

## Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en la enseñanza de fracciones empleando recursos materiales y virtuales: un estudio de caso

**Julián Andrés Meléndez Cruz**

(Universidad Icesi. Colombia)

**Eric Flores Medrano**

(Universidad Complutense de Madrid. España)

**Estella de Lourdes Juárez Ruiz**

(Benemérita Universidad Autónoma de Puebla. México)

*Fecha de recepción: 29 de agosto de 2023*

*Fecha de aceptación: 02 de junio de 2023*

---

### Resumen

Se presenta una investigación de corte cualitativo, centrada en identificar y caracterizar aquellos conocimientos matemáticos y didácticos que hacen especialista a una docente de matemáticas, al momento de pensar en un proceso de instrucción en el que se pretende enseñar fracciones en grado quinto de primaria. Para ello se utilizó el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK, por sus siglas en inglés), el cual permite estudiar, identificar, organizar y caracterizar qué conocimientos se ven inmersos en un proceso de instrucción. Para la recolección de información se hizo uso de una entrevista semi estructurada y para el análisis de los datos obtenidos se utilizó un conjunto de categorías generales tomadas de dos de los subdominios del modelo. Uno de los principales aspectos señalados por la docente al final de estudio, se relaciona con el conocimiento de la complejidad de la enseñanza de las fracciones y la importancia del uso de los recursos al enseñar este concepto.

### Palabras clave

Conocimiento especializado del profesor de matemáticas, fracciones, recursos materiales y virtuales

---

### Abstract

Qualitative research is presented, focused on identifying and characterizing the mathematical and didactic knowledge that makes a mathematics teacher a specialist when thinking about an instructional process in which she intends to teach fractions in the fifth grade of elementary school. For this purpose, the mathematics teacher's specialized knowledge model (MTSK) was used, which allows studying, identifying, organizing and characterizing what knowledge is immersed in an instructional process. A semi-structured interview was used to collect information, and a set of general categories taken from two of the model's subdomains was used to analyze the data obtained. One of the main aspects pointed out by the teacher at the end of the study is related to the knowledge of the complexity of teaching fractions and the importance of the use of resources when teaching this concept.

### Keywords

Mathematics teacher's specialized knowledge, fractions, material and virtual resources

---



**Sociedad Canaria de Profesorado de Matemáticas**

*Luis Balbuena Castellano*

### 1. Introducción

En el acervo de investigaciones en didáctica de las matemáticas se encuentra que son muchos los trabajos realizados en torno a la enseñanza y el aprendizaje del concepto de fracción. Tales intereses por desarrollar estas investigaciones se deben a la complejidad que demanda el concepto para su comprensión, pues resulta ser uno de los conceptos que solicitan mayor atención y su construcción requiere de un largo plazo (Fandiño, 2015).

La necesidad de tomar un camino tan largo para la construcción del tal concepto se debe a los múltiples significados que posee la fracción (Fandiño, 2015). No se trata simplemente de una relación entre dos números  $\frac{a}{b}$  donde  $b \neq 0$ , pues esta puede significar una relación parte todo, una medida, un cociente, una razón o un operador, dependiendo la situación que se le asocie (Llinares y Sánchez 2000). De esta manera, resulta imprescindible y se hace necesario que el docente de matemáticas conozca cada uno de estos significados, además de saber en qué momento abordarlos.

Resulta importante señalar que muchas de las investigaciones interesadas en abordar las dificultades presentes en el aprendizaje y la enseñanza del concepto de fracción, han hecho mayor énfasis en estudiar aquellos aspectos relacionados directamente con el aprendizaje, tomando como sujeto de estudio al estudiante, sin embargo, a pesar de que la literatura sea numerosa, se encuentra que dichas dificultades siguen persistiendo. Ahora bien, si es el docente el encargado de propiciar el aprendizaje en los estudiantes, interesa conocer cuál es el conocimiento profesional que se está movilizand o en el aula de clases en relación con el concepto de fracción.

Como antesala a un trabajo más robusto por desarrollarse posteriormente, la experiencia reportada en este documento se convierte en un insumo para dicho desarrollo. Aquí se mostrará el resultado de aplicar una primera entrevista a una docente del área de matemáticas de una institución colombiana, cuyo propósito es valerse del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) como modelo analítico, el cual permite al investigador identificar elementos característicos del conocimiento que se movilizan al pensarse un proceso de instrucción relacionado con la enseñanza de las fracciones. En particular, aquellos relacionados con la enseñanza de las fracciones haciendo uso de recursos materiales y virtuales. En este sentido, los resultados del estudio buscarán atender parte de la siguiente pregunta de investigación: *¿Qué caracteriza al conocimiento especializado del profesor de matemáticas al enseñar fracciones empleando recursos materiales y virtuales?*

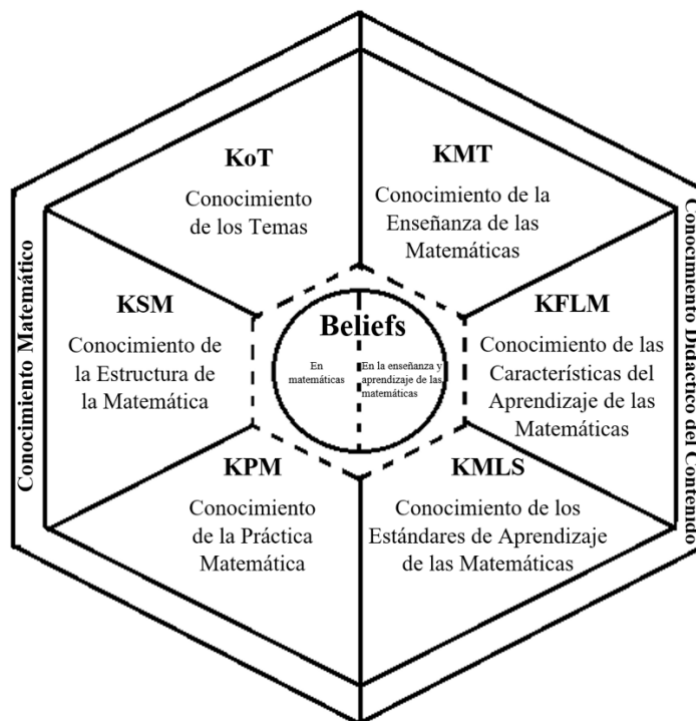
### 2. Elementos teóricos

Como fundamento teórico para este trabajo, se expone el modelo del Conocimiento Especializado por el Profesor de Matemáticas (MTSK) y algunas ideas relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.

#### 2.1. Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

El Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (ver figura 1) es un modelo analítico desarrollado para analizar el conocimiento que hace especialista al profesor de matemáticas, busca identificar y caracterizar el conocimiento particular y especializado que hace diferente al profesor de matemáticas de otro profesional en el área (Carrillo et al., 2018). El modelo permite organizar el

conocimiento del docente a través de los diversos elementos o categorías que lo componen y brinda posibilidad de estudiar los diversos escenarios donde se desenvuelve el profesor de matemáticas.



**Figura 1.** Esquema del modelo Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Adaptado de Carrillo et al. (2018)

El modelo está conformado por tres grandes dominios: el dominio del Conocimiento Matemático (MK, en adelante todas las siglas corresponden al inglés), el dominio del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK) y el dominio de las creencias y, a su vez, cada dominio está conformado por un conjunto de subdominios. Para el caso del estudio realizado en este trabajo, se toma en consideración sólo dos de los subdominios, el Conocimiento de los Temas (KoT) y el Conocimiento de la Enseñanza Matemática (KMT), los cuales se presentan más adelante.

### 2.1.1. Conocimiento Matemático (MK)

Este dominio está conformado por tres subdominios: el Conocimiento de los Temas (KoT), el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM) y el Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM), de los cuales sólo se abordará el primero. El interés de este dominio se centra en identificar el conocimiento específico que moviliza el docente en el área de matemáticas, conocimiento axiomático, procedimental, las representaciones usadas para presentar los conceptos, las definiciones, entre otros.

**Conocimiento de los temas (KoT).** Este subdominio se interesa por identificar características del conocimiento específicas del tema de estudio, entre estas se incluyen aspectos fenomenológicos, las definiciones de los conceptos abordados, la diversidad de registros de representación, las propiedades y sus fundamentos. Su propósito es identificar aquellos conocimientos que moviliza el profesor relacionado directamente con la especialidad en el tema. Como apunte importante, Muñoz-Catalán et al. (2015) señalan que, “este conocimiento no se limita al contenido que es objeto de enseñanza y

aprendizaje, sino que es un conocimiento profundo del contenido escolar” (p. 1808), de esta manera, se ha de entender que es necesario que el docente de matemáticas conozca del tema mucho más a profundidad de lo que se alcanza a movilizar en el aula de clase a sus estudiantes.

### 2.1.2 Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK)

En este dominio entra en juego un aspecto importante que distingue a un profesional en el área de la enseñanza de las matemáticas con otro profesional en matemáticas, y es aquel conocimiento aportado por otras ciencias que inciden de manera directa en el campo de la educación matemática. Para el profesor de matemáticas no es suficiente conocer de un tema, pues esto no garantiza que a la hora de enseñarlo los resultados sean los esperados. Hacen falta los aportes de la didáctica y pedagogía para fortalecer un proceso de instrucción; esto quiere decir que el docente debe tener conocimiento de estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, al igual que un conocimiento curricular frente a los conceptos enseñados y los grados de escolaridad a los que se enfrenta.

Este dominio está conformado por el Conocimiento de la Enseñanza Matemática (KMT), el Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y el Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), de los cuales sólo se aborda el primero.

#### *Conocimiento de la Enseñanza Matemática (KMT)*

En este subdominio se encuentra el conocimiento que tiene el docente en relación con las vías, recursos y formas que emplea en la enseñanza de las matemáticas, las teorías de la enseñanza, el tipo de tareas empleadas, las estrategias, las técnicas y ejemplos. De esta manera, se puede identificar el conocimiento que moviliza el docente alrededor de diferentes estrategias y teorías, institucionales o personales de enseñanza de las matemáticas.

En cuanto a los recursos mencionados en este subdominio, Muñoz-Catalán et al. (2015) señalan que, “es relevante el conocimiento de diferentes recursos para la enseñanza de las matemáticas, como pueden ser el ábaco, las regletas de Cuisenaire, o GeoGebra, en relación con su potencial y limitaciones para la enseñanza de contenidos específicos” (p. 1809). Un aspecto importante señalado aquí, es el conocimiento que deben tener los profesores de los recursos, así como la potencialidad que ofrecen estos a la hora de enseñar un tema.

### 2.2 El proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones no es algo que suceda de la noche a la mañana, autores como Llinares y Sánchez (2000) y Fandiño (2015) mencionan que, es un proceso que se da a largo plazo, el cual requiere de la comprensión de diversos significados asociados a este concepto. En investigaciones como las de Fandiño (2007), Ávila (2019) y Arenas y Rodríguez (2020) señalan que, es uno de los conceptos que genera mayor dificultad en la educación básica (4-12 años). Entre las dificultades asociadas a este concepto se encuentran: dificultad en el ordenamiento, dificultad en el reconocimiento de esquemas, dificultad en la gestión del adjetivo “igual”, la gestión de la equivalencia, dificultad en la gestión de la “fracción irreducible”, determinar a partir de una fracción la unidad que la generó, dificultades de tipo procedimental, entre otras (Arenas y Rodríguez, 2020).

Frente a estas dificultades, son varios los trabajos que se han propuesto para ayudar a superarlas. Por mencionar algunas de ellas, encontramos los trabajos de Fuentes (2010), Meza y Barrios (2010), López (2013), Alsina y Franco (2020) y Lee y Boyadzhiev (2020), en los cuales se interesaron en

proponer secuencias didácticas, propuestas de aula, e itinerarios para la enseñanza del concepto de fracción a fin de aportar al tratamiento de algunas de las dificultades mencionadas anteriormente.

Otra de las dificultades por atender y la cual es el centro de atención para este trabajo, está relacionada con el desconocimiento de los múltiples significados asociados al concepto a la fracción, tanto del estudiante como del docente (Rojas et al, 2015). Al respecto, Obando (2003) señala que el docente de matemática ha centrado su atención en la enseñanza de la fracción como relación parte-todo y ha descuidado el abordar los demás significados. Y si bien, el mismo autor menciona que el significado de relación parte-todo es esencial para la construcción de los demás significados, es importante proponer situaciones donde se vean reflejados estos otros significados.

Kieren (1980) menciona que una de las finalidades de la enseñanza de las fracciones es aportar a la construcción del número racional, el cual es considerado como un constructo teórico conformado por cuatro subconstructos, la fracción como relación parte-todo y medida, la fracción como cociente, como razón y operador. Es a raíz de esta subdivisión que otros autores en años posteriores han ampliado los significados de la fracción que conducen a la consolidación del número racional, por ejemplo, en Llinares y Sánchez (como se citó en Alsina y Franco, 2020) mencionan que el concepto de fracción engloba diferentes significados: relación parte-todo, fracción como razón (relación parte-parte, operador, cociente de dos números), fracción como reparto equitativo, fracción como división y la fracción como un punto de la recta numérica, siendo la interpretación parte-todo el origen de las demás. Razón por la cual, se considera importante para este trabajo que el docente de matemáticas conozca estos significados.

### 3. Metodología

Con el objetivo de caracterizar el conocimiento especializado del profesor de matemáticas al enseñar fracciones empleando recursos materiales y virtuales, la investigación se desarrolló desde un enfoque cualitativo, bajo un paradigma de tipo interpretativo (Basse, 2003), el cual permitió comprender e interpretar la naturaleza del conocimiento especializado de una docente de matemáticas. La información proporcionada por la informante sirvió para conocer qué elementos del conocimiento emergen y han de servir para identificar y refinar elementos característicos relacionados con el KoT en el MK y el KMT en el PCK, alrededor del concepto de fracción. Para el desarrollo de este estudio se contemplaron tres fases: 1) selección de la docente. 2) aplicación de entrevista semiestructurada para la recolección de la información. 3) análisis de los datos obtenidos a partir de categorías de los subdominios KoT y KMT del modelo MTSK.

#### 3.1. Participante y contexto

Inicialmente se contactaron a tres docentes colombianas con experiencia al enseñar matemáticas en los grados 3°, 4° y 5° de educación básica primaria (8-10 años), de las cuales sólo una de ellas aceptó participar en la investigación, las razones de su elección fueron el interés y el tiempo disponible para la participación en el estudio. Se consideró el caso de una docente de educación básica primaria, con formación en licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas y una experiencia de cinco años trabajando con estudiantes de cuarto y quinto grado de primaria.

El interés de haber seleccionado la docente con experiencia en estos grados de escolaridad se debe que en investigaciones como la de Obando (2003) se menciona que, es a partir estos grados donde comienzan a estudiar las diferentes interpretaciones del concepto de fracción, especialmente el significado de relación parte-todo. En este sentido, se interesó conocer ¿cuál o cuáles son los

significados que la docente moviliza durante estos grados de escolaridad? ¿Cómo los aborda? ¿Qué entiende por fracción? ¿Cómo enseña el concepto de fracción? ¿Utiliza recursos?, entre otros.

### 3.2. Método de recolección de datos

En la investigación se hizo uso de una entrevista semiestructurada, en la cual se abordó un conjunto de preguntas orientadas desde el modelo MTSK, específicamente de los subdominios KoT y KMT. En la tabla 1 se exhiben algunas de estas preguntas relacionadas con sus respectivos subdominios, las cuales durante su ejecución permitirían conocer elementos característicos del conocimiento que movilizaba la docente de matemáticas alrededor del concepto de fracción. Es importante mencionar que estos instrumentos utilizados durante la investigación fueron revisados y validados por doce profesores estudiantes de maestría en educación matemática en paralelo con cursos de metodología de la investigación y educación matemática durante dos semestres.

Pregunta	Subdominio
¿Qué entiende usted por el concepto de fracción? ¿Conoces más de un significado atribuido a la enseñanza de las fracciones? ¿Cuál o cuáles definiciones de las fracciones presentas a los estudiantes? ¿Es a partir de la relación parte-todo que se debe empezar a tener un acercamiento del concepto de fracción a los estudiantes? ¿Utilizas diferentes registros de representación de las fracciones a la hora de enseñar?	KoT
¿Has leído artículos o investigaciones que propongan estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones? ¿Qué estrategias, técnicas y tareas utilizas para la enseñanza de las fracciones? ¿Qué dificultades has identificado en la enseñanza y aprendizaje de la suma las fracciones? ¿Cuál es la importancia que da usted al uso de materiales concretos o recursos digitales? ¿Qué materiales concretos o recursos digitales ha utilizado para enseñar fracciones en la clase de matemáticas?	KMT

Tabla 1: preguntas orientadoras, fuente propia

### 3.3. Método de análisis de datos

Para el análisis de la información obtenida en la entrevista semiestructurada, se tomaron en consideración las respuestas y las reflexiones planteadas por la docente con relación a cada una de las categorías de los subdominios KoT y KMT. En la tabla 2 se muestran las categorías generales presentes en los subdominios mencionados, las cuales fueron utilizadas para identificar y caracterizar los conocimientos que moviliza la docente en la información recabada.

	Conocimiento de los temas (KoT).	Conocimiento de Enseñanza Matemática (KMT).
--	----------------------------------	---



<b>Categorías</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Procedimientos</li> <li>• Definiciones, propiedades y sus fundamentos</li> <li>• Registros de representación</li> <li>• Fenomenología y aplicaciones</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Teorías de la enseñanza</li> <li>• Recursos materiales y virtuales</li> <li>• Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos</li> </ul>
-------------------	--	--

**Tabla 2:** Categorías de los subdominios KoT y KMT, adaptado de Carrillo et al. (2018)

## 4. RESULTADOS

En los siguientes apartados se presentan fragmentos de entrevista en los cuales se identifican elementos relacionados con el conocimiento de los temas (KoT) y conocimiento de la enseñanza matemática (KMT).

### 4.1. Conocimiento de los temas (KoT)

Para el caso de lo evidenciado en este subdominio, se identifican en el discurso de la profesora entrevistada algunos elementos del conocimiento que resultan ser importantes y se deben tener en cuenta a la hora de enseñar el concepto de fracción.

#### *Fenomenología y aplicaciones*

La docente menciona que la fracción es un concepto amplio y muy complejo, reconoce la existencia de diversos significados y menciona que dicha complejidad se debe justamente a esa diversidad de interpretaciones, de ahí parte la necesidad de que el docente de matemáticas proponga actividades que se relacionen con cada uno de los significados, a través de diversos contextos o situaciones que no sean ajenas y que den un sentido a la interpretación de la fracción enseñada en cierto momento. El siguiente fragmento de entrevista da cuenta de lo mencionado anteriormente.

**Entrevistador:** *Ok, hablabas al comienzo de que existe una complejidad ¿no? ¿a qué crees que se deba esa complejidad?*

**Docente:** *pues sí, como ya lo he mencionado, el concepto de fracción tiene una complejidad bastante alta y como bien se sabe, este concepto es tan complejo por esos múltiples significados. porque sabemos que las fracciones tienen unos múltiples significados o interpretaciones, que estos son los que hacen ver que ese concepto pueda ser tan complejo, porque los encontramos en diversas situaciones o contextos, por ejemplo: tenemos las fracciones como un cociente, como una relación parte de un todo, tenemos fracciones como operadores, como una comparación, las fracciones también como razón, como un punto; sí, como un punto que está ubicado en una recta numérica, me representa un punto en una recta numérica. Tenemos las fracciones como una medida, como un decimal, como un porcentaje y pues sé que hay más, más significados o interpretaciones que en este momento no las recuerdo, pero este concepto evoluciona tanto que puede llegar a ser un número racional, que es lo que se ve más o menos en séptimo grado y puede pasar a ser ya por allá en décimo y once el concepto de derivada, pues ahí vemos que la razón de cambio, ahí se manifiesta en manera de razón.*

En el fragmento anterior, también se evidencia relación con algunas teorías de la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, pues las ideas expuestas por la docente alrededor de tal concepto, se encuentran muy relacionadas con los planteamientos realizados con autores como Fandiño, (2015);

Llinares y Sánchez, (2000), los cuales confirman que la complejidad en el aprendizaje de las fracciones se debe a un desconocimiento y a un mal tratamiento de los diversos significados que posee el concepto de fracción.

Por otra parte, en los siguientes aportes, la docente pone de manifiesto el tratamiento y la importancia que le da al significado de fracción como relación parte-todo, reconociendo que es uno de los primeros significados que se deben abordar para proponer un primer acercamiento al concepto de fracción.

**Entrevistador:** *¿crees que es a partir de la relación parte todo que debes empezar a tener un acercamiento del concepto de la fracción a los estudiantes?*

**Docente:** *pues sí, de acuerdo con investigaciones y con mi experiencia, la relación parte todo es importante para la construcción o para el acercamiento al concepto de lo que es una fracción, pues, a los estudiantes les resulta de una manera más fácil por decirlo así, de una manera más cómoda, tener una cantidad de objetos, una cantidad de cosas y de estas tomar o quitar ciertas cantidades o a ellos también les resulta más fácil, más cómodo, tener unos objetos, unos elementos, realizar agrupaciones que permitan dar solución a ciertas situaciones problema planteadas.*

En sintonía con lo comentado por la docente, en Obando (2003) se afirma que es a través del significado de relación parte-todo que se comienza a tener los primeros acercamientos al concepto de fracción y además, este significado permite sentar bases fuertes para estudio de los demás significados de la fracción.

### **Registros de representación**

En lo que corresponde a los registros de representación la docente reconoce la importancia del uso de diferentes registros en la enseñanza de las fracciones, lo cual se puede evidenciar en el siguiente fragmento:

**Entrevistador:** *La siguiente pregunta está relacionada con las representaciones o registros que podemos utilizar en el aula, entonces, ¿en tu experiencia, has utilizado diferentes registros de representación para la enseñanza de las fracciones?*

**Docente:** *si he utilizado en el momento de enseñar las fracciones independientemente del significado en el que esté trabajando, se suelen utilizar las representaciones como numéricas, aritméticas, representaciones gráficas, el lenguaje natural enfocado hacia la lectura de una fracción, entonces por lo general suelo trabajar. En estos momentos en el grado que me encuentro, grado quinto, lo he hecho de esa manera, si he trabajado a través de esos tres registros, que son las representaciones numéricas, la representación gráfica y el lenguaje natural.*

Con relación a lo expuesto en el fragmento anterior, se puede identificar que la docente a la hora de enseñar fracciones se vale de diversos registros, tales como el uso de representaciones gráficas, numéricas y a través del lenguaje natural. En este sentido, el reconocimiento y la importancia que hace la docente del uso de los diferentes registros se puede sustentar bajo los planteamientos de Duval (2017) en su teoría de las representaciones semióticas, particularmente en su libro “Semiosis y pensamiento humano”, en el cual señala que para acceder al conocimiento matemático, se debe hacer a través de las



representaciones semióticas, representaciones tales como las gráficas, los dibujos o incluso el mismo lenguaje natural, todas estas representaciones permiten al estudiante un acercamiento a un ente abstracto como lo son las matemáticas.

### 4.2. Conocimiento de la enseñanza matemática (KMT)

#### *Teorías de la enseñanza*

En este espacio se interesó conocer el conocimiento relacionado con las teorías de enseñanza y el aprendizaje de las fracciones, al respecto, en el siguiente extracto se pudo evidenciar que la docente desde su experiencia y formación tuvo la posibilidad de estudiar algunas investigaciones relacionadas con el concepto de fracción, abordando sus diferentes significados y las dificultades asociadas a este concepto.

**Entrevistador:** *¿has leído artículos o investigaciones que propongan estrategias para la enseñanza y el aprendizaje de la fracción?*

**Docente:** *si he leído algunas investigaciones acerca del concepto de fracción, en los cuales se han estudiado los significados o interpretaciones que se le atribuyen a este concepto, cómo se representa; es decir, sus representaciones, algunas dificultades que se presentan tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de estos significados, es importante recalcar que la mayoría de los que he leído, son como orientados acerca de la fracción como una relación parte de un todo.*

Estos aportes de la docente dan cuenta del conocimiento de teorías que le podrían ayudar tanto a ella como a otros docentes a enfrentar las dificultades que pueden aparecer en la enseñanza del concepto de fracción. Además, el conocimiento de teorías asociadas a este concepto les permite entender por qué resulta tan complejo el estudiar las fracciones y les brinda un abanico de posibilidades para proponer actividades para su enseñanza. En el siguiente fragmento también se pudo evidenciar algunos hallazgos relacionados con esta categoría.

**Entrevistador:** *¿Cómo enseñar el concepto de fracción?*

**Docente:** *desde un primer momento pienso que este concepto tan complejo debe ser enseñado a través de situaciones que sean vivenciales para el estudiante, situaciones que sean cercanas al lugar donde se encuentran, o sea, situaciones que surjan del contexto donde están ubicados los estudiantes.*

En el fragmento anterior, también se encuentran elementos relacionados con el conocimiento relacionados con las teorías de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, se puede identificar en la respuesta de la docente un acercamiento a las ideas propuestas en posturas como las planteadas desde la educación matemática realista (Freudenthal, 1973), al pensar en situaciones que sean reales para el estudiante, de tal manera que puedan encontrar un sentido a aquellos conceptos abstractos relacionados con las fracciones y se vean reflejado en contextos que no sean ajenos a los estudiantes.

#### *Recursos materiales y virtuales*

**Entrevistador:** *¿has utilizado materiales concretos o recursos digitales para la enseñanza de las fracciones?*



**Docente:** *pues, hasta el momento si he utilizado materiales, puedo decir que son concretos, pues hemos llevado al aula frutas, juguetes, chocolatinas, entre otros. En la parte de los recursos digitales aun no lo he involucrado en el aula, pero sé que hay muchos recursos digitales que sirven para fortalecer estos procesos, ya sea de enseñanza o aprendizaje, por ejemplo, conozco los recursos digitales que nos proporciona GeoGebra, no los he utilizado, pero si son importantes. Tal vez sea por situaciones que se presentan en las instituciones, limitaciones en salas de informática, computadores u otros factores que hacen que se les salen de las manos a uno como docente.*

En relación con el uso de los recursos materiales, se puede evidenciar que la docente si ha contemplado el uso de estos y menciona que son muchos los materiales que se encuentran a disposición del profesor para la enseñanza de las fracciones. En investigaciones como las de Alsina y Planas (2008), Alsina (2010) y Novo (2021) mencionan la importancia de la vinculación de los recursos materiales a la clase de matemáticas, en particular, en estas dos últimas investigaciones señalan que la manipulación no es solamente una forma de aprender divertida, manipulando se aprende y el proceso es mucho más eficaz y además, se convierte en una manera de impulsar la autonomía de los niños. En este mismo sentido, Arrieta (1998) menciona que:

La propia experiencia indica que el material facilita y favorece la comprensión e incluso la comunicación porque permite referirse a un soporte físico, facilita la visualización - proceso de formación de imágenes mentales o materiales - que es clave en la comprensión de conceptos y favorece la motivación y la actitud positiva hacia la Matemática convirtiéndose su uso en el punto de partida de la construcción del conocimiento. (p.110)

La postura de la docente da a conocer que, si existe un acercamiento al trabajo con recursos materiales y virtuales en la enseñanza de las matemáticas, pero durante la marcha intervienen diversos factores que impiden el uso de estos; factores como el tiempo, la disposición de materiales en las instituciones, e incluso las habilidades y formación que tengan los docentes en el manejo de los materiales concretos o digitales. Frente al uso de estos materiales, en el siguiente fragmento de entrevista se puede evidenciar la importancia que da la docente entrevistada al uso de los materiales en la enseñanza de las matemáticas.

**Entrevistador:** *¿Qué piensas del uso de estos materiales en la enseñanza de las matemáticas, como cuál es su importancia, ¿cómo qué beneficios trae y cómo esto ayuda en la educación?*

**Docente:** *pienso que estos materiales concretos, manipulativos e incluso los tecnológicos, son de gran importancia para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, pues como bien sabemos, las matemáticas y sus conceptos son totalmente abstractos, sabemos que las matemáticas son una ciencia totalmente abstracta y de aquí donde se deviene esos múltiples problemas que uno se encuentra en las matemáticas, sabemos que nosotros comprendemos las matemáticas, es a través de, o por medio de esas representaciones, de esos registros de representación, y estas representaciones nos permiten que sean plasmadas o manifestadas en objetos manipulables, objetos que nosotros podamos palpar, visualizar, manipular y de aquí donde deviene que se tenga una buena comprensión de estos conceptos matemáticos, a través de la manipulación y visualización de estos.*

A manera de síntesis, la docente menciona que la importancia del uso de los materiales en la enseñanza de las matemáticas radica en la posibilidad de poder darle sentido a lo abstracto, lo cual no dista de lo expuesto en investigaciones como la de Novo (2021), donde menciona que a partir de la

manipulación de objetos que es posible acercarse a la abstracción en matemáticas, añadiendo que es imprescindible que los profesores introduzcan gran variedad de recursos didácticos. De esta manera, se entiende que la docente sostiene la premisa de que los materiales permiten la manipulación y por ende la visualización de aquellas entidades abstractas.

### *Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos*

**Entrevistador:** *¿has utilizado o qué estrategias o tareas utilizas para la enseñanza de las fracciones?*

**Docente:** *qué estrategias, pues en mi poca experiencia que llevo en este ejercicio docente, para la enseñanza de las fracciones he utilizado el tangram. Este me permite a través de sus formas o piezas que lo conforman, establecer relaciones y comparaciones, que me permiten inducir a mis estudiantes a lo que en realidad es el concepto de fracción.*

En lo que corresponde a las estrategias empleadas por parte de la docente para la enseñanza del concepto de fracción, menciona que, a pesar de su poca experiencia, ha hecho uso de materiales como el Tangram, el cual menciona que se convierte en un material que permite establecer comparaciones y relaciones entre fracciones.

## 5. Discusiones y conclusiones

Este estudio se interesó por identificar y caracterizar el conocimiento especializado de una docente de matemáticas al abordar cuestiones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las fracciones. Para ello se hizo uso del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK). Particularmente, nos centramos en atender dos de los subdominios que conforman el modelo: el conocimiento de los temas (KoT) y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT). Atendiendo a estos intereses, al finalizar el estudio se concluyen las siguientes anotaciones.

Desde los hallazgos encontrados referentes al KoT, se logró evidenciar que la docente moviliza conocimiento matemático asociado al concepto de fracción, en el que distingue la diversidad de significados que se deben abordar al enseñar este concepto y reconoce la complejidad que demanda durante la educación básica, lo cual es coherente con lo reportado en investigaciones como las de Fandiño (2007), Ávila (2019) y Arenas y Rodríguez (2020), además, reconoce que una de las razones por la cual se convierte en un concepto de gran complejidad, se debe justamente a la diversidad de interpretaciones que este posee, lo cual es acorde por lo planteado en Fandiño (2015). También se destaca la importancia que da la docente al significado de fracción como relación parte-todo, pues en sintonía con Obando (2003), señala que este significado es esencial para un primer acercamiento al concepto de fracción y para el desarrollo posterior de los demás significados.

Otro aspecto relacionado con este subdominio tiene que ver con la importancia que da la docente al uso de diferentes registros de representación en la enseñanza de las matemáticas, particularmente al enseñar el concepto de fracción. Siendo coherente con lo planteado en Duval (2017), la docente reconoce que, al momento de enseñar un objeto matemático desde sus diferentes registros de representación, se favorece la comprensión y se ayuda al estudiante a tener un mayor acercamiento al concepto.

Ahora bien, referente al KMT se identificaron hallazgos relacionados con las teorías de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones, la docente conoce literatura asociada a la enseñanza de este

concepto. Se evidenció que el conocimiento de estas teorías le permite a la docente reconocer los obstáculos, errores y dificultades que pueden aparecer en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto, lo cual brinda conocimiento para saber a qué se enfrentará al momento de sus prácticas de enseñanza.

Este subdominio también se preocupa por identificar el conocimiento relacionado con el uso de recursos materiales y virtuales, pues tal como lo mencionan en Alsina (2010) y Novo (2021) se considera que es esencial que el docente se apoye de estos medios para favorecer sus procesos de enseñanza y aprendizaje. Al respecto, se pudo evidenciar que la docente movilizaba conocimiento relacionado con la importancia de estos recursos y había hecho uso de algunos de estos. Particularmente, mencionó haber utilizado el tangram para introducir al estudio de las fracciones.

De manera general, los resultados de este estudio permitieron evidenciar que la docente movilizaba conocimiento tanto matemático como didáctico en relación con las fracciones. Conocimiento relacionado con las dificultades que pueden enfrentar los estudiantes en el proceso de la construcción del concepto, la necesidad de utilizar diversos registros de representación para enseñar el tema, la importancia de enseñar los diferentes significados de la fracción y la necesidad de usar los recursos materiales y virtuales en el aula de matemáticas. Además, reconoce que las dificultades subyacentes en el aprendizaje de las fracciones se deben a la misma complejidad que el concepto demanda y en consonancia con lo planteado por Fandiño (2015), reconoce que dicha complejidad se debe a la diversidad de significados que posee el concepto, lo cual invita a los docentes a pensar que su aprendizaje no se dará de la noche a la mañana.

Este estudio permite resaltar la pertinencia de usar el modelo MTSK, como herramienta para conocer que conocimientos moviliza un profesor antes de enseñar un concepto. De igual forma, su aplicabilidad se amplía a los diversos escenarios en el campo educativo, aparece como herramienta importante para estudiar las planeaciones de clase o la misma práctica de aula. Sería interesante analizar que sucede durante una clase de fracciones impartida por la docente partícipe de este estudio, ¿aparecerán los mismos conocimientos identificados en la entrevista? ¿qué recursos utilizará? ¿cómo enseñará? ¿cómo enfrentará las dificultades que aparecen durante la marcha? Estas y otras preguntas dan pie a plantearse otra investigación a futuro.

Se recomienda a los profesores que analicen ese conocimiento que los caracteriza como profesionales en el campo de la educación matemática, invitando a preguntarse: ¿Qué tanto sé de los temas que enseño? ¿Cómo lo hago? ¿Qué estrategias teóricas y metodológicas utilizo? ¿Qué recursos empleo? ¿Me capacito continuamente? Estas preguntas invitan a la reflexión de los actuales y futuros maestros a pensar en fortalecer sus prácticas de enseñanza en matemáticas.

## Bibliografía

- Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, 12-16.
- Alsina, Á., y Franco, J. (2020). Promoviendo la educación matemática inclusiva desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: el caso de las fracciones. *APeDuC Journal - Research and Practices in Science, Mathematics and Technology Education*, 01(02), 13-19.
- Alsina, Á. y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Narcea.

- Arenas-Peñaloza, J. y Rodríguez-Vásquez, F. (2021). Enseñanza y aprendizaje del concepto fracción en la educación primaria: estado del arte. *Cultura, Educación y Sociedad*, 12(2), 49-64.  
<http://dx.doi.org/10.17981/cultedusoc.12.2.2021.03>
- Arrieta, M. (1998). Medios materiales en la enseñanza de la matemática. *Revista de Psicodidáctica*, 5, 107-114.
- Ávila, A. (2019). Significados, representaciones y lenguaje: las fracciones en tres generaciones de libros de texto para primaria. *Educación Matemática*, 31(2), 22-60.  
<https://doi.org/10.24844/em3102.02>
- Bassey, M. (2003). *Case study research in educational settings*. Open University Press.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253. <http://doilorg/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Duval, R. (2017). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (2ª ed., Trad. M. Vega). Universidad del Valle.
- Fandiño, M. (2007). Fractions: conceptual and didactic aspects. *Acta didáctica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45.
- Fandiño, M. (2015). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Magisterio
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel Publishing Co.
- Fuentes, R. (2010). Enseñanza de Fracciones. una experiencia didáctica en quinto año de enseñanza primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 22, 169-182.
- Kieren, T. (1980). The reational number construct. Its Elements and mechanisms. En T. E. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning* (pp. 125-149). ERIC/ SMEAC.
- Llinares, S. y Sánchez, M. (2000). *Las fracciones: diferentes interpretaciones*. Editorial Síntesis.
- López, J. A. (2013). *El aprendizaje del concepto de fracción, desde la perspectiva históricocultural: un camino* [Tesis de maestría, Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia].  
<https://bibliotecadigital.udea.edu.co/handle/10495/7039>
- Lee, H. J., y Boyadzhiev, I. (2020). Underprepared College Students' Understanding of and Misconceptions with Fractions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*. 15(3), 2-12. <https://doi.org/10.29333/iejme/7835>
- Meza, A. y Barrios, A. (2010). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones. En G. García (Ed.), *Aprendizaje y Evaluación en Matemáticas: 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 674-682). Cengage learning.
- Muñoz-Catalán, M<sup>a</sup>. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. Á., y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 18 (3), 1801-1817.
- Novo, M<sup>a</sup>. L. (2021). Matemáticas en el Grado de Educación Infantil: la importancia del juego y los materiales manipulativos. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 10(2), 28-50.  
<https://doi.org/10.24197/edmain.2.2021.28-50>
- Obando, G. (2003). La enseñanza de los números racionales a partir de la relación parte-todo. *Revista EMA*. 8(2), 157-182
- Rojas, N., Flores, P., y Carrillo J. (2015). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 143-166. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a08>

**Julián Andrés Meléndez Cruz.** Maestro en Educación Matemática, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla: Puebla, México. Actualmente, profesor hora catedra en la universidad ICESI: Cali, Colombia. Egresado del programa de licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad del Valle: Cali, Colombia. Mis intereses como investigador son el estudio de las fracciones y el conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Email: julian.melendez@u.icesi.edu.co

**Eric Flores Medrano.** Docente e investigador. Doctor en Didáctica de las Matemáticas (Didáctica de las Ciencias y Filosofía), Universidad de Huelva Facultad de Educación: Huelva, Andalucía, ES. Actualmente, profesor visitante en la Universidad Complutense de Madrid, España. Maestro en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa (Matemática Educativa) en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional: México, Distrito Federal, MX. Licenciado en Física y Matemáticas (Matemática Educativa) en el Instituto Politécnico Nacional Escuela Superior de Física y Matemáticas: México DF, Distrito Federal, MX. Email: erflores@ucm.es

**Estela de Lourdes Juárez Ruiz.** Estela de Lourdes Juárez Ruiz. Doctora en Matemáticas por la Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México. En la actualidad, realiza investigación en educación matemática y creatividad. Sus proyectos recientes son en habilidades visuales espaciales y representaciones, resolución de problemas y problemas verbales auténticos. E-mail: estela.juarez@correo.buap.com