NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 114, julio de 2023, páginas 189-201

Dos puzles de disección muy antiguos

Ramón B. Zubillaga Berazaín, (COMBIOMED – Tecnología Médica Digital, Cuba)
Joel B. Zubillaga Ochoa (Laboratorios AICA, Cuba)

Fecha de recepción: 08 de febrero de 2023
Fecha de aceptación: 14 de junio de 2023

Resumen Se explican los puzles de disección Tangram y Sei Shonagon y se consideran varios escenarios geométricos donde pueden utilizarse ambos rompecabezas.

Palabras clave Puzles de disección. Tangram. Sei Shonagon. Convexidad. Pentaminós. Tetraminós.

Title **Two very old dissection puzzles**

Abstract The dissection puzzles Tangram and Sei Shonagon are explained and are considered several geometrical scenarios where both puzzles can be used.

Keywords Dissection puzzles. Tangram. Sei Shonagon. Convexity. Pentominoes. Tetraminoes.

1. Presentación del Tangram

Tómese un cuadrado y divídase en siete partes como se muestra en la figura 1. Pues bien, las siete partes en que se ha dividido este cuadrado constituyen un Tangram (Gardner, M. 1988, pp. 26-37). Con estas piezas, según una antigua leyenda china, se podría formar cualquier figura; afirmación bastante exagerada, pero que tenía como base la diversidad de combinaciones existentes.

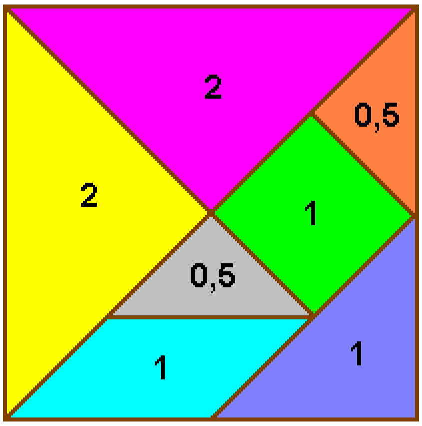

Figura 1. Tangram.

Sociedad Canaria de Profesorado de Matemáticas
Luis Balbuena Castellano

Por comodidad, para las explicaciones que se realizarán en lo adelante, se toma el cuadrado con longitud de lado igual a $2\sqrt{2}$. Esto implica un área total de 8 unidades cuadradas y que el cuadrado interior sea de longitud 1. El valor del área de cada pieza aparece en su interior.

Existen varias leyendas asociadas al origen del Tangram; una de las más conocidas cuenta que un sabio que llevaba una placa cuadrada de jade al emperador, la dejó caer sin querer, y esta se dividió en siete figuras geométricas extremadamente perfectas. El sabio, al intentar reunir las piezas, notaba como se formaban, una tras otras, diferentes figuras. Finalmente pudo formar el cuadrado que llevó al emperador, que a partir de ese momento se entretenía formando una gran variedad de figuras.

Debe aclararse que, a menos que se especifique lo contrario, se presupone que al formarse una figura con el Tangram se cumplen dos principios básicos:

1 - Hay que utilizar las 7 piezas

2 - No puede haber superposición en todo o en parte de las piezas

El problema Tangram clásico consiste en, partiendo de la sombra chinesca o del contorno de una figura, donde no se perciben las divisiones entre las piezas, lograr la construcción de esta siguiendo los dos principios enunciados arriba. La figura 2 muestra a la izquierda de la saeta los dos posibles planteamientos de un problema y, a su derecha, la solución. Los puzles, como el Tangram, donde a partir de un conjunto de piezas se debe formar la figura original de donde se extrajeron u otras figuras se conocen como rompecabezas de disección.

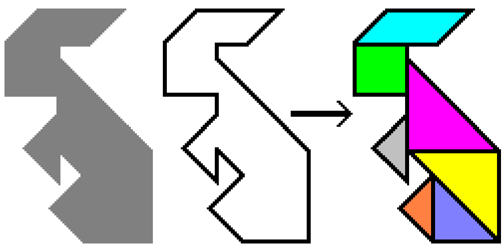

Figura 2. Conejo.

Con excepción del paralelogramo, ninguna de las piezas del Tangram necesita ser virada para obtener una pieza diferente a la que puede obtenerse por una simple rotación. Al resolver un problema debe tenerse muy presente esta diferencia, dado que la inversión del paralelogramo pudiera propiciar la solución. Precisamente, la figura 2 muestra un ejemplo donde cuando se vira esta pieza, no puede encontrarse la solución, aunque es posible obtener su imagen especular (figura 3).

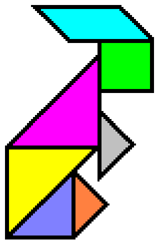

Figura 3. Imagen especular del conejo.

En cuanto a la fecha de creación de este rompecabezas, es probable que se originara durante la dinastía Song, que gobernara en China entre los años 960 y 1279. El origen del nombre Tangram posee varias versiones, siendo la más aceptada que fue inventado por el Dr. Thomas Hill en 1848 a partir de la unión de los vocablos: *tang* (chino en cantonés) y *gram* (gráfico en latín).

Los primeros libros acerca de este rompecabezas aparecieron en Europa a principios del Siglo XIX y presentaban las figuras con sus soluciones. A lo largo de ese siglo, fueron publicados algunos libros chinos en varios países europeos, producto de la popularidad que el Tangram había adquirido.

La figura 4 muestra algunas figuras formadas con las piezas del Tangram; de izquierda a derecha: mujer con pañuelo, casa, caballo del ajedrez, jirafa y embarcación.

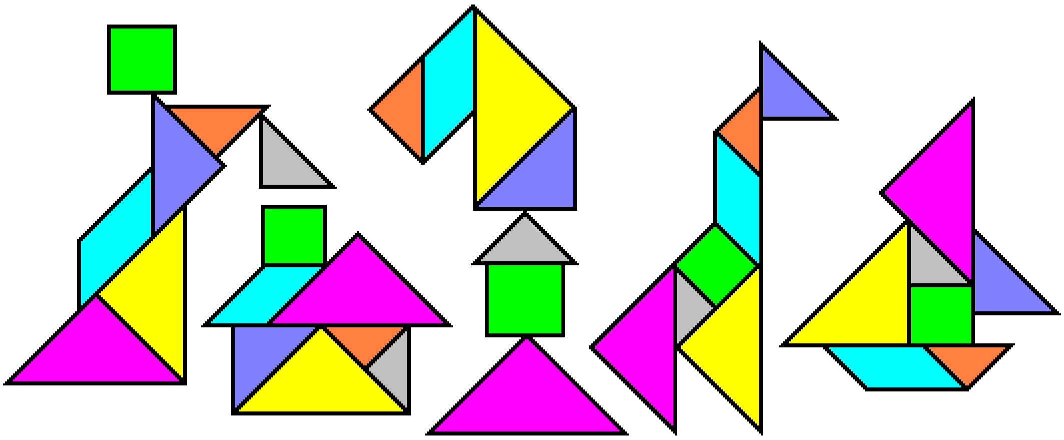

Figura 4. Figuras formadas con el Tangram.

Construir un Tangram es relativamente fácil, basta seguir los siguientes pasos:

1. Construir un cuadrado *ABCD* y trazar la diagonal *AC*.

2. Hallar los puntos medios de *AD* (*E*) y CD (*F*) y trazar el segmento EF.

3. Trazar la diagonal desde *B* hasta *D* hasta que corte al segmento *EF* en el punto *G* e identificar el punto intersección de ambas diagonales como *H*.

La figura 5 (izquierda) ejemplifica los tres primeros pasos.

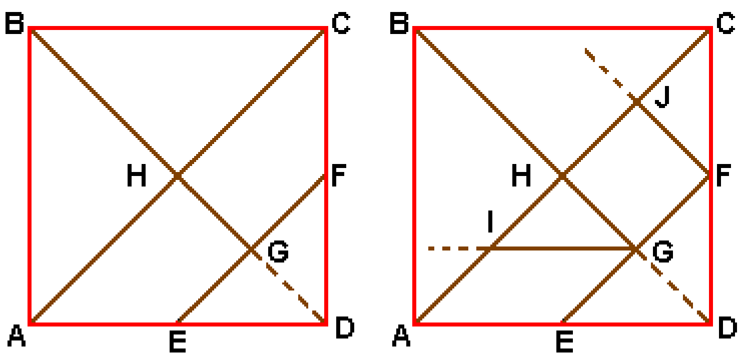

Figura 5. Construcción de un Tangram.

4. Trazar una paralela a *AD* desde el punto *G* que intercepte a *AH* en el punto *I*.

5. Trazar una paralela a *BG* a partir de *F* que intercepte a *CH* en el punto *J*.

La figura 5 (derecha) ejemplifica los pasos finales de la construcción del Tangram, que queda listo para recortar. De 10 a 12 centímetros es una longitud adecuada para el lado del cuadrado inicial.

2. Presentación del Sei Shonagon

Un puzle similar al Tangram es el denominado Sei Shonagon Chie-no-ita, de origen japonés (Rupérez J. A. y García M., 2014, pp. 137-142). El primer libro conocido de este pasatiempo se publicó en Japón en 1742 bajo el nombre: *Las ingeniosas piezas de Sei Shonagon* (*Sei Shonagon Chie-no-ita*).

La denominación del rompecabezas se deriva de Sei Shonagon que era el nombre de una ingeniosa cortesana muy conocida por haber escrito *El libro de la almohada*, donde narra las costumbres de la corte japonesa de aquella época.

Muy posiblemente, esta cortesana dispusiera de un juego de las piezas que componen el rompecabezas y fue a través de este conjunto que ganó la popularidad que tuvo en su tiempo. En lo adelante, denominaremos a este puzle como Seigram. Similar al Tangram, el rompecabezas japonés se obtiene a partir de dividir un cuadrado en siete piezas como se muestra en la figura 6.

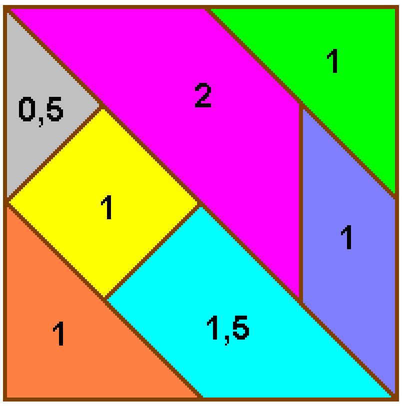

Figura 6. Seigram.

Al igual que se hizo con el Tangram, se toma el valor del lado del cuadrado igual a $2\sqrt{2}$ para que este posea ocho unidades cuadradas de área. Nótese el valor del área de cada pieza que aparece en su interior y como algunas de sus piezas son idénticas a las del Tangram.

De forma similar al rompecabezas chino, los acertijos típicos que se proponen con este puzle parten del contorno o la sombra chinesca de una figura con el objetivo de encontrar como se puede formar con sus piezas.

Con excepción del paralelogramo y del trapecio rectángulo, ninguna de las restantes piezas del Seigram requiere ser virada para obtener una pieza diferente a la que puede obtenerse por una simple rotación (su imagen especular). Al igual que lo explicado para el Tangram, al resolver un problema debe tenerse esta diferencia muy presente, dado que la inversión de una de estas piezas pudiera propiciar la solución.

Construir un Seigram es relativamente fácil, basta seguir los siguientes pasos:

1. Construir un cuadrado *ABCD* y trazar la diagonal *BD*.

2. Hallar los puntos medios de *AB*(*F*), *BC(G)*, *CD(H)* y *AD(E)*. Trazar los segmentos *FE* y *GH*.

3. Trazar una diagonal discontinua desde *A* hacia C y nombrar como I, J y K a los puntos que cortan a los segmentos FE, BD y GH, respectivamente.

La figura 7 (izquierda) ejemplifica los tres primeros pasos.

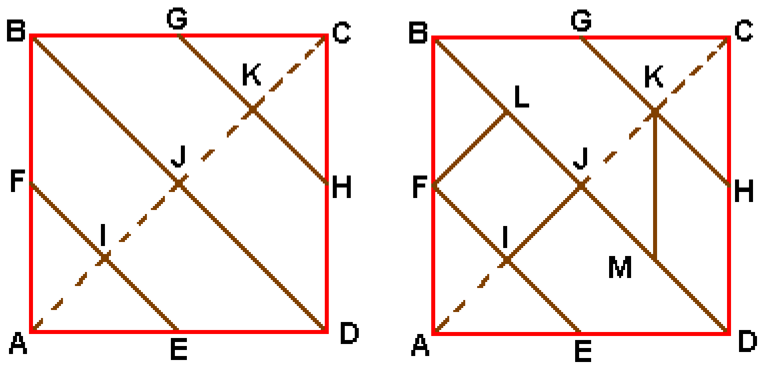

Figura 7. Construcción de un Seigram.

4. Hallar el punto medio del segmento *BJ* (*L*) y trazar los segmentos *FL* e *IJ*.

5. Trazar una paralela a *CD* a partir de *K* hasta que intercepte a *BD* en el punto *M*.

La figura 7 (derecha) ejemplifica los pasos finales de la construcción del Seigram, que queda listo para recortar.

La figura 8 muestra algunas figuras formadas con las piezas del Seigram; de izquierda a derecha: casa, cisne, embarcación y pez.

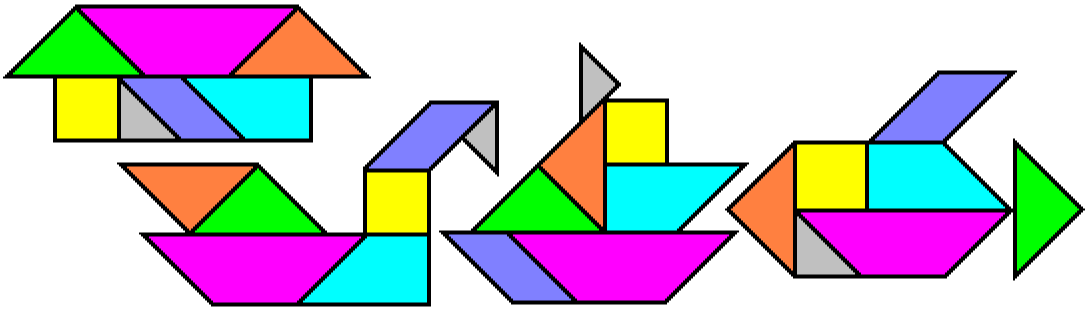

Figura 8. Figuras formadas con el Seigram.

3. Escenarios geométricos

A continuación, se consideran algunos escenarios o situaciones geométricas donde se muestra el desenvolvimiento de cada puzle.

3.1. Figuras convexas

Fu Traing Wang y Chuan-Chih Hsiung de la Universidad Nacional de Chekiang en China demostraron 1n 1942 que se podían formar 13 figuras convexas con las piezas del Tangram (Gardner, M., 1988, pp. 38-54). En la demostración, dividieron las figuras mayores del Tangram en triángulos iguales a los más pequeños, quedando el Tangram dividido en 16 triángulos como se muestra en la figura 9.

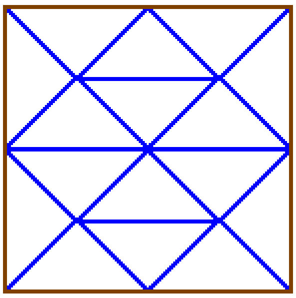

Figura 9. División del Tangram en 16 triángulos.

El próximo paso fue formar todos los posibles polígonos convexos con estos triángulos donde obtuvieron un total de 20 (Fox-Epstein, E. y Uehara, R.., 2014, pp. 1-6). La figura 10 muestra estos polígonos.

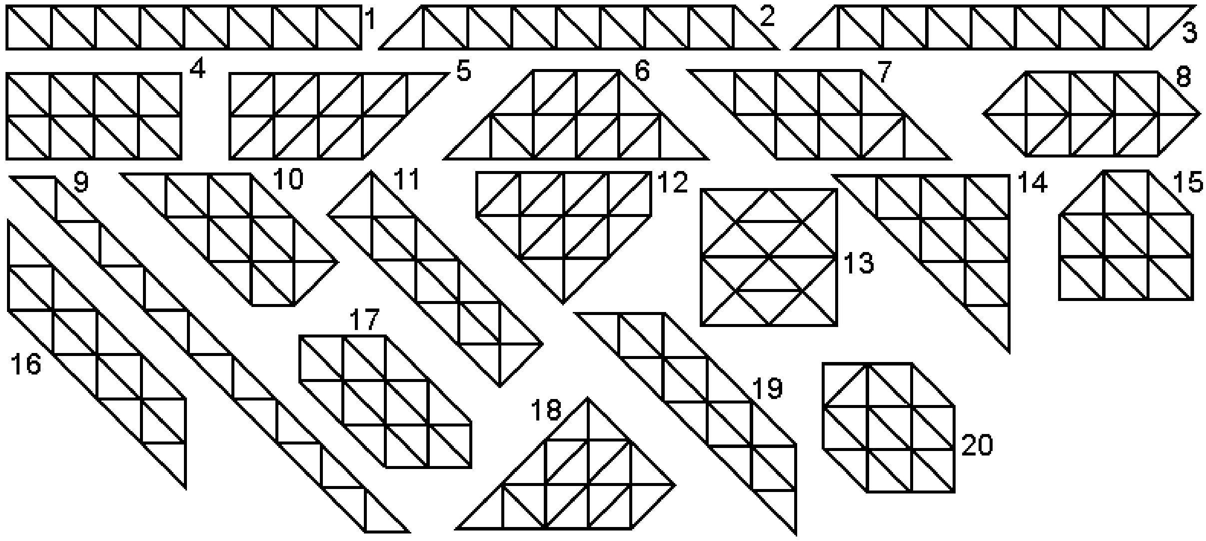

Figura 10. Los 20 polígonos convexos potenciales.

El paso final fue encontrar dentro de estos polígonos potenciales en cuáles se podían colocar las siete piezas del Tangram. Solo 13 de estos polígonos cumplieron con esta condición y son, por tanto, los únicos polígonos convexos factibles de ser formados con el Tangram (figura 11).

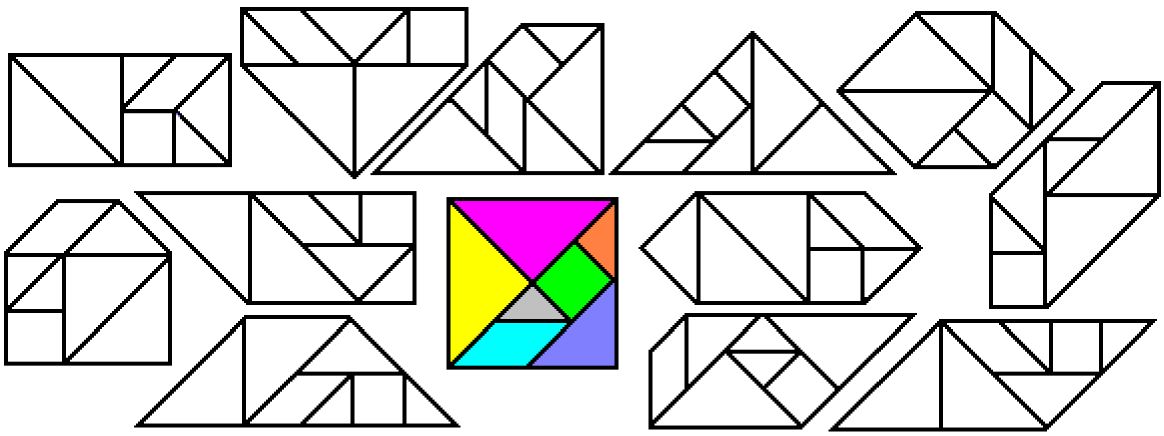

Figura 11. Los 13 polígonos convexos.

El método seguido por los matemáticos chinos, merece un reconocimiento por su objetividad, simpleza y elegancia; sin perder, en lo más mínimo, nada de formalidad.

Siguiendo un procedimiento similar se llega a los 16 polígonos convexos posibles de ser formados con el Seigram (figura 12).

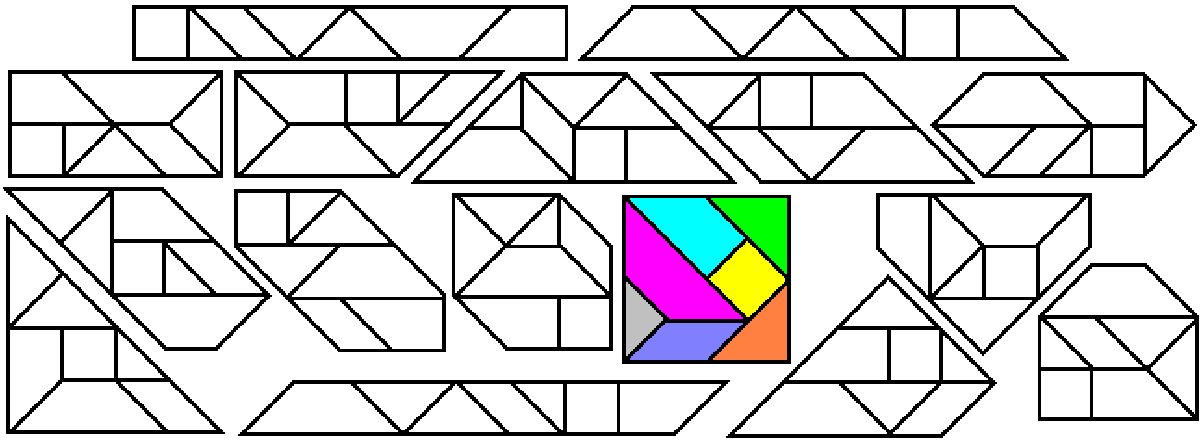

Figura 12. Los 16 polígonos convexos.

Nótese que las piezas del cuadrado están ubicadas de forma diferente a la mostrada en la presentación del Seigram (figura 6).

Es de destacar la cantidad de figuras geométricas que se pueden formar con ambos rompecabezas, con todas o algunas de sus piezas: cuadrados, rectángulos, triángulos, paralelogramos y trapecios; por lo que son ideales como elementos auxiliares para la enseñanza de la geometría.

3.2. Cuadrado singular

La figura 13 muestra un cuadrado de lado 3 con un agujero cuadrado unidad en su centro construido de dos formas diferentes, salvo simetrías y/o rotaciones, utilizando las piezas del Seigram.

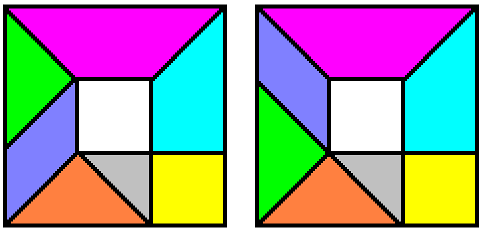

Figura 13. Cuadrado singular.

Este cuadrado, sin embargo, es imposible de ser construido con un Tangram como se demuestra a continuación. La figura 14 muestra en su parte izquierda el cuadrado con un agujero cuadrado de lado unidad en su centro y las distancias entre este orificio cuadrado y el cuadrado exterior. A su derecha se muestra uno de los triángulos mayores del Tangram con sus dimensiones.

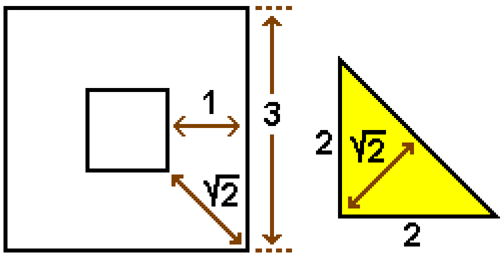

Figura 14. Planteamiento del problema.

Resulta evidente que los triángulos mayores solo pueden colocarse en dos esquinas opuestas como se muestra en el primer paso de la demostración (figura 15). En cada paso, se sombrea el área que se cubre en ese momento quedando en blanco el resto del área a cubrir.

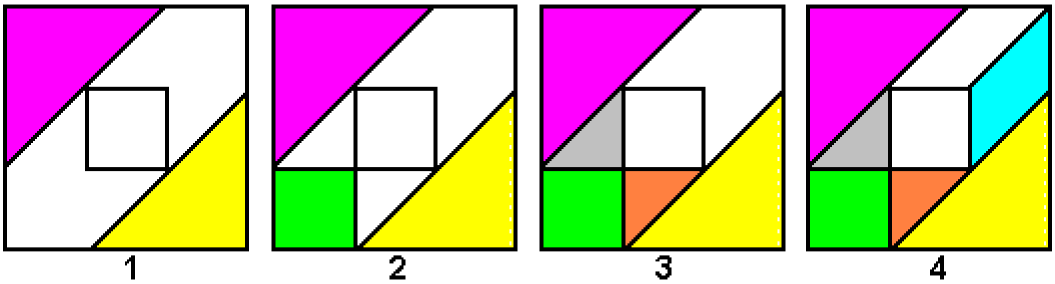

Figura 15. Pasos de la demostración.

Para continuar, se añade la pieza cuadrada en una de las esquinas restantes, que resultan ser las únicas dos posiciones posibles (paso 2). Note que hasta aquí, ha sido obligatoria la colocación de estas tres piezas, salvo reflexiones y o rotaciones.

Los espacios aledaños al cuadrado solo pueden ser ocupados por los triángulos menores, de ahí la obligatoriedad de llenarlos con estos, dado que en estos espacios no pueden ubicarse ni el triángulo mediano ni el paralelogramo (paso 3).

Ahora, la pieza tipo paralelogramo puede colocarse en dos formas simétricas entre sí. En la extrema derecha de la figura 15 (paso 4) se muestra la colocación del paralelogramo en una de estas posiciones.

Finalmente, nótese que resulta imposible colocar el triángulo mediano en el área faltante, por lo que queda demostrada la imposibilidad de formar con el Tangram un cuadrado de lado 3 con un agujero cuadrado de lado unidad en su centro.

3.3. Los 12 pentaminós

Los pentaminós son piezas conformadas a partir de unir cinco cuadrados iguales entre sí, por al menos, uno de sus lados. Hay 12 pentaminós diferentes salvo simetrías y/o rotaciones (figura 16). Nótese, en la propia figura, la nomenclatura más común para estos (Gardner, M., 1995, pp. 150-161).

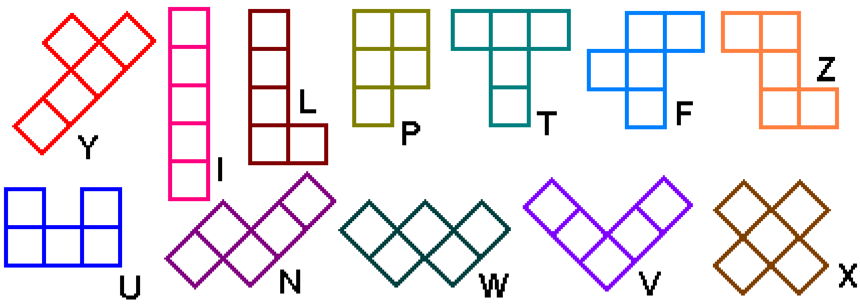

Figura 16. Los 12 pentaminós.

El conjunto de los 12 pentaminós constituye también un puzle de disección con el que se puede construir una gran cantidad de figuras. ¿Cómo se comportarán el Tangram y el Seigram con respecto a la construcción de los 12 pentaminós? La figura 17 muestra la construcción por el Tangram de nueve de los doce pentaminós. A modo de ejemplo, el pentaminó P muestra el valor de las áreas de cada pieza que, como es lógico, suman 5 unidades.

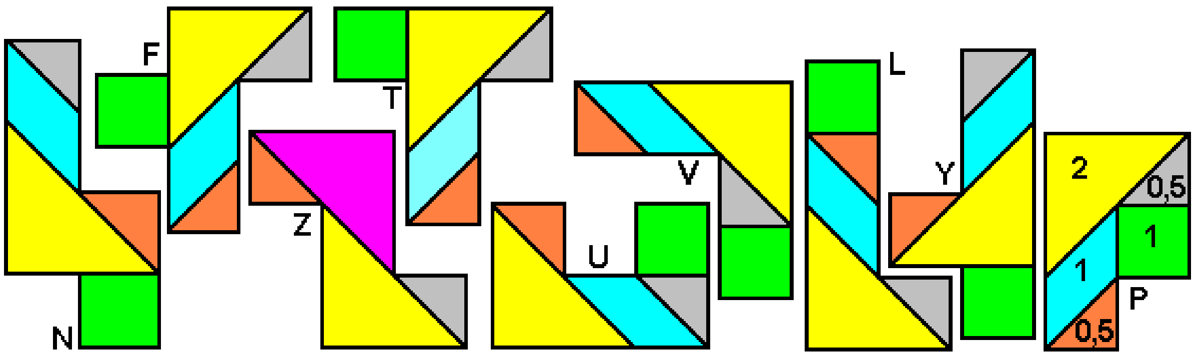

Figura 17. Los nueve pentaminós.

El cuadrado mayor, de uso obligatorio, pues las otras cinco piezas solo cubren cuatro unidades cuadradas es imposible de colocar en los pentaminós restantes (I, W y X).

La figura 18 muestra la construcción, con las piezas de Seigram, de todos los pentaminós con excepción del pentaminó X. Nuevamente, el pentaminó P muestra el valor de las áreas en cada pieza.

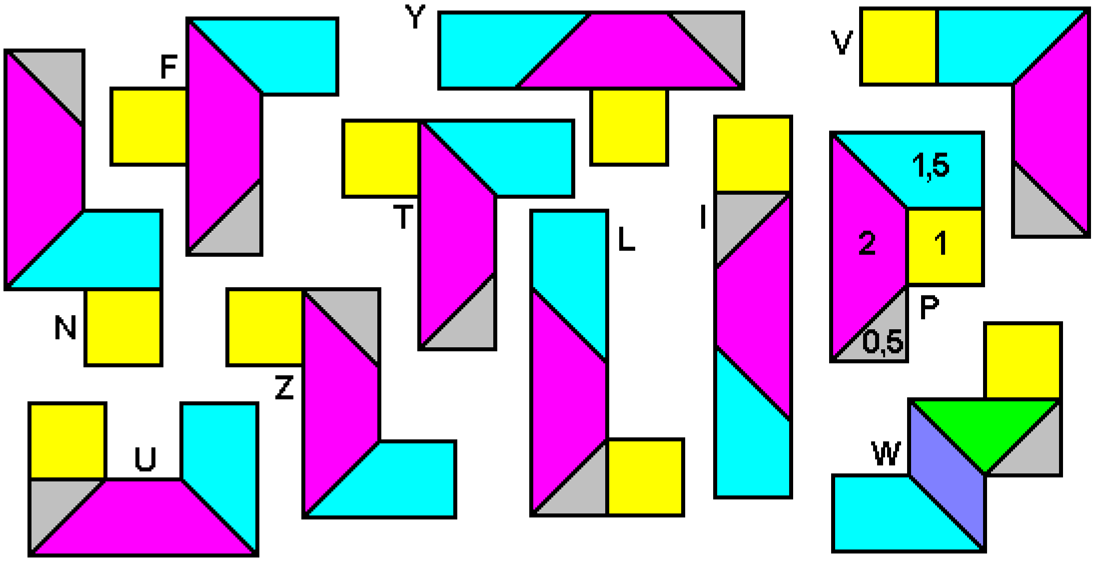

Figura 18. Los 11 pentaminós.

3.4. Los cinco tetraminós

Los tetraminós son piezas conformadas a partir de unir cuatro cuadrados iguales entre sí, por al menos, uno de sus lados. Hay cinco tetraminós diferentes salvo simetrías y/o rotaciones. Los tetraminós son elementos fundamentales del juego electrónico conocido como Tetris al que le dan, precisamente, su nombre.

En el caso de los tetraminós ambos puzles se comportan de manera similar, pudiéndose formar la totalidad de estos como se muestra en la figura 19.

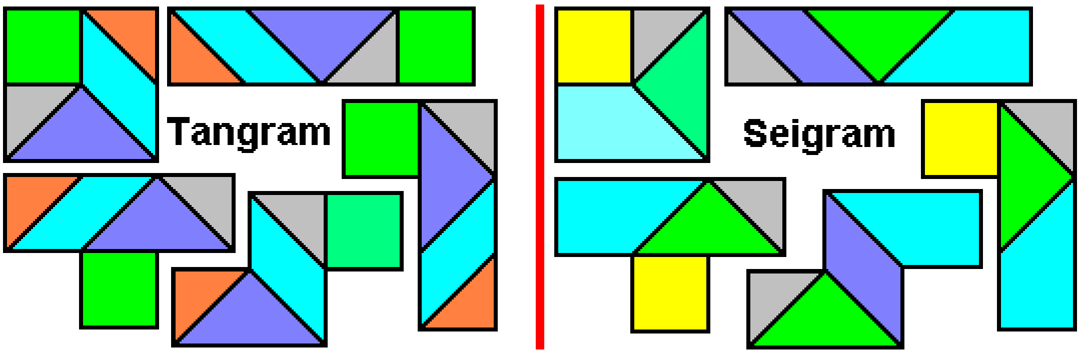

Figura 19. Los cinco tetraminós.

3.5. Formación de triángulos utilizando desde dos hasta siete piezas

La figura 20 muestra cómo se pueden construir triángulos con los dos rompecabezas utilizando desde dos hasta siete piezas, con la notable excepción del caso de seis piezas, que puede probarse que es imposible de formarse en ambos casos.

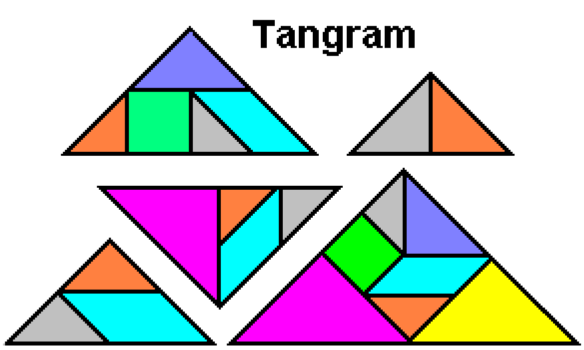

Figura 20. Triángulos.

3.6. Formación de cuadrados utilizando desde dos hasta cinco piezas

La figura 21 muestra como en este caso el Tangram resulta superior al Seigram, dado que, para este último rompecabezas, solo es posible formar dos de los cuadrados. Al igual que ocurre con los triángulos, en ambos puzles son imposibles la construcción de cuadrados con seis de las piezas.

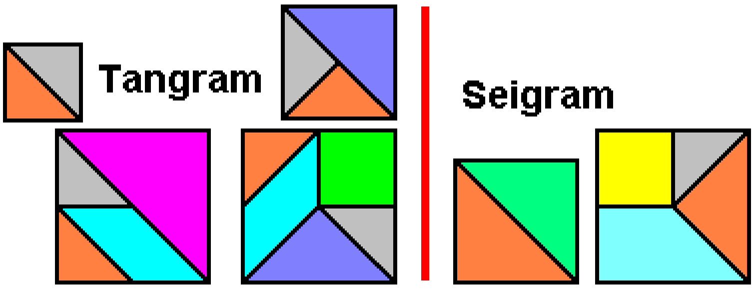

Figura 21. Cuadrados.

4. Conclusiones

Que una figura pueda construirse con un puzle y no con el otro, no implica, para nada, alguna superioridad. De hecho, se han presentado casos en que uno de los puzles puede formar cierta figura que para el otro resulta imposible. Por otra parte, los escenarios geométricos considerados confirman un desenvolvimiento muy similar de ambos rompecabezas, así como la posibilidad de poder utilizarlos como auxiliares en la enseñanza de la geometría.

En cuanto a la popularidad del Tangram sobre el Seigram esta se debe, en gran parte, a la publicación del libro *El octavo libro de Tan* (*The 8th Book of Tan*) por el matemático norteamericano Sam Loyd en 1903 (Loyd, S., 1968). En el libro, Loyd presenta decenas de acertijos del Tangram, muchos de estos de su autoría, que permitieron una notable divulgación de este rompecabezas. En este texto, Loyd explica que los chinos habían escrito una obra monumental: *Los siete libros de Tan* (*The Seven Books of Tan*) unos 4000 años atrás. También se refiere a investigaciones realizadas por personas inexistentes, al igual que los siete libros, que crearon una cierta aureola alrededor del Tangram. Este gran farol histórico incentivó el interés que se creó acerca del libro, así como la popularidad de este pasatiempo. Casi seguro, que de no haber existido la publicación de Loyd, ambos rompecabezas podrían tener una popularidad más pareja.

Con seis piezas de cada uno de los puzles resulta imposible formar un triángulo o un cuadrado; sin embargo, pueden formarse dos diamantes, con igual cantidad de quilates, como se muestra en la figura 22.

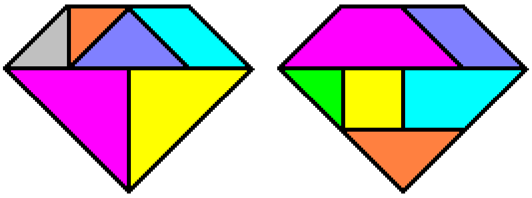

Figura 22. Diamantes de seis piezas.

Es deseo de los autores que sea esta imagen, como conclusión final, la que prime en cualquier reflexión sobre la similitud o igualdad en condiciones de ambos puzles.

Bibliografía

Fox-Epstein, E. y Uehara, R. (2014). The Convex Configurations of “Sei Shonagon Chie no Ita” and Other Dissection Puzzles. *arXiv preprint arXiv:1407*. Consultado en enero de 2023 en: https://arxiv.org/abs/1407.1923.
Gardner, M. (1988). *Time travel and other mathematical bewilderments*. New York: Freeman.
Gardner, M. (1995). *New Mathematical Diversions*. Mathematical Association of America.
Loyd, S. (1968) *Book of tangrams*. New York: Dover.
Rupérez, J. A. y García, M. (2014). Más de Poliprismas: XOMA en perspectiva y derivados de Tangrams. *Números. Revista de Didáctica de la Matemática*, *Volumen 87*, pp. 137-142.

Ramón B. Zubillaga Berazaín. Lic. en Matemáticas de la Universidad de La Habana (1971) y MSc. en Sistemas Digitales, ISPJAE (1976), Cuba. Es autor de los libros *Algo + que Acertijos Matemáticos* (2011); *+ curiosidades y acertijos matemáticos* (2015), *101 acertijos matemáticos* (2017) y *Cuadrados mágicos y otras deidades matemáticas* (2018). Recibió la distinción literaria *La Pluma de Cristal* en enero de 2022. Emails: zubi@infomed.sld.cu

Joel B. Zubillaga Ochoa. Lic. en Contabilidad y Finanzas de la Universidad de La Habana (2014). Ha recibido varios cursos de Postgrado relacionados con su especialidad como parte de una Maestría en Contabilidad que cursa actualmente. Se desempeña como Especialista en Contabilidad en los Laboratorios aica de BioCubaFarma. Email: joelbasiliozubillaga@gmail.com