, cobra importancia una adecuada simbiosis entre los componentes conceptuales y figurativos, lo cual es importante para los estudiantes.

Nuestra experiencia con estudiantes de tercer año de secundaria que realizan entrenamiento matemático olímpico muestra que no es natural que los principiantes aprovechen el dinamismo de los registros dinámicos. Ante la presencia de figuras dinámicas, su actuación inicial es como una imagen estática dibujada sobre papel; por lo tanto, incluso utilizando el movimiento de puntos, todavía no pueden simplemente identificar la relación entre los elementos que componen la figura dinámica, identificar el tipo dinámico en las propiedades de las figuras reveladas.

GeoGebra ofrece una variedad de conjuntos de herramientas, que incluyen línea perpendicular, línea paralela, bisectriz, cónica de cinco puntos, así como muchos comandos que se pueden incorporar a su base de conocimientos a través de la función de herramienta de creación. Es necesario analizar otras propiedades del software para realmente tener una alternativa que responda al problema del trabajo realizado anteriormente. La primera característica es la disponibilidad de representación simbólica, conocidas en la literatura como figuras dinámicas (LABORDE; CAPPONI, 1994). De esta forma, la construcción sucede con los desplazamientos a los elementos iniciales (generalmente puntos), el dibujo en la pantalla de la computadora -figura representativa de la construcción- se transforma con algunos comandos, y mantiene las relaciones geométricas impuestas a la construcción con el relaciones resultantes de la imagen y la cuestión olímpica.

De lo descrito en este tema, este estudio se basa en la relación de los registros dinámicos, la geometría plana y el dinamismo de la geometría que se puede utilizar para descubrir una relación en la enseñanza del circuncentro, para construir modelos matemáticos adecuados para su evolución cognitiva del pensamiento geométrico. El siguiente tema describe la forma práctica y el desarrollo de la propuesta didáctica olímpica internacional.

5. Metodología

Para esta investigación se adoptó una metodología de investigación exploratoria, basada en un estudio de caso, observando los experimentos aplicados y aportando datos relevantes que permitan las hipótesis planteadas. En el estudio de caso, el investigador necesita ser neutral y ético, o sea, utilizar la comprensión en lugar de la emoción, evaluando los resultados recogidos en el estudio de forma cohesionada con los presupuestos teóricos, dentro de los estándares metodológicos y objetivos definidos en la investigación (Gil, 2007).

La investigación se realizó con un grupo de dieciocho estudiantes, con edades comprendidas entre 16 y 18 años, de una institución de educación pública regular de la ciudad de Quixeramobim - CE. La aplicación se desarrolla en clases virtuales, en las que se invita a los estudiantes a participar de un momento experimental utilizando el software de geometría dinámica GeoGebra. Los encuentros se desarrollan en el formato remoto, debido al escenario de la pandemia del nuevo coronavirus (COVID-19), utilizando la plataforma educativa Google *Meet*.

Específicamente en lo que respecta a la Etapa 1: estudio histórico de los puntos notables de cualquier triángulo, su aplicación actual en Matemáticas (control para uso metodológico y didáctico en el aula), barreras relacionadas con los conceptos dentro del circuncentro.

Etapa 2: se destaca la importancia de analizar los libros de texto. Un análisis del libro "Euclides – Os Elementos" debe incluir: la historia del notable punto circuncentro; los obstáculos metodológicos y epistemológicos identificables en el abordaje de los autores (Bicudo, 2009), anticipando las posibles acciones de los estudiantes (dimensión cognitiva), a partir de la propuesta didáctica.

Así, no hay descripción de los trabajos de inspección en profundidad de libros específicos sobre el circuncentro (Barbosa, 2004; Dolce y Pompeo, 2005; Muniz Neto, 2012; Machado, 2012; Papa Neto, 2017), que abordan el tema de interés de esta investigación. Sin embargo, se destacan los presupuestos del trabajo titulado "Euclides – Os Elementos", que explora las definiciones, postulados y nociones/axiomas comunes referentes a la geometría euclidiana (Bicudo, 2009).

Así, a la vista de las preguntas anteriores y del objetivo de la investigación, se enumeran las siguientes hipótesis de investigación: (i) las visualizaciones 2D y 3D pueden ofrecer alternativas para la solución de determinadas cuestiones en el circuncentro y evitar un tratamiento muy analítico y muy metodológico de conceptos relacionados con la investigación; (ii) la tecnología del software GeoGebra proporciona una comprensión de las relaciones que involucran los puntos notables del triángulo acutángulo vinculado al circuncentro, con apoyo en la visualización y el movimiento de la figura frente al conocimiento.

5.1. Aplicación de la situación didáctica olímpica

El uso de las Tecnologías Digitales como herramienta para las clases de Matemáticas es un método que se diferencia del tradicional resumido en lápiz y papel o del uso de este soporte solo para la investigación. Las diversas posibilidades de las prácticas tecnológicas pueden ser incluidas para los estudios, en función de la exposición del objeto matemático construido por el docente en la estructuración y observación de las teorías, llevando a los estudiantes a construir sus estrategias hasta el punto de desarrollar hipótesis (Borba y Penteado, 2012).

El problema seleccionado es una pregunta extraída de la evaluación de la OMI realizada en 2006, este OP debe abordar conceptos como el circuncentro de un triángulo acutángulo y las relaciones entre triángulo y circunferencia. A continuación, se presentará la pregunta 1 con el tema de la geometría, tomada de la prueba OMI y, luego, se transpondrá el problema en GeoGebra.

Pregunta 1: (OMI/2006) - Sea ABC un triángulo con incentro I. Un punto P dentro del triángulo verifica: $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$. Demostrar que $AP \geq AI$, con igualdad si y solo si, $P = I$ (OMI, 2022).

La competencia se llevó a cabo en Eslovenia, Ljubljana, un problema propuesto por la delegación de Corea del Sur (Corea).

En esta etapa, se observa el *QR Code* (Figura 1), que demuestra, en la aplicación del dispositivo móvil, la construcción del Problema Olímpico (PO) para los estudiantes.

Figura 1. Acceso mediante *QR Code* para móvil o *tablet*. Fuente: elaborado por los autores

La construcción (Figura 2) muestra la imagen del Problema Olímpico para que los estudiantes tengan una noción de cómo estructurar en el software GeoGebra, esta construcción está disponible en la plataforma virtual o en el acceso al programa descargado directamente a las computadoras y el cual es accesible a cualquier sistema operativo por el código de la Figura 1.

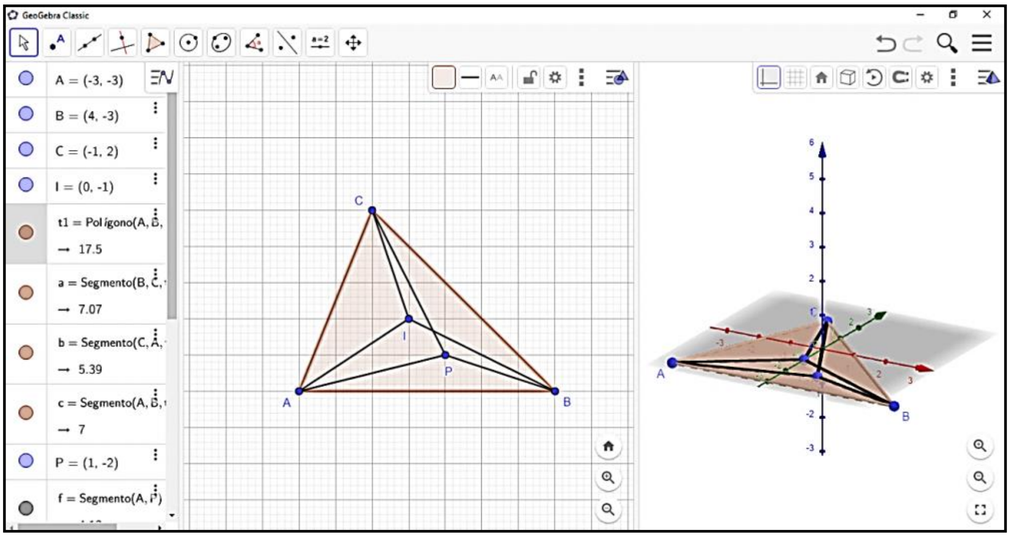

Figura 2. SDO seleccionado para vista de estudiante. Fuente: elaborado por los autores

En la situación dialéctica de la acción, se espera que los estudiantes evalúen el contexto del problema y ajusten, si es necesario, el SDO al software GeoGebra, sin la intervención del docente. Almouloud (2007), las discusiones grupales se centran en la decisión de cada miembro. Con este cuestionamiento se espera que los estudiantes interpreten el problema para buscar contenidos anteriores, caracterizando la condición de conectar los puntos (ABC) del triángulo al punto P visualizado en la Figura 3 y teniendo como elemento el punto I.

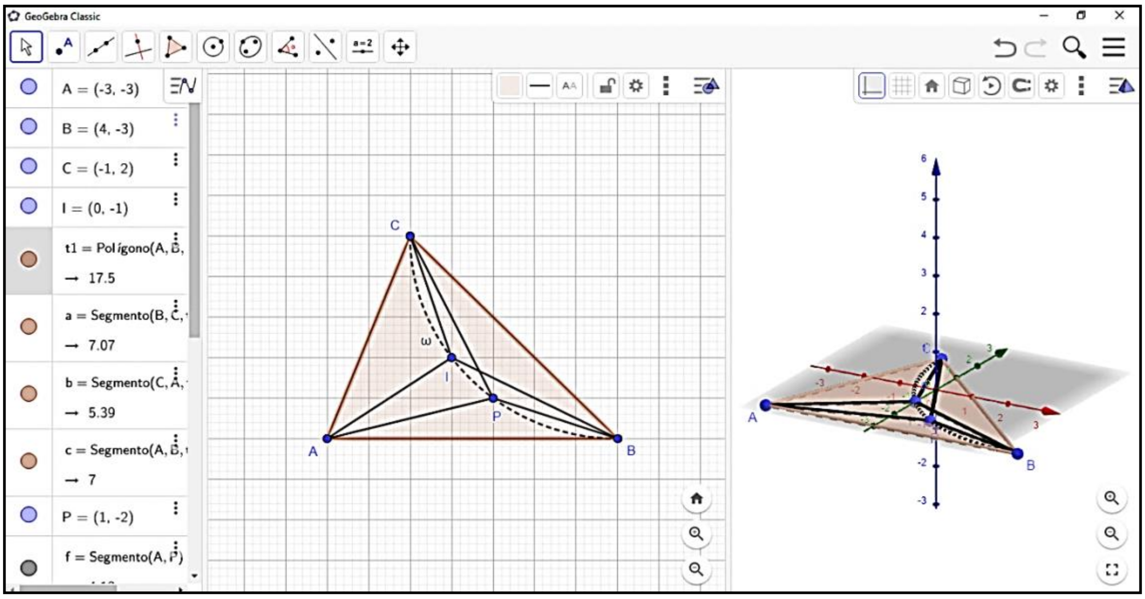

Figura 3. Primer paso esperado por el alumno en el software GeoGebra. Fuente: elaborado por los autores

La información extraída del enunciado de la pregunta reitera algunos datos sobre el problema propuesto, son: los ángulos formados por $\angle IBP = \angle IBC - \angle PBC = \frac{1}{2}\ \angle ABC - \angle PBC = \frac{1}{2}(\angle PCB - \angle PCA)$ y, de la misma manera, $\angle ICP = \angle PCB - \angle ICB = \angle PCB - \frac{1}{2}\ \angle ACB = \frac{1}{2}(\angle PBA - \angle PBC)$, como se ilustra en la imagen anterior.

La situación de la dialéctica de la formulación "[...] proporcionar al estudiante condiciones para que construya progresivamente un lenguaje comprensible para todos" (Almouloud, 2007, p. 38). En esta etapa, por tanto, se identifican las variables a partir de la descripción del problema, y los alumnos llegan a la conclusión del circuncentro (punto de intersección de las mediatrices) del triángulo ΔABC, hallar un ángulo interior de 180°, llamado centro de la circunferencia circunscrita.

Desde esta perspectiva, los estudiantes describen que $\angle PBA + \angle PCA - \angle PBC + \angle PCB$, conectando los puntos $\angle PBA - \angle PBC = \angle PCB - \angle PCA$. Luego de las descripciones (1) y (2) se desarrollan los siguientes puntos $\angle IBP = \angle ICP$, por lo tanto, B, I, P, C están conectados y estructurados por los ángulos.

En la dialéctica de validación, el estudiante mostrará en la pizarra la estrategia que lo llevó a la solución final. Según Almouloud (2007, p. 39), "[...] el aprendiz debe demostrar la validez del modelo creado, transmitiendo el mensaje matemático [...]". La explicación esperada por el alumno es que el área del triángulo (ABC) se divide por el incentro conectado a los puntos A, B y C.

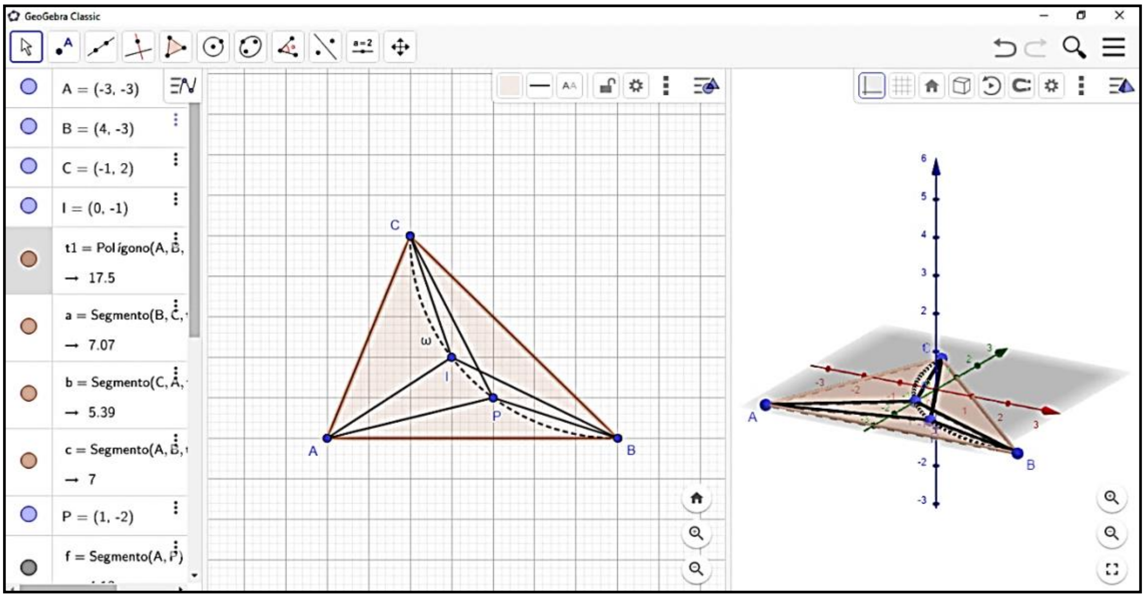

Figura 4. Circuncentro en la circunferencia de la situación didáctica. Fuente: elaborado por los autores

De esta forma se observa el radio AI, encontrando la circunferencia de ΔABC transcrita en el punto M. Entonces, los puntos AP + MP ≥ AM = AI + IM volver a ser MI = MP y, al final de la pregunta, está la solución de las líneas AP ≥ AI.

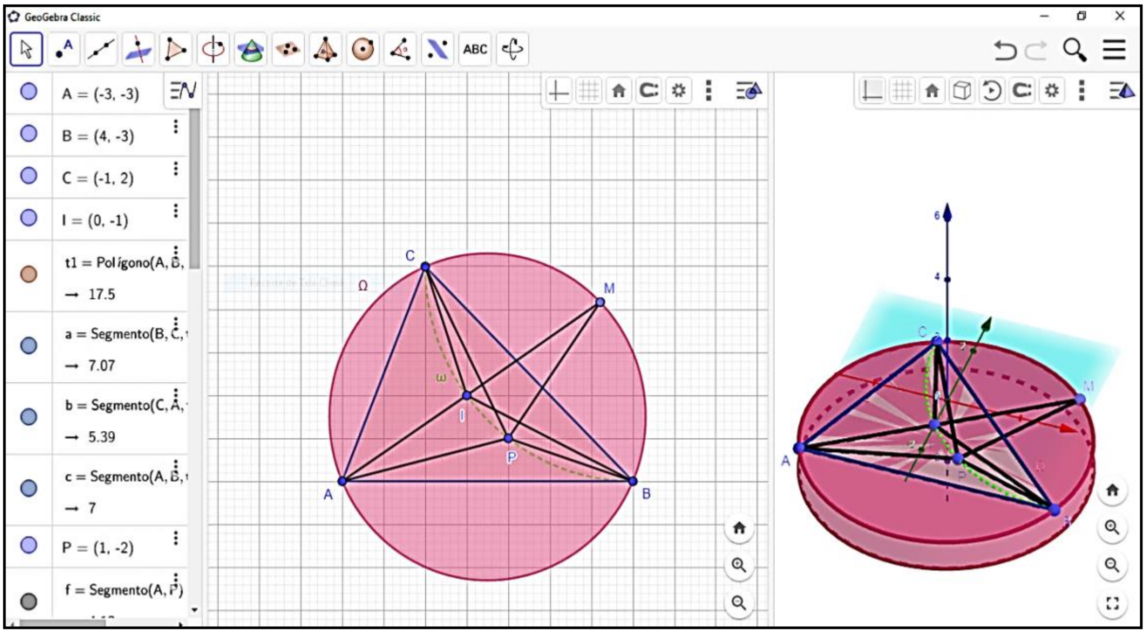

Figura 5. Solución final SDO. Fuente: elaborado por los autores

De esta forma, el alumno llega a la resolución final del problema presentado en el pizarrón con las posibles justificaciones que concluyó su razonamiento matemático. GeoGebra se vuelve útil para llegar al resultado de la pregunta. Dados los supuestos en la dialéctica de la formulación, los estudiantes observan que las rectas AP > AI, siendo con el segmento de recta AI, que ocurre en los puntos P está lejos de I.

En la última dialéctica de TSD, etapa de institucionalización, el docente interactúa y valida el problema, explicando lo cognitivo del conocimiento adquirido por los estudiantes, aunque todavía no tiene el estatus de conocimiento social de la solución (Almouloud, 2007). En este caso, el profesor se justifica, describiendo que las bisectrices de un triángulo se interconectan en un solo punto equidistante de sus vértices.

En vista de ello, se espera que los alumnos perciban, a partir de la resolución de este PO, el uso de los conceptos de geometría plana abordados para otras cuestiones futuras. Además, se pretende que los futuros docentes estimulen a sus alumnos, brindándoles un aprendizaje significativo a partir de las discusiones con su clase/grupo. GeoGebra posibilita trabajar con geometría dinámica en el aula y tener ese momento de observación de la figura incorporado en el problema propuesto por el docente, llevándolo a utilizar más tecnología digital en su planificación escolar.

Estas preguntas presentadas en las evaluaciones de OMI requieren un nivel significativo de conocimiento por parte del estudiante, por lo que se eligen pocas para representar el país de origen. De esta forma, se prioriza poner a disposición métodos e instrumentos tecnológicos que brinden al docente una forma de insertarlos en el aula. Al respecto, Alves (2021) destaca la difusión de la cultura matemática trabajada en competencias internacionales y nacionales como un componente esencial para los competidores y participantes de estas competencias.

De la misma forma, SDO, con el apoyo tecnológico del software GeoGebra, contribuye a la estructuración de las figuras abordadas en las preguntas OMI, permitiendo a los docentes la elección de su planificación diaria para que, en consecuencia, puedan utilizarlas para la enseñanza de geometría plana en el contexto del aula, motivando así la interacción y el aprendizaje de los estudiantes.

La aplicación fue seleccionada desde una perspectiva de desarrollo del rol del profesor de Matemáticas. Así, las clases fueron diseñadas para los estudiantes participantes de las Olimpiadas en línea con la planificación pedagógica del profesor de matemáticas, incluyendo tareas relacionadas con la enseñanza y el pensamiento.

La recolección de datos se llevó a cabo en cuatro reuniones virtuales. Para cada clase, los estudiantes tuvieron acceso a actividades que describían la geometría plana usando los puntos del circuncentro. Además, se realizaron debates a través de la aplicación de mensajería sobre la estructura de actividades. De esta forma, el trabajo contó con la participación de cuatro estudiantes del 3° año de bachillerato de un colegio del interior, en la asignatura Matemáticas, desarrollado en cuatro encuentros a distancia, debido al escenario de la pandemia del COVID-19 que se presentó alrededor el mundo.

Los sujetos fueron nombrados por S1, S2, S3 y S4 (sujeto1, sujeto2, sujeto3 y sujeto4), para asegurar sus identidades. Las siguientes son características descritas por los estudiantes a través de un formulario virtual sobre el año en que están matriculados en la escuela secundaria y los conceptos básicos con el software GeoGebra.

Las reuniones virtuales se realizaron en cuatro días diferentes, del 18/01/2021 al 20/02/2021, divididos en 1 h/a remota, más 2 h/a de seguimiento semanal el día de la reunión remota, totalizando un total de 12 h/a. El cronograma desarrollado durante el período de experimentación de SDO a través de una plataforma virtual de conferencias *web*.

En la etapa de formulación tiene lugar el intercambio de información entre los estudiantes. Así, hay un discurso entre los participantes, en la búsqueda de una solución al problema propuesto por el docente en un aula a distancia.

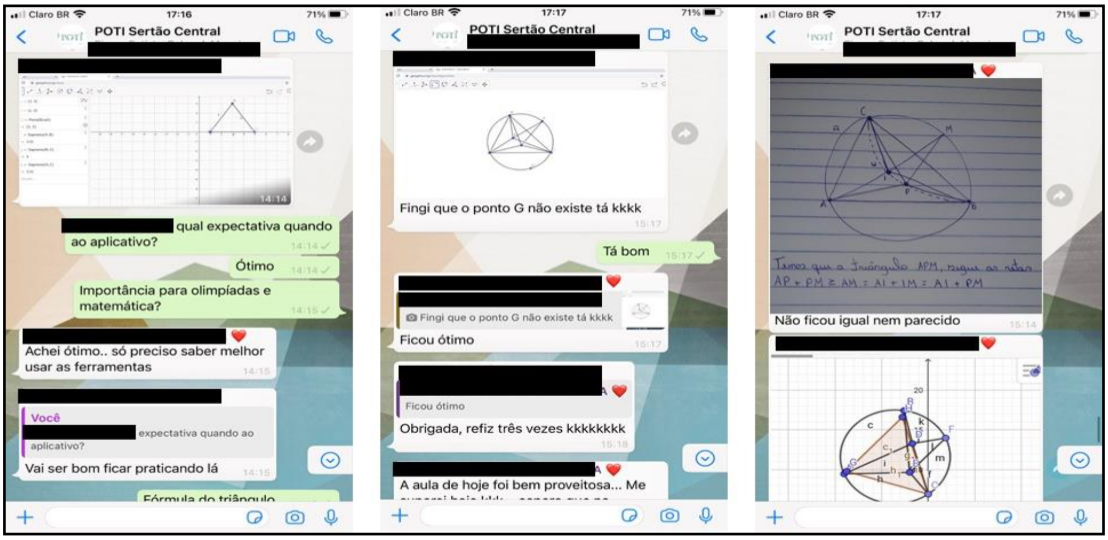

Figura 6. Formulación de la situación didáctica olímpica internacional. Fuente: elaborado por los autores

6. Resultados y Discusión

Ante esto, se planteó la siguiente pregunta al grupo de estudiantes: ¿cuál es la relevancia de estas construcciones en el software GeoGebra para las olimpiadas de matemáticas? Con el propósito relacionado con la primera estructuración de la figura del objeto geométrico, sigue la descripción del audio, puesto a disposición por el estudiante S3 en la aplicación de mensajes virtuales, en un intento de encontrar nuevas estrategias para resolver el problema.

> "El software GeoGebra, puesto a disposición por el docente durante sus clases de matemáticas a distancia, proporcionó un mejor aprendizaje en la resolución de problemas OMI, una construcción que tenía la capacidad de visualizar las formas geométricas en 2D y 3D e interactuar con la dinámica de la actividad. De momento comencé a colocar los puntos y segmentos sin medidas exactas, encontré algunas dificultades al principio, pero luego logré acercarme lo más posible a la estructuración visualizada por el profesor, así que traté de mejorar en los procedimientos hasta llegar a el resultado de la tarea" (Alumno 3).

Luego, dos estudiantes desarrollaron un modelo matemático con lápiz, bolígrafo y papel, realizando un registro geométrico y formularon la respuesta de la PO. Por lo tanto, se puede informar que la información, el conocimiento pragmático y cognitivo entre los estudiantes fueron bien explicados en el Figura 7.

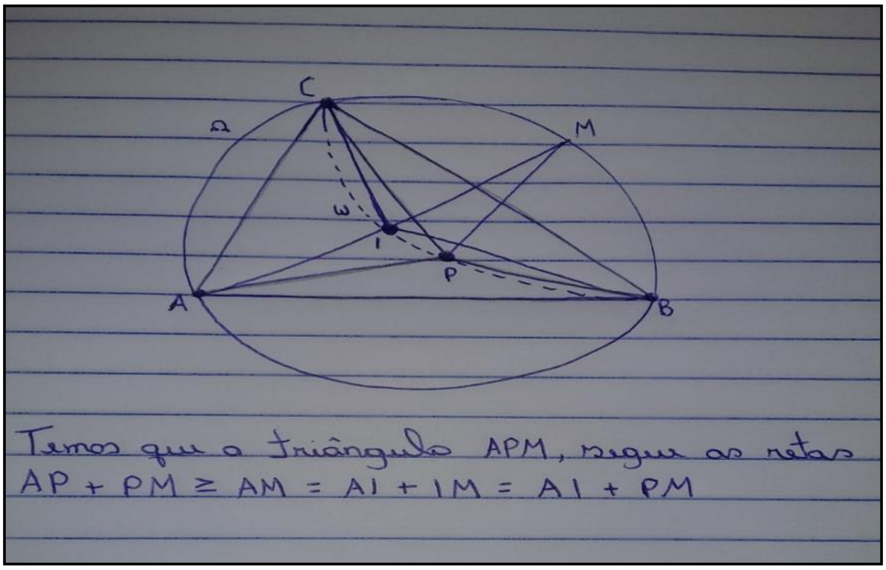

Figura 7. Modelo geométrico de la situación didáctica olímpica. Fuente: elaborado por los autores

Finalmente, en el siguiente tema, los estudiantes respondieron un cuestionario virtual con preguntas dirigidas sobre la situación didáctica olímpica internacional y sus principales dudas encontradas durante los encuentros virtuales, así como la mejora de la práctica y relación con las construcciones del circuncentro de un triángulo acutángulo en las visualizaciones dinámicas 2D y 3D.

En vista de la producción de los alumnos, esta etapa fue sometida a un análisis, a partir de la información vista durante el desarrollo del problema olímpico, en el que se destacan algunos puntos importantes para este análisis. En primer lugar, se solicitó a los alumnos que cumplimentaran el cuestionario virtual disponible en la aplicación de mensajería virtual, que contenía tres preguntas:

P1- ¿Ha aprendido algo que considere pertinente al usar el software GeoGebra?
P2 - ¿Ha crecido su interés en el tema a raíz del curso de resolución de Situaciones Didácticas Olímpicas (SDO)?
P3 - ¿Se prepararon bien los materiales del curso y se transmitieron cuidadosamente a la comprensión de las herramientas de software de GeoGebra?

La respuesta referente a la pregunta 1, donde uno de los estudiantes describe para el docente que pudo comprender mejor los contenidos de geometría plana utilizando el software GeoGebra, ya que cuentan con varios comandos haciendo que las clases sean cada vez más atractivas y fáciles de entender.

En la pregunta 2, los estudiantes describen que GeoGebra influyó mucho en el aprendizaje, especialmente para resolver preguntas dinámicas, además de tener varias vistas gráficas que mejoran la interpretación de las preguntas.

Finalmente, en la respuesta a la pregunta 3, los estudiantes informaron sobre el material utilizado en las clases a distancia, el cual fue pasado a la plataforma virtual para su *download*, siguiendo con la lectura y luego con el código de construcción para visualizar los comandos y tener un norte en el modelado de objetos geométricos.

Aún frente a las dificultades de acceso a internet encontradas durante los encuentros, es claro que los estudiantes lograron comprender la situación didáctica propuesta por el docente, resolviendo el problema junto con el conocimiento adquirido del concepto de circuncentro de un triángulo acutángulo, así como el uso de algunas herramientas de GeoGebra, siendo interactivo en todas las clases a distancia y generando importancia para la asignatura.

Fischbein (1993), la situación didáctica propuesta permite verificar la dimensión intuitiva, que se describe principalmente a la dinámica de la aceptación subjetiva de nuevas ideas, que también es dirigida por los estudiantes que estudian con el apoyo de GeoGebra.

Al concluir que los puntos notables del triángulo acutángulo, con los puntos conectados al circuncentro de la circunferencia, también eran iguales a cualquier triángulo, los estudiantes lograron alcanzar el objetivo de la propuesta didáctica olímpica. Así, la búsqueda de una resolución genera un resultado satisfactorio, proporcionando la estructuración de la construcción geométrica.

7. Consideraciones finales

Este trabajo tuvo como objetivo mostrar el desarrollo de una Situación Didáctica Olímpica internacional con abordaje en el circuncentro de un triángulo acutángulo y exploración visual en formato 2D y 3D, utilizando los presupuestos de la Teoría de Situaciones Didácticas, con énfasis en la Teoría de Registros de Representación Semiótica, teniendo como herramienta tecnológica el software GeoGebra para la modificación y construcción del Problema Olímpico, como recurso que brindará un nivel de aprendizaje a los estudiantes, a través de los comandos y visualización de la figura, brindando una mirada amplia del Situación Didáctica Olímpica.

La situación didáctica, bajo los presupuestos de la Teoría de las Situaciones Didácticas, permite al docente controlar los caminos que los estudiantes pueden encontrar en la solución del problema, utilizando los medios e intervenciones, que forma y cualifica su mediación, principalmente en el contexto de la internacionalidad olimpiadas matemáticas, ya que las situaciones problema requieren conocimiento y permiten varios caminos para llegar a la solución final.

Por otro lado, con la teoría didáctica incluida en el artículo y la ayuda del software GeoGebra, se espera que los estudiantes comprendan la propiedad trabajada en SDO, pudiendo utilizarla para futuras actividades en el aula y, en consecuencia, construir aprendizajes a través de la dinámica del programa. Además, utilizar en el aula como un medio optativo que se diferencia de la forma tradicional de estudio, en la que el docente puede demostrar conocimientos, no fomentando la comunicación al estudiante.

Dicho esto, se apunta, en la situación didáctica olímpica discutida anteriormente, la inserción de estas herramientas tecnológicas junto con el cambio metodológico del docente. De hecho, considerando la falta de instrucción específica para el desarrollo de tareas que tengan como objetivo utilizar preguntas de los torneos olímpicos de matemáticas en el aula, la falta de computadoras en las instituciones educativas (laboratorio de computación educativa), la falta de tiempo en la planificación escolar de los docentes y la transposición didáctica de estos temas olímpicos al recurso tecnológico GeoGebra.

Finalmente, la situación didáctica internacional puede ser aplicada por los profesores de matemáticas tanto en la formación para las olimpiadas nacionales e internacionales como para la enseñanza en el aula. Asimismo, se espera que este trabajo sirva como herramienta pedagógica y metodológica y, en consecuencia, lleve a más docentes a utilizar las situaciones problema de la Olimpiada Internacional de Matemáticas y otras competencias.

Agradecimiento

Agradecemos el apoyo financiero otorgado por el Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico - CNPq para el desarrollo de esta investigación en Brasil.

Bibliografía

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática.* São Paulo: Editora UFPR.

Alves, F. R. V. (2016). Teoria das Situações Didáticas (TSD): sobre o ensino de pontos extremantes de funções com arrimo da tecnologia. *Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco,* 5(2), 59-68. Recuperado el 23 de marzo de 2022, de: https://ojs2.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/view/376/474.

Alves, F. R. V. (2019). Visualizing the Olympic Didactic Situation (ODS): teaching mathematics with support of the GeoGebra software. *Acta Didactica Napocensia,* 12(2), 97-116. doi: https://doi.org/10.24193/adn.12.2.8.

Alves, F. R. V. (2021). Situação Didática Olímpica (SDO): aplicações da teoria das situações didáticas para o ensino de olimpíadas. *Revista Contexto e Educação,* 36(113), 116-142. doi: https://doi.org/10.21527/2179-1309.2021.113.116-142.

Arnao, M. S. P. y Salazar, J. V. F. (2017). Génesis instrumental del circuncentro con el uso del GeoGebra. *Revista Produção Discente em Educação Matemática,* 6(1), 70-84. Recuperado el 25 de marzo de 2022, de: https://revistas.pucsp.br/pdemat/article/view/32569.

Barbosa, J. L. M. (2004). *Geometria euclidiana plana.* Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM.

Bicudo, I. (2009). *EUCLIDES - Os Elementos.* Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP.

Borba, M. C. y Penteado, M. G. (2012). *Informática e Educação Matemática.* Coleção Tendências em Educação Matemática. 5 ed. Belo Horizonte.

Bortolossi, H. J. (2016). O Uso do Software gratuito GeoGebra no Ensino e na Aprendizagem de Estatística e Probabilidade. *VIDYA,* 36(2), 429-440. Recuperado el 22 de marzo de 2022, de: https://periodicos.ufn.edu.br/index.php/VIDYA/article/view/1804/1749.

Brousseau, G. (1988). Le contrat didactique: le milieu. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 9(3), 309-337.

Brousseau, G. (1977). *La théorie des situations didactiques Le cours de Montréal.* Recuperado el 23 de marzo de 2022, de: http://guy-brousseau.com/1694/la-theorie-des-situations-didactiques-le-cours-de-montreal-1997/.

Commandino, F. (1944). *Euclides – Elementos de Geometria.* Edição revisada e ampliada. São Paulo: Cultura.

Dolce, O. y Pompeo, J. N. (2005). *Fundamentos de Matemática Elementar:* Geometria Plana, 9. 8 ed. São Paulo: Editora Atual.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problemas of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics,* 61, 103-131. doi: https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24(2), 139-162. Recuperado el 05 de noviembre de 2021, de: http://www.jstor.org/stable/3482943.

Gil, A. C. (2007). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.* 5 ed. São Paulo: Atlas.

Gutierrez, A. J (2020). GeoGebra: ensinando didática para explicar habilidades geométricas em Educação midiática. *Números. Revista de Didática da Matemática*, 105, 165-188.

Heath, T. L. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements.* 2ª ed., v. 2. Cambridge: Cambriedge University, 424 p. Traduzido a partir do texto original de Heiberg. Recuperado el 23 de marzo de 2022, de: https://www.wilbourhall.org/pdfs/heath/2_euclid_heath_2nd_ed.pdf.

OMI. (2022). *International Mathematical Olympiad.* OMI. Recuperado el 22 de marzo de 2022, de: http://www.imo-official.org/default.aspx.

Instituto de Matemáticas Pura y Aplicada. (2019). *OBMEP 12 anos.* Rio de janeiro. Biênio 2017-2018. Rio de Janeiro: IMPA. Recuperado el 14 de marzo de 2022, de: http://www.obmep.org.br/images/Revista_OBMEP_12_anos.pdf.

Jesus, V. R. de. (2018). *A utilização do software GeoGebra no estudo dos pontos notáveis do triângulo.* 2018. 93 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal da Bahia, Salvador. Recuperado el 14 de marzo de 2022, de: https://repositorio.ufba.br/handle/ri/26731.

Laborde, C. y Capponi, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un Milieu pour l'Apprentissage de la notion de figure, em Balacheff, N. e Vivet, M. (editores), *Didactique et Intelligence Artificielle.* France: La pensée Sauvage.

Machado, P. F. (2012). *Fundamentos de geometria plana.* Belo Horizonte: CAED/UFMG.

Muniz Neto, A. C. (2012). *Tópicos de Matemática Elementar:* geometria euclidiana plana - Caminha Muniz Neto. 1 (Eds.) Rio de Janeiro: SBM.

Papa Neto, A. (2017). *Geometria plana e construções geométricas.* Angelo Papa Neto. Fortaleza: UAB/IFCE.

Santiago, P. V. da S. (2021). *Olimpíada Internacional de Matemática:* Situações Didáticas Olímpicas no Ensino de Geometria Plana. 2021. 160 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2021. Recuperado el 21 de marzo de 2022, de: https://repositorio.ufc.br/handle/riufc/61842.

Santos, A. P. R. A. y Alves, F. R. V. (2017). A teoria das Situações Didáticas no ensino das Olimpíadas de Matemática: Uma Aplicação do Teorema de Pitot. *Revista Indagatio Didactica*, 9(4), 279-296. doi: https://doi.org/10.34624/id.v9i4.97.

Santos, J. P. M. dos; Jesus, A. F. de; Linares, J. L. (2021). Retas de Euler e o esquema aditivo RGB: construções dinâmicas no GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo,* 10(2), 26–39, 2021. doi: https://doi.org/10.23925/2237-9657.2021.v10i2p026-039.

Silva, J. G. A. da., Alves, F. R. V. y Menezes, D. B. (2021). Situação Didática Olímpica sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas: uma aplicação com professores em formação inicial no Brasil. *Revista Binacional Brasil-Argentina: Diálogo entre as ciências*, 10(1), 380-411. doi: https://doi.org/10.22481/rbba.v10i01.8393.

Paulo Vitor da Silva Santiago. Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal do Ceará – UFC Campus Fortaleza. Professor da Secretaria de Educacão Básica do Estado do Ceará. Email: paulovitor.paulocds@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves. Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará, Bolsista de produtividade do CNPQ – PQ2. Professor permanente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do IFCE, Professor permanente do Programa de Pós-Graduação do Mestrado Profissional em Educação profissional tecnológica. Professor titular do IFCE – departamento de Matemática e Física. Coordenador acadêmico do Doutorado em rede RENOEN, polo IFCE. Email: fregis@ifce.edu.br