NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 115, noviembre de 2023, páginas 61-72

Propuesta didáctica apoyada por GeoGebra para la enseñanza de la deducción del volumen de la esfera

Horacio Remigio Hernández
Erika Zubillaga Guerrero
Armando Morales Carballo
(Universidad Autónoma de Guerrero, México)

Fecha de recepción: 27 de mayo de 2023
Fecha de aceptación: 28 de octubre de 2023

Resumen En esta propuesta se describe una alternativa didáctica para la planeación de enseñanza de la deducción del volumen de la esfera dirigida a profesores y estudiantes de Nivel Medio Superior, con el propósito de orientar un proceso de aprendizaje mediante actividades elaboradas secuencialmente que permitan de manera dinámica y visual enriquecer los conocimientos en relación con el volumen, tomando como referente el trabajo de Arquímedes, el Principio de Cavalieri y mediante el uso del software GeoGebra.

Palabras clave Volumen, Esfera, Funciones didácticas, Principio de Cavalieri, GeoGebra.

Abstract This proposal describes a didactic alternative for the teaching planning of the deduction of the volume of the sphere, aimed at teachers and students of the Higher Secondary Level, with the purpose of guiding a learning process through activities sequentially programmed that allow in a dynamic and visual way to enrich knowledge in relation to volume, taking as a reference the work of Archimedes, the Cavalieri's Principle and through the use of the GeoGebra software.

Keywords Volume, Sphere, Didactic functions, Cavalieri's Principle, GeoGebra.

1. Introducción

En la enseñanza del volumen en la escuela mexicana, el profesorado establece una relación entre los conceptos de volumen y capacidad omitiendo que volumen sugiere el espacio ocupado mientras que capacidad es el espacio vacío con posibilidad de ser llenado (Argüelles-Ortiz y Rubio-Pizzorno, 2020). Además, es común la utilización de sólidos selectos, principalmente prismas regulares, para el planteamiento de ejercicios que promueven en los estudiantes la utilización de fórmulas ya establecidas para el cálculo del volumen (Moreno et al., 1998).

En la investigación en Educación Matemática pocos trabajos han considerado el concepto de volumen como objeto de estudio; como ejemplo, Moreno et al. (1998) desarrollaron una estrategia de enseñanza con el objetivo de permitir al estudiante observar, describir, comparar, analizar y establecer conexiones básicas para lograr un aprendizaje comprensivo de conceptos tales como cuerpo, espacio, dimensión, longitud, área, volumen y relaciones entre unidades de medida. Asimismo, Argüelles-Ortiz y Rubio-Pizzorno (2020) integraron en un recurso educativo abierto para la enseñanza de la noción de

volumen diferentes significados como capacidad, volumen ocupado, volumen externo, volumen desplazado y volumen numérico. Argüelles-Ortiz y Rubio-Pizzorno concluyeron que en la enseñanza y aprendizaje del concepto de volumen emergen dificultades teóricas como la comprensión de la relación entre la conservación de masa, peso y volumen, y prácticas como que el alumnado conciba el volumen directamente ligado a una representación estática y plana de figuras tridimensionales. Otro ejemplo puede encontrarse en Baquero-Barbosa (2014), que destacó la relación entre el volumen de un cono, un cilindro y una esfera a través de una propuesta didáctica con el propósito de generar la comprensión del concepto de volumen.

Por otra parte, los planes de estudio de Nivel Medio Superior no consideran la enseñanza del volumen desde un enfoque epistemológico, y se ha identificado, que es frecuente la aproximación al concepto de manera algebraica, como una fórmula sin justificación ni distinción entre las magnitudes y su asignación de medida (Pizarro y Zamorano-Vargas, 2019). Así, desde un enfoque histórico, justamente por ser el más natural e intuitivo para presentar y comprender los entes matemáticos, se retoma en esta investigación una de las primeras propuestas para el cálculo del volumen de la esfera a partir del trabajo desarrollado por Arquímedes y descubierto en 1906 en el Palimpsesto de Arquímedes (Cabero-Fayos, 2019). Arquímedes utilizó el Principio de Cavalieri para determinar el volumen de una esfera de radio *r*, comparándolo con el volumen del cilindro circunscrito a ella y dos conos con radio y altura *r* de tal modo que las caras circulares de los mismos coincidan con las caras circulares del cilindro (Baquero-Barbosa, 2014; Cabero-Fayos, 2019; Cantoral-Uriza y Farfán-Márquez, 2004; Warren-Dauben, 2010). Por lo tanto, en este artículo se presenta una alternativa didáctica para la planeación de enseñanza de la deducción del volumen de la esfera dirigida a estudiantes de Nivel Medio Superior fundamentada en el trabajo de Arquímedes y el Principio de Cavalieri mediante el uso de GeoGebra.

2. Fundamento teórico y metodológico

Esta investigación utiliza como fundamento teórico la resolución de problemas como objeto de enseñanza (Morales-Carballo y Damián-Mojica, 2021) y el uso de GeoGebra como recurso heurístico (Morales et al., 2021). Además, se retoman desde la historia los aportes de los trabajos de Arquímedes y Cavalieri en relación con la deducción del volumen de la esfera (Cantoral-Uriza y Farfán-Márquez, 2004).

Por otra parte, se asume que una estructuración adecuada de la clase puede ayudar a garantizar que el proceso de asimilación sea lo más completo posible, desde asegurar un nivel inicial hasta el logro de los objetivos propuestos (Campistrous y Rizo, 2003). Por lo tanto, esta investigación se sustenta en el referente metodológico de las funciones didácticas en la enseñanza de la matemática (Jungk, 1981).

2.1. Deducción del volumen de la esfera

Dados tres cuerpos, el cilindro, el cono y la semiesfera de mismo radio y altura, los cuales al ser cortados a una misma altura generan superficies circulares cuya área se obtiene tras determinar el radio correspondiente (ver Figura 1). Nótese que;

- El radio de la superficie generada en el cilindro no se modifica para ninguna altura a la cual se haga el corte.

- El radio de la superficie generada en el cono y la altura a la cual se está haciendo el corte corresponden a los catetos de un triángulo rectángulo isósceles.
- El radio de la superficie generada en la semiesfera y la altura a la cual se está haciendo el corte corresponden a los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es el radio de la semiesfera.

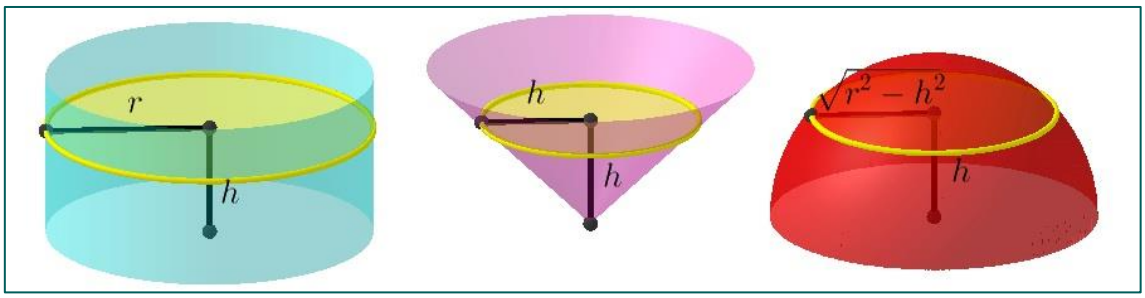

Figura 1. Corte a una misma altura en un cilindro, un cono y una semiesfera. Fuente: elaboración propia.

Así, el área de las superficies circulares queda de la siguiente manera;

- Área de la superficie generada en el cilindro $= \pi r^2$.
- Área de la superficie generada en el cono $= \pi h^2$.
- Área de la superficie generada en la semiesfera $= \pi(r^2 - h^2) = \pi r^2 - \pi h^2$.

Nótese que el área de la superficie generada en la semiesfera equivale a la diferencia del área de las superficies generadas en el cilindro y el cono respectivamente. De ahí que, con el principio de Cavalieri el cual indica que: "Si dos sólidos, al ser cortados por planos paralelos, producen siempre secciones de igual superficie entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen" (Cabero-Fayos, 2019, p. 566) se determina que la esfera es igual en volumen que el doble del volumen del cilindro menos el doble del volumen del cono, es decir;

$$\text{Volumen de la esfera} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

2.2. Resolución de problemas como objeto de enseñanza

La deducción del volumen de la esfera se aborda desde la resolución de problemas como objeto de enseñanza (Morales-Carballo y Damián-Mojica, 2021), al no limitar las actividades y procesos de resolución a una búsqueda, sino generar las condiciones para comprender el contenido que está alrededor de los conceptos, propiedades y condiciones que estructuran la situación de estudio.

Por otra parte, se asume que un problema posee las siguientes características: existe una situación inicial y una situación final; la vía de pasar de la situación inicial a la situación final es desconocida; existe la persona que quiera resolver dicha situación y finalmente, la persona debe disponer de los elementos necesarios para la resolución (Morales et al., 2021).

2.3. GeoGebra como recurso heurístico

Adicionalmente la propuesta considera el uso del software GeoGebra, que permite la visualización y manipulación de los elementos del objeto matemático de estudio, posibilitando la

construcción del razonamiento geométrico y consecuentemente el aprendizaje del estudiante a través de entornos virtuales (Morales et al., 2021; Teófilo de Souza et al., 2022).

2.4. Las funciones didácticas en la enseñanza de la matemática

Este trabajo considera una propuesta de carácter metodológico al proveer un método de enseñanza (Morales-Carballo et al., 2019) que se constituye de las siguientes fases referidas como las funciones didácticas en la enseñanza de la matemática de acuerdo con Jungk (1981): aseguramiento del nivel de partida, orientación hacia el objetivo, acción motivadora, tratamiento del nuevo conocimiento, fijación del nuevo contenido y evaluación, funciones que en ese orden favorecen el proceso de enseñanza al guiar la planificación, estructuración y realización de las clases.

2.4.1. Fases metodológicas

De acuerdo con Jungk (1981), la enseñanza es un proceso donde cada eslabón cumple con una función dentro del proceso general. Dichos eslabones corresponden a las funciones didácticas:

- Preparación de la nueva materia con el aseguramiento del nivel de partida, motivación y orientación hacia el objetivo.
- Trabajo en la nueva materia con la elaboración de nuevo conocimiento y capacidad de aplicación.
- Trabajo con la nueva materia a partir de la fijación, control y evaluación.

Fase 1. *Aseguramiento del nivel de partida*. Contempla el desarrollo de actividades que permitan conocer y asegurar que los estudiantes poseen los conocimientos, capacidades y habilidades necesarias para el logro del objetivo.

Fase 2. *Orientación hacia el objetivo*. Comprende tener claridad sobre las condiciones de partida, por ejemplo, los conocimientos previos de los estudiantes, y de cómo será la vía por la que se desea alcanzar el objetivo. Para lo cual se debe guiar al estudiante mediante actividades estructuradas de forma cronológica que conduzcan al logro del objetivo.

Fase 3. *Motivación*. Debe estar presente en todo momento mediante actividades que lleven a los estudiantes a la noción de por qué es valioso alcanzar el objetivo. Para ello debe considerarse una primera fase de motivación del trabajo con el problema planteado y una segunda fase de motivación sobre la la vía con la que debe resolverse dicho problema.

Fase 4. *Elaboración de la nueva materia*. Se refiere a la formación de conceptos matemáticos y sus definiciones, teoremas y sus demostraciones, y la capacidad de aplicación de procedimientos de carácter algorítmico y heurístico de los estudiantes.

Fase 5. *Fijación*. Se propicia a partir de la adquisición de conocimiento (conceptos, teoremas y procedimientos), ya que esto lleva a los estudiantes a la formación y desarrollo de capacidades y habilidades (definir, demostrar, construir figuras geométricas, entre otros). Así, se reconocen las siguientes formas de fijación: ejercitación, profundización, aplicación, sistematización y repaso.

Fase 6. *Control y evaluación*. La intención es verificar los aprendizajes adquiridos por los estudiantes poniendo en práctica lo aprendido durante la realización de las actividades planteadas en la propuesta, es decir, el aseguramiento del logro del objetivo.

3. Estrategia didáctica

En consideración a las funciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas (Jungk, 1981), se desarrolló una propuesta didáctica hacia el tratamiento específico de la deducción del volumen de la esfera dirigido a profesores y estudiantes de Nivel Medio Superior. A través de las actividades propuestas, los usuarios podrán reconocer el comportamiento del volumen de algunos cuerpos geométricos con base en sus características específicas. Además de identificar el principio de Cavalieri a través de la relación del volumen de prismas rectos y prismas oblicuos de misma base y altura con la finalidad de deducir el volumen de la esfera de radio *r*.

Por otra parte, la validación del diseño de actividades que constituyó la propuesta didáctica centrada en la deducción del volumen de la esfera se llevó a cabo considerando el criterio de expertos: participaron dos profesores-investigadores con dominio del contenido matemático abordado, doctores y especialistas en Educación Matemática.

3.1. Actividad 1

El propósito de esta actividad es identificar la relación del volumen de un prisma recto y uno oblicuo de misma base y altura; así como inferir si existe alguna relación entre el volumen de un prisma y su área. La actividad 1 refiere a la Fase 1: aseguramiento del nivel de partida.

A partir del uso del software GeoGebra realizar las siguientes acciones (se producirá lo visualizado en la Figura 2):

- Construir un hexágono regular con vértices en las coordenadas (-2,0) y (0,0), uno con vértices en las coordenadas (3,0) y (5,0) y otro con vértices en las coordenadas (8,0) y (10,0).
- Desde la Vista Gráfica 3D crear el prisma regular hexagonal con base el primer hexágono construido y 5 unidades de altura.
- Crear además la paralela al eje X sobre el eje Z en el vértice de la cara hexagonal superior del prisma construido.
- Construir ahora el segundo prisma seleccionando los vértices correspondientes al segundo hexágono, iniciar desde uno de sus vértices sobre el eje X y terminar en el mismo punto, seguido de un punto sobre la paralela al eje X antes creada (este punto podrá desplazarse sobre la recta que le contiene, distorsionando así el prisma de manera horizontal).
- Crear una paralela al eje Z, sobre el punto (10, 0, 0), un segmento seleccionando los vértices más próximos al punto (8, 0, 0) del tercer hexágono y una paralela a dicho segmento que pase por la intersección de las otras dos creadas anteriormente, es decir, el punto (10, 0, 5).
- Construir el tercer prisma seleccionando los los vértices consecutivamente del tercer hexágono como se hizo para el segundo prisma y un punto sobre la última paralela trazada (este punto podrá desplazarse sobre la recta que le contiene, distorsionando así el prisma de manera horizontal).

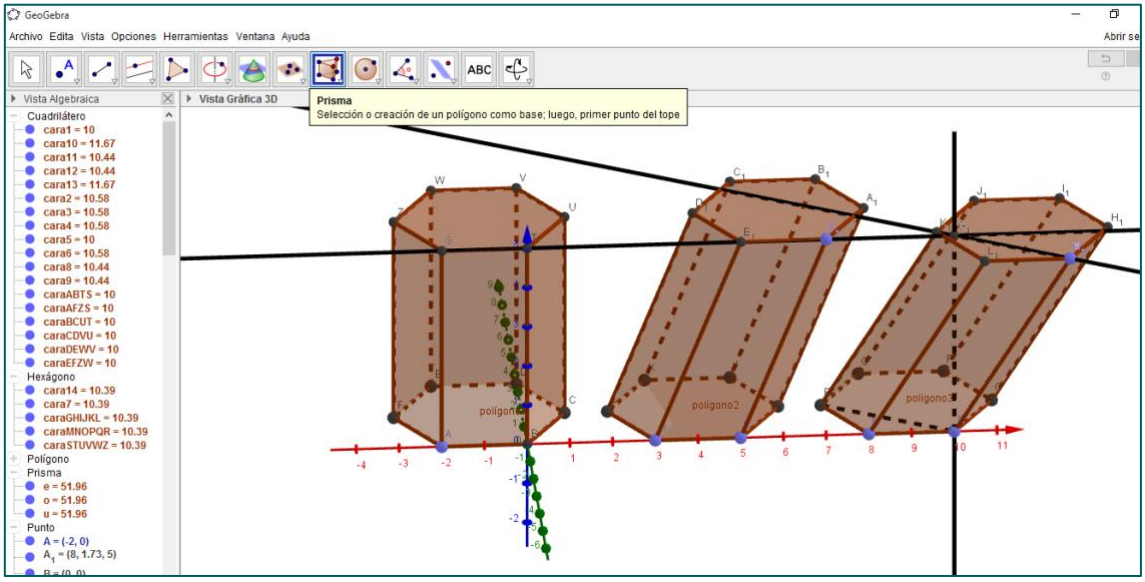

Figura 2. Construcción de los prismas mediante el uso de GeoGebra. Fuente: elaboración propia.

- Para un mejor análisis de la información visual, seleccionar para cada polígono desde la vista algebraica un color distinto. Nótese que los elementos de cada polígono aparecen del mismo color en la vista algebraica y que los puntos F1 y M1 permiten modificar la inclinación de los prismas 2 y 3, respectivamente (ver Figura 3).

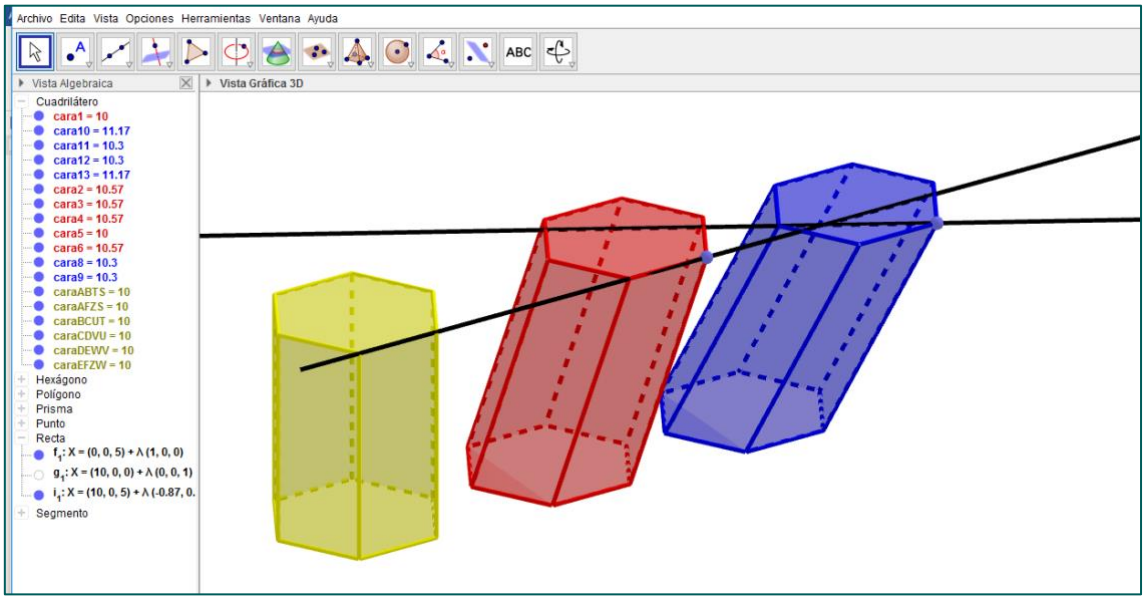

Figura 3. Prismas rectos y oblicuos. Fuente: elaboración propia.

Contestar el siguiente cuestionario:

1. ¿Qué ocurre con las áreas de las caras laterales del segundo prisma respecto al primero? Argumente su respuesta.
2. ¿Por qué sin importar la distorsión del segundo prisma, las áreas de dos caras laterales de este siempre coinciden con las del primero? Argumente su respuesta.
3. ¿Por qué esto no ocurre con el tercer prisma respecto al primero? Argumente su respuesta.
4. En la vista algebraica se puede visualizar que el volumen de los tres prismas no se modifica ¿Por qué ocurre eso? Argumente su respuesta.
5. ¿Cómo defines que dos prismas tienen el mismo volumen? Justifique su respuesta.
6. ¿Es necesario, según su definición, que ambos prismas tengan la misma figura como base? Argumente su respuesta.
7. Según su definición, si dos prismas tienen el mismo volumen y la misma altura y ambos son cortados horizontalmente a una misma altura, ¿cómo defines que las partes de uno de los prismas tienen el mismo volumen con sus respectivas partes del otro prisma? Justifique su respuesta.

3.2. Actividad 2

El propósito de esta actividad es argumentar la igualdad de volumen entre dos cuerpos de mismas proporciones; la esfera y el cuerpo delimitado por las superficies cónicas y el cilindro. La actividad 2 refiere a la Fase 2: motivación.

Como se muestra en la Figura 4, considere una esfera y un cuerpo geométrico delimitado por las caras curvas de dos conos de radio igual a su altura y un cilindro de diámetro igual a su altura.

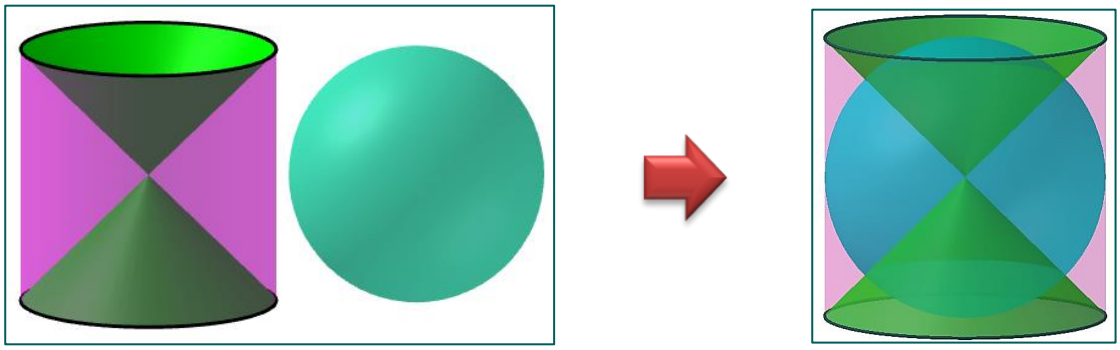

Figura 4. Cuerpo con relación en volumen con la esfera. Fuente: elaboración propia.

Contestar el siguiente cuestionario:

1. ¿Cuál es la relación de volumen de los cuerpos descritos? Argumente su respuesta.
2. Exprese el volumen de los dos cuerpos en su forma algebraica. Justifique su respuesta.

3.3. Actividad 3

El propósito de esta actividad es identificar la relación del volumen entre dos cuerpos de mismo volumen cortados a una misma altura. La actividad 3 refiere a la fase 4: elaboración de la nueva materia.

Considere dos pirámides de altura 10 unidades, la primera de base cuadrada de 6 unidades de cada lado y la segunda de base un triángulo de las siguientes dimensiones 17 unidades, 10 unidades y 9 unidades; además de un corte a los dos cuerpos a una altura de 5 unidades (ver Figura 5).

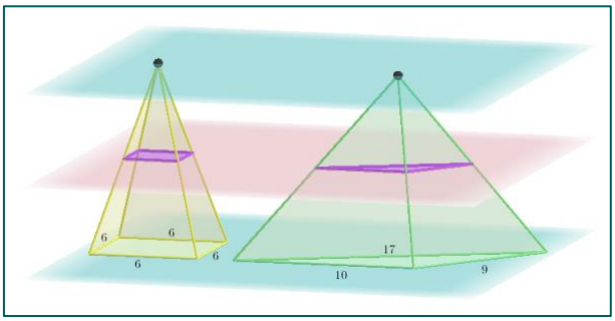

Figura 5. Pirámides de igual altura y volumen. Fuente: elaboración propia.

Contestar el siguiente cuestionario:

1. ¿El volumen de las pirámides es igual? Argumente su respuesta.
2. ¿Las superficies generadas por el corte en las pirámides son de igual área? Justifique su respuesta.
3. ¿El volumen de la parte inferior de la pirámide triangular es igual al volumen de la parte inferior de la otra? Argumente su respuesta.
4. ¿El volumen de la parte superior de la pirámide triangular es igual al volumen de la parte superior de la otra? Argumente su respuesta.
5. ¿La relación se mantiene para cualquier altura a la que se haga el corte? Justifique su respuesta.
6. ¿Qué condiciones permiten deducir que dos cuerpos tienen el mismo volumen?
7. Si el corte se realiza no paralelo al plano que contiene las bases de los cuerpos, ¿las superficies generadas en los mismos serán de igual área? Argumente su respuesta.

3.4. Actividad 4

El propósito de esta actividad es identificar la relación de las áreas circulares generadas a una misma altura en una semiesfera, un cono y un cilindro. La actividad 4 refiere a la Fase 4: elaboración de la nueva materia.

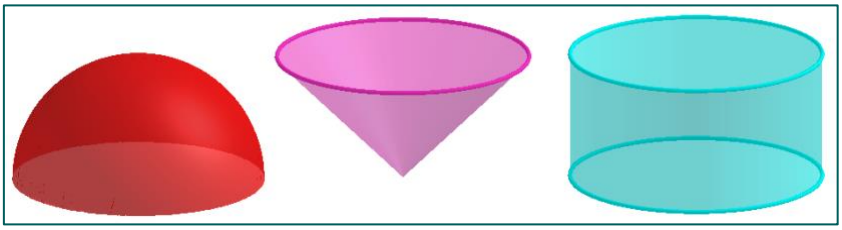

Figura 6. Cuerpos de radio y altura de 10 cm. Fuente: elaboración propia.

Considere una semiesfera, un cono y un cilindro, todos de radio y altura 10 cm (ver Figura 6). Además, considere un corte de manera horizontal en los tres cuerpos a una altura de 5 cm.

Contestar el siguiente cuestionario:

1. ¿Cuál es el área de la superficie generada por el corte en la semiesfera? Justifique su respuesta.
2. ¿Cuál es el área de la superficie generada por el corte en el cono? Justifique su respuesta.
3. Verifique ¿el área de la superficie en la semiesfera más al área de la superficie en el cono equivale al área de la superficie generada por el corte en el cilindro?
4. ¿Sucede lo mismo si el corte se hace a una altura de 0 cm? Argumente su respuesta.
5. ¿Sucede lo mismo si el corte se hace a una altura de 10 cm? Argumente su respuesta.

3.5. Actividad 5

El propósito de esta actividad es identificar la relación de las áreas circulares generadas a una misma altura en una semiesfera, un cono y un cilindro. La actividad 5 refiere a la Fase 5: fijación.

Como se muestra en la Figura 7, considere nuevamente una semiesfera, un cono y un cilindro, ahora todos de radio y altura *r*, a los que se le corta a una altura *h* por un plano paralelo a las bases de los cuerpos, donde

S1= Superficie generada por el corte en la semiesfera.

S2= Superficie generada por el corte en el cono.

S3= Superficie generada por el corte en el cilindro.

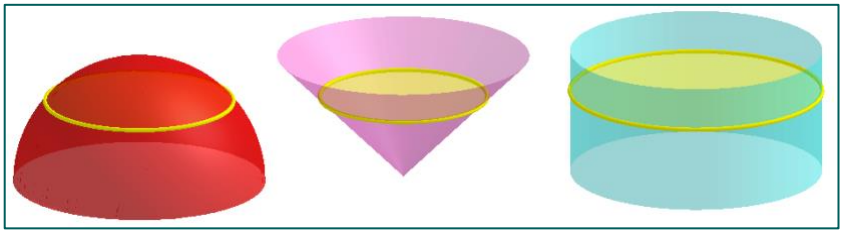

Figura 7. Cuerpos de mismo radio y altura cortados a una misma altura. Fuente: elaboración propia.

Contestar el siguiente cuestionario:

1. ¿Cuál es el área de la superficie S1?
2. ¿Cuál es el área de la superficie S2?
3. ¿Qué relación existe entre S1, S2 y S3?
4. Según su definición para prismas de mismo volumen, ¿qué sólido tiene el mismo volumen que la semiesfera?
5. El principio de Cavalieri indica que: “Si dos sólidos, al ser cortados por planos paralelos, producen siempre secciones de igual superficie entonces estos cuerpos tienen el mismo volumen”. De lo anterior y utilizando este principio ¿cuál es el volumen de una esfera de radio *r*? Argumente su respuesta.

3.6. Actividad 6

El propósito de esta actividad es determinar la relación del volumen de un cilindro, una esfera y un cono. La actividad 6 refiere a la Fase 6: control y evaluación.

Considere la siguiente situación: se tiene un tronco cilíndrico de madera tal que el diámetro de las bases es igual a la longitud de este, del cual se pretende obtener una esfera lo más grande posible.

Contestar el siguiente cuestionario:

1. ¿Cuál es el volumen total que se requiere eliminar del tronco?
2. En términos del volumen original del tronco, ¿cuánta madera se desperdiciará? Argumente su respuesta.
3. ¿Cuál es la relación del volumen de la esfera con el del cilindro? Argumente su respuesta.
4. Si en lugar de una esfera se pretende obtener un cono de misma base y altura que el cilindro, ¿cuál es el volumen total que se requiere eliminar del tronco?
5. En términos del volumen original del troco, ¿cuánta madera se desperdiciará? Argumente su respuesta.
6. ¿Cuál es la relación entre volumen del cono y el del cilindro? Argumente su respuesta.

3.6. Actividad 7

El propósito de esta actividad es determinar el volumen de la esfera respecto de su radio. La actividad 7 refiere a la Fase 6: control y evaluación.

Determine el volumen de un cuerpo esférico cuyo radio es de 0.12 metros. Además, encuentre y describa otro cuerpo que por el principio de Cavalieri tenga el mismo volumen.

4. Conclusiones

La propuesta didáctica presenta de una manera distinta el tratamiento en la enseñanza y aprendizaje de la deducción del volumen de la esfera. Además, el trabajo no enfatiza la presentación clásica del concepto, sino que pretende, mediante el desarrollo de actividades, redescubrir su significado, y enriquecer la práctica de enseñanza desde un enfoque histórico –en contraste con la visión de la matemática presentada como un producto intelectual acabado y pulido– que incida en las problemáticas identificadas en la presentación clásica del volumen de la esfera.

Con este trabajo se espera contribuir con una alternativa didáctica para intervenir en la enseñanza de la deducción del volumen de la esfera en el Nivel Medio Superior, donde el uso del software GeoGebra pretende favorecer la actividad heurística propiciando elementos importantes para la comprensión como el desarrollo del proceso de conjeturación y principios de generalización. Asimismo, esta propuesta responde a la necesidad de herramientas didácticas para el profesor que favorezcan en los estudiantes la habilidad de justificar, comprender por qué un enunciado matemático es verdadero y comprender de dónde proviene una regla matemática o fórmula; además de desarrollar habilidades de tipo procedimental.

Bibliografía

Argüelles-Ortiz, A. R., y Rubio-Pizzorno, S. A. (2020). Recurso educativo abierto para la construcción de diferentes significados asociados al volumen de cuerpos geométricos. En F. Macías Romero y D. Herrera Castro. (Eds.), *Matemáticas y sus aplicaciones 15* (pp. 75 - 100). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Baquero-Barbosa, C. D. (2014). Una propuesta didáctica para la enseñanza del concepto de volumen dirigida a estudiantes de grado octavo [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Bogotá, Colombia]. Archivo digital. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/54358

Cabero-Fayos, I. (2019). Demostración del volumen de la esfera, una muestra genético-histórica. *Opción: Revista de Ciencias Humanas y Sociales*, *90*, 542-575. https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8190031.pdf

Cantoral-Uriza, R. y Farfán-Márquez, R. M. (2004). Desarrollo Conceptual del Cálculo. Thomson Learning, Inc.

Campistrous, L. y Rizo, C. (2003). Sobre la estructura didáctica y metodología de las clases. La Habana: ICCP.

Jungk, W. (1981). Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la matemática 2. Segunda parte. Pueblo y Educación.

Morales-Carballo, A. y Damián-Mojica, A. (2021). Estrategia didáctica fundamentada en el uso de GeoGebra para mejorar la comprensión del concepto de semejanza de triángulos. *Innovación Educativa*, *21*(87), 11-34.

Morales, A., Mojica, A. D., Balbuena, S., & Marmolejo, J. E. (2021). Trayectoria hipotética de aprendizaje de las transformaciones isométricas durante el cálculo del área de polígonos a través del uso de GeoGebra. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *108*, 161-177. http://funes.uniandes.edu.co/23615/1/Morales2021Trayectoria.pdf

Morales-Carballo, A., Marmolejo-Valle, J. E., Ríos-Parra, B. y Damián-Mojica, A. (2019). Propuesta teórico-didáctica para la enseñanza y aprendizaje del concepto del área. *Premisa*, *21*(81), 5-20.

Moreno, A., Bulla, B., Giraldo, N., Mantilla, A y Mantilla, M. (1998). Introducción a la medida del volumen. *EMA*, *3*(3). http://funes.uniandes.edu.co/1082/1/44_Moreno1998Introducci%C3%B3n_RevEMA.pdf

Pizarro, N., y Zamorano-Vargas, A. (2019). Factores que inciden en la enseñanza del volumen: un estudio de la práctica docente. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(1), 610-618. http://funes.uniandes.edu.co/14011/

Teófilo de Sousa, R., Vieira Alves, F. R. y Ferreira de Azevedo, I. (2022) Una propuesta didáctica apoyada por GeoGebra para la enseñanza del Principio de Cavalieri. *Números, revista de didáctica de las matemáticas*, *110*, 41-60. http://sinewton.es/publicacion-numeros/articulo-3-110/

Warren-Dauben, J. (2010) Archimedes and Liu Hui on Circles and Spheres. *Ontology studies*, *10*, 21-38. https://ddd.uab.cat/pub/ontstu/15762270n10/15762270n10p21.pdf

Horacio Remigio Hernández. Estudiante de la Licenciatura en Matemática Educativa de la Escuela Superior de Matemáticas No. 2 de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. Nacido en Tejupilco, México. Ponente de trabajos en didáctica de la matemática a nivel nacional. Email: horacioremigiohernandez@gmail.com

Erika Zubillaga Guerrero. Escuela Superior de Matemáticas No. 2 de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. Nacida en Ajuchitlán del Progreso, Guerrero, México. Doctora en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la UAGro. Autora de artículos de investigación en didáctica de la matemática publicados en revistas internacionales con temática en nivel educativo superior sobre comprensión conceptual e historia y epistemología de las matemáticas. Email: eguerrero@uagro.mx

Armando Morales Carballo. Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), México. Nacido en Hueycantenango, Guerrero, México. Doctor en Ciencias con Especialidad en Matemática Educativa por la UAGro. Autor de varios capítulos de libro y de artículos de investigación en didáctica de la matemática, la mayoría de los trabajos están publicados en revistas internacionales, en distintos niveles educativos y áreas de la disciplina. Email: armandomorales@uagro.mx