UM RECURSO PARA O ENSINO DAS NOÇÕES INTUITIVAS DE LIMITE E CONTINUIDADE DE FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL A VALORES REAIS

A resource for teaching the intuitive notions of limit and continuity of real-valued functions of a real variable

Francisco Eteval da Silva Feitosa

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar um recurso para o ensino das noções intuitivas de limite e continuidade de funções de uma variável real. Tomamos por referenciais teóricos os constructos da Gênese Documental de Gueudet e Trouche referentes à elaboração de documentos, de David Tall com vistas ao favorecimento da formação de conceitos matemáticos e das Representações Semióticas de Raymon Duval. Os procedimentos metodológicos propiciam o material resultante a pretender se inserir no conjunto de recursos de um professor. A pesquisa é parte de um projeto de pesquisa de pós-doutoramento que visa a contribuir com professores de Cálculo apresentando materiais referenciados em pesquisas, com vistas a favorecer a integração teoria e prática no campo de pesquisa em Educação Matemática.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo; Limite e Continuidade; Gênese Documental; Representações Semióticas.

Abstract

This work aims to present a resource for teaching intuitive notions of limit and continuity of real-valued functions of a real variable. We take as theoretical references the constructs of Gueudet and Trouche's Documentary Genesis referring to the elaboration of documents, by David Tall to favor the formation of mathematical concepts and Raymon Duval's Semiotic Representations. The methodological procedures provide the resulting material to be included in a teacher's set of resources. The research is part of a post-doctoral research project that aims to contribute with professors of Calculus presenting materials referenced in research, to favor the integration of theory and practice in the field of research in Mathematics Education.

Keywords: Calculus teaching; Limit and Continuity; Documentary Genesis; Semiotic representations.

Introdução

Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014) fazem um balanço parcial do estado atual das pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Cálculo, exemplificando tanto a promessa de avanços nestas pesquisas, quanto as suas limitações. Observam que estas têm seguido um padrão e se enquadram em uma das seguintes quatro categorias: (1) as que buscam identificar e estudar as dificuldades e obstáculos cognitivos dos alunos, (2) as que investigam os processos pelos quais os alunos aprendem, (3) as pesquisas acerca dos conhecimentos, crenças e práticas dos professores e (4) os estudos em sala de aula, incluindo os efeitos das inovações pedagógicas na aprendizagem dos alunos. Este trabalho se insere na última categoria.

Para Robert e Speer (2001) o campo da pesquisa em ensino e aprendizagem de cálculo só progredirá e será eficaz se tratar de maneira significativa de questões teóricas e pragmáticas simultaneamente. E já podemos encontrar alguns trabalhos nessa direção sendo desenvolvidos.

Almeida e Igliori (2015) focados na elaboração de material que subsidiem o ensino de conceitos do Cálculo apresentam atividades para o ensino do conceito de função com o uso do software GeoGebra fundamentados na teoria elaborada por David Tall de como o computador pode auxiliar no ensino da Matemática.

Igliori e Almeida (2015) tratam de estratégias para o ensino dos conceitos de função, continuidade, diferenciabilidade e equação diferencial. As estratégias são apoiadas em referências teóricas elaboradas por David Tall e seus colaboradores. Para os conceitos de continuidade e diferenciabilidade os autores exploram a noção de retidão local que auxilia a desenvolver a conceituação formal. Para o conceito da equação diferencial $y' = f(x, y)$ é explorada a abordagem qualitativa de busca de solução, a partir da análise de seu campo de direções. Uma característica comum às abordagens é a utilização do computador.

Os autores Igliori e Almeida (2017) apresentam um material relativo à abordagem dos conceitos de continuidade e diferenciabilidade de funções reais de uma variável. O material traz, em sua formatação, marcas da Gênese Documental como um meio de colaborar com a ampliação do conjunto de recursos para a sala de aula e de constructos teóricos de David Tall, com vistas ao favorecimento da formação de conceitos matemáticos.

Almeida e Igliori (2017) apresentam um material de apoio para o ensino de função, tendo por referenciais teóricos, constructos da Gênese Documental referentes à elaboração de documentos por um professor, para o trabalho em sala de aula, e de David Tall sobre cuidados com a exploração do conceito de função quando se utiliza o computador.

Os trabalhos citados acima mostram que é possível fazer com que as teorias cheguem às práticas de sala de aula por meio de materiais elaborados para o ensino e norteados por essas teorias. E isso, nos motivou a desenvolver o presente trabalho que tem por objetivo apresentar um recurso para o ensino das noções intuitivas de limite e continuidade de funções de uma variável real à valores reais.

O material aqui apresentado vai ao encontro do pensamento de Rasmussen, Marrangelle e Borba quando estes afirmam ser fundamental que as pesquisas em ensino e aprendizagem de cálculo contribuam de fato, com a prática do professor (RASMUSSEN, MARRONGELLE, BORBA, 2014).

O processo de produção do material apresentado neste artigo é fundamentado na Gênese Documental, proposta por Gueudet e Trouche (2009) e de constructos teóricos de David Tall (2000), com vistas ao favorecimento da formação de conceitos matemáticos e do uso do computador. Além destes, completa nosso quadro teórico a teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval (2003).

O Ensino de Limite e Continuidade de funções

O conceito de limite é um dos que mais causa problemas aos alunos e visto que mantém uma posição central que permeia toda a análise matemática, como fundamento da teoria da aproximação, da continuidade e do cálculo diferencial e cálculo integral, mostra que pesquisas acerca de seu ensino tornam-se relevantes.

Os cursos de Cálculo tradicionalmente seguem a seguinte cronologia: limites e continuidade, derivada e integral. Entretanto, o registro histórico é justamente o oposto. Por muitos séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito e com intuições geométricas subjetivas, nem sempre rigorosas. O termo limite no sentido moderno tem menos de 150 anos e isso mostra que esse conceito matemático é uma ideia particularmente difícil, típica do tipo de pensamento exigido na matemática avançada.

Sabemos que o conceito de limite é rico e complexo. Contudo, a dificuldade no ensino e na aprendizagem desse conceito não reside apenas neste fato, mas também na medida em que, não podemos esperar, que os aspectos cognitivos sejam gerados meramente a partir da definição matemática. É didaticamente importante salientar que existe uma diferença entre a definição e o próprio conceito de limite e que, recordar a definição de limite é uma ação, mas construir a concepção fundamental é outra (CORNU, 1991).

Para Zollman (2014), os alunos têm três principais dificuldades na compreensão dos limites, a saber, os processos infinitos de limites; a definição formal de limites; e o valor dos limites. Além disso, as descobertas de Beynon e Zollman (2015) sugerem que as definições de conceito pessoal de limite dos alunos são inoperantes para resolver problemas de limite e inconsistentes com a definição formal de limite.

É comum em sala de aula ver que alguns alunos mantêm a ideia de substituir um número finito de valores por *x*, para determinar o limite de uma função e que muitos deles não acreditam que uma função possa atingir seu limite, permanecendo novamente com a definição leiga de um "limite superior" (TALL, VINNER, 1981; DAVIS, VINNER, 1986). Para muitos, limite é visto como um processo estritamente dinâmico (TALL, VINNER, 1981; WILLIAMS, 1991) e embora os professores se movam fluidamente entre o limite como um número (ou estado final) e o conceito de limite como um processo, os alunos parecem novamente focar apenas os limites em termos de um processo (GULCER, 2012). Wangle (2013) observou ainda, que a maioria dos estudantes raciocina com representações gráficas e algébricas de maneira contraditória, sem saber de quaisquer contradições ao compartimentalizar seu pensamento.

Para muitos estudantes continuidade e descontinuidade estão relacionadas apenas ao gráfico da função, não à definição do conceito e confundem continuidade com conexão de um gráfico (TALL, VINNER, 1981). Esses alunos procuram quebras, buracos, cúspides ou cantos nos gráficos e acabam muitas vezes por obter a resposta certa pelo motivo errado, particularmente quando a função é apresentada em forma gráfica (VINNER, 1983). Os alunos confundem continuidade com o limite existente (BEZUIDENHOUT, 2001) ou com a função sendo definida (VINNER, 1983). Como nos limites, os alunos com maiores dificuldades raciocinam com representações gráficas e algébricas de maneiras contraditórias, mas isso não causa nenhuma dissonância convincente para eles (WANGLE, 2013).

Não é pretensão deste trabalho aprofundar as discussões acerca das dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão dos conceitos de limite e continuidade. Nosso objetivo é apresentar um recurso que favoreça a compreensão de tais conceitos, por meio de atividades que integrem múltiplas representações e uma sequência que enfatize a comparação e a inter-relação entre estes conceitos, assim como proposto por Zollman (2014).

Quadro teórico

Nesta seção apresentamos o quadro teórico deste trabalho que é composto por constructos da Gênese Documental, segundo Gueudet e Trouche, por elementos teóricos de David Tall que fundamentam a utilização dos computadores na aprendizagem da Matemática e da teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval.

Tendo como ponto de partida a abordagem instrumental, que foi desenvolvida por Rabardel (1995), Gueudet e Trouche (2009) desenvolveram a teoria da Gênese Documental, que tem suas bases na documentação produzida por professores para a preparação de suas aulas. A abordagem de Gueudet e Trouche vai mais longe que a abordagem instrumental de Rabardel, mostrando que os conceitos de gênese, instrumentação (formação de esquemas de utilização dos artefatos) e instrumentalização (quando o sujeito coloca suas mãos nos artefatos), são relevantes, de modo mais geral, para fundar uma abordagem de documentação em didática. Nesta abordagem documental, Gueudet e Trouche conceitua e diferencia dois termos que estão no cerne desta teoria: recurso e documento.

Recurso é o termo utilizado para descrever uma diversidade de artefatos e outros elementos que podem ser utilizados pelo professor no desenvolvimento de uma aula ou um conjunto de aulas. Nesse sentido, um livro didático, os programas escolares, um software dedicado ao ensino, uma lista de exercícios a ser resolvida pelos alunos são entendidos como recursos. Embora o termo recurso tenha uma noção ampla na abordagem documental, Gueudet e Trouche (2008), seguindo Adler (2000), impõem algumas restrições. Por exemplo, o conhecimento do professor não seria considerado um recurso, e sim o que orienta seu trabalho com o recurso. Do mesmo modo, os colegas de trabalho do professor não seriam recursos, e sim os conselhos, mensagens e propostas desses colegas.

Um recurso é composto por três componentes indissociáveis: componente material (ex.: papel, computador, fichas de trabalho, esquadros, calculadoras, etc.), o componente matemático (ex.: as noções matemáticas, as tarefas que as envolvem, técnicas, etc.) e a componente didática, na qual são levados em conta aspectos institucionais e pedagógicos que podem influenciar o trabalho do professor em sala de aula (IGLIORI E ALMEIDA, 2017). Gueudet e Trouche (2016) representam o processo de produção de um documento, denominado gênese documental, pela estrutura: documento = recurso + esquemas de utilização.

> O termo "utilização" no "esquema de utilização" deve ser entendido em sentido amplo. Trata-se de toda a ação didática do professor, desde a seleção dos recursos até sua adaptação, sua estruturação, sua implementação na sala de aula, sua revisão *a posteriori*, etc. Os invariantes operacionais que são a base dos esquemas orientam essa utilização dos recursos. Eles são relativamente resistentes (eles se formaram ao longo de vários ciclos de uso). Eles também têm alguma plasticidade, e podem evoluir no confronto com as novas circunstâncias de ensino (novos recursos disponíveis, desempenho didático na sala de aula, etc.) (BELLEMAIN, TROUCHE, 2016, p.11).

Chamamos a atenção para o fato de que o material apresentado neste trabalho constitui de um recurso, o qual só passará a constituir-se como documento, a partir do momento em que um esquema de utilização for incorporado por um professor.

Uma vez que nosso intuito é apresentar um recurso constituído por tarefas que favoreçam a compreensão dos conceitos de limite e continuidade de uma função, era fundamental que isso fosse proposto sob diferentes pontos de vista e para tanto, evocamos o importante papel exercido pelos diferentes registros que ele mobiliza em função dos objetos matemáticos a representar/ensinar. DAMM (2008) enfatiza a importância das representações na matemática dizendo:

> [...] em matemática toda a comunicação se estabelece com base em representações, os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para o seu ensino precisamos levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático (DAMM, 2008, p. 167).

Nesse sentido, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), desenvolvida por Raymond Duval (1993) teve um papel importante na elaboração de todas as tarefas propostas neste trabalho. Nos últimos anos, a TRRS vem encontrando espaço nas pesquisas em Educação Matemática no Brasil em todos os níveis de ensino e tem trazido contribuições importantes tanto no ensino, quanto na pesquisa (BRANDT, MORETTI, 2014). A ideia de Duval era entender como se dá a aquisição e a organização de situações de aprendizagem de conceitos matemáticos a partir do funcionamento cognitivo do sujeito.

De acordo com Duval (2003), as representações semióticas têm um papel fundamental na aprendizagem da Matemática devido ao caráter abstrato dos seus objetos que só são acessíveis através de suas diferentes representações. Duval acrescenta, ainda, que para os conceitos serem efetivamente apreendidos, é necessário que ele tenha contato com diferentes registros de representação semiótica, pois, "[...] a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos, dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação" (DUVAL, 2003, p.14).

O Cálculo Diferencial e Integral (assim como toda a matemática), exige uma constante apreensão de objetos abstratos como funções, limites, integrais etc. e, por esse motivo, o aluno precisa realizar tarefas de produção semiótica para a compreensão desses objetos, ou seja, deve recorrer a sua representação. No entanto, para Duval, tal compreensão só é possível a partir do momento em que conseguimos distinguir um objeto de sua representação, uma vez que um mesmo objeto matemático pode ser dado através de representações muito diferentes (DUVAL, 2009).

As representações semióticas exigem o cumprimento de três atividades cognitivas: a formação, o tratamento e a conversão. A formação de uma representação semiótica é baseada na aplicação de regras de conformidade e na seleção de certas características do conteúdo envolvido. Como exemplo de formação, podemos citar a descrição de um domínio de uma função. O tratamento de uma representação é a transformação desta em outra representação do mesmo registro na qual foi formada. A conversão de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro.

Para Duval, um dos grandes diferenciais da matemática está relacionado à possibilidade de se converter um registro de representação para outro a qualquer momento, sendo que a compreensão em matemática supõe a coordenação de no mínimo, dois registros de representações. Do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que aparece como atividade de transformação representacional fundamental e que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão Duval (2003).

Na visão de Duval (1995), apenas dispor de vários registros de representação não é suficiente para garantir a compreensão de certo conceito. É também necessária à coordenação de representações formuladas em registros distintos, isso é, a manifestação por parte do individuo da capacidade em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos.

Henriques e Almouloud (2016) atentam para o fato que a coordenação aparece como a condição fundamental para todo tipo de aprendizagem, reforça-se que os registros são sistemas inertes que acomodam as representações de objetos de saberes que, por sua vez, são dinâmicas, na medida em que elas podem sofrer transformações no mesmo ou entre diferentes registros. Os autores chamam a atenção para o fato da definição de conversão, muitas vezes, ser empregada de forma errônea ou inconclusiva.

> [...] a conversão é versada ao registro e não à representação. Além disso, em muitas vezes, o objeto representado não é evocado na conversão. Acreditamos ser possível reverter esse quadro, pois não se converte o registro, mas a representação do objeto em questão de um registro para outro (HENRIQUES, ALMOULOUD, 201, p.471).

Fica claro que é fundamental para a compreensão de conceitos matemáticos, que os estudantes sejam capazes de representar os objetos matemáticos nas suas mais diversas representações nos mais variados registos, e mais, eles devem ser capazes de mudar uma representação de um registro para outro. Para tanto, no ambiente papel/lápis, essa coordenação funciona bem nos casos mais simples como o traçado de uma reta no plano cartesiano, mas em muitos outros casos, mostra-se limitado, podendo ainda suscitar dificuldades nas práticas efetivas de estudantes na relação com a representação gráfica de funções de uma variável real.

Pelo exposto, computador e softwares gráficos servem como uma ferramenta auxiliar permitindo ao estudante trabalhar com múltiplas representações (algébricas, gráficas e tabulares) e das possibilidades de experimentações possíveis (tratamento e conversão). Nesse sentido, determinados ambientes computacionais podem ser utilizados para o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos, pois por meio deles é possível

> [...] executar quaisquer algoritmos de forma rápida e eficiente e o resultado final em uma gama de diferentes representações. Por exemplo, os resultados podem ser representados visualmente e manipulados fisicamente. Utilizando um mouse para habilitar o estudante a construir relações corporificadas que fazem parte de uma estrutura conceitual mais rica e ampla (TALL, 2000, p. 10).

Tall (1986) considera como parte do desenvolvimento de materiais de ensino a utilização de organizadores genéricos, pois por meio deles é possível fornecer “ao aprendiz experiências apropriadas de modo que ele esteja cognitivamente pronto para novos conceitos matemáticos quando eles são introduzidos” (TALL, 1986, p. 5, tradução nossa).

A noção de organizador genérico foi introduzida por Tall (1986), definida como “um ambiente (ou micromundo) que permite ao aprendiz manipular exemplos e (se possível) contraexemplos de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados” (TALL, 2000, p. 10). Um exemplo de organizador genérico são Softwares que provêm um retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário, podemos citar como exemplo os Applets (programas, desenvolvidos com o Geogebra, com alguma tarefa específica), que são manipuláveis e mostram rapidamente as alterações feitas.

Em Tall (1986), o autor descreve como um organizador genérico pode ser utilizado na aprendizagem, dentre as quais destacamos: para explorar conceitos de modo intuitivo e genérico, antes de serem analisados e formalizados; para enriquecer os conceitos imagens dos estudantes com vistas a fornecer uma percepção geral do conceito completo. Na perspectiva de Tall (1989), ao construirmos materiais de ensino com a utilização do computador é necessário considerar que:

> Software para a aprendizagem da matemática é diferente de um software para fazer matemática, precisa ser projetado levando em consideração o desenvolvimento cognitivo do aprendiz, que pode diferir significativamente da estrutura lógica do conceito formal. Por isso, é valioso começar considerando aspectos cognitivos relevantes para a utilização da tecnologia computacional antes da tarefa principal que é se concentrar em ambientes computacionais e qual é o seu papel na aprendizagem da matemática (TALL, 1994, p. 189).

Segundo Tall (1993) existe um perigo na utilização inadequada de determinados softwares que plotam gráficos. Isso porque, dependendo da forma como são utilizados, podem levar os sujeitos a desenvolverem um conceito imagem limitado. Justamente por esse motivo, o pesquisador alerta para trabalhar funções definidas por mais de uma sentença, para que o aluno possa enriquecer a formação do seu conceito imagem.

Silva (1994) afirma que o Cálculo, por sua própria natureza de trabalhar com aproximações, é um dos mais adequados para a utilização do computador em experimentações, pois proporciona ao aluno uma (re)descoberta dos seus conceitos. Tall (2000) destaca elementos que outros pesquisadores do campo da Educação Matemática reforçam, como por exemplo, a capacidade de apresentar múltiplas representações de um mesmo objeto matemático.

> Visualizar é um processo de criar e/ou interpretar e registrar ideias e imagens, que por sua vez podem desencadear novas ideias e imagens. Nessa perspectiva a visualização é parte do conjunto de processos de fazer matemática, ao lado da intuição, criação, abstração, formalização, comunicação, entre outros, podendo ao mesmo tempo impulsionar o desenvolvimento de tais processos (FROTA e COUY, 2009, p. 4).

Essa questão, remete-nos a uma discussão sobre a importância da “Visualização” no ensino e aprendizagem de matemática. Guzmán (2002) considera que a visualização auxilia nos conceitos matemáticos, ideias e métodos que são intuitivamente representáveis de várias maneiras e considera benéfico utilizar essas relações tanto na apresentação de um conceito matemático quanto na manipulação das mesmas.

Um recurso para o ensino de limite e continuidade

Nesta seção apresentaremos o recurso que foi elaborado, que consiste em uma série de tarefas que visam a compressão dos conceitos de limite e continuidade de funções de uma variável real. Este é um material para ser utilizado na introdução destes conceitos, para uma posterior formalização e os bons resultados do uso do material vão depender, como em qualquer outro caso, do esquema de utilização pelos docentes. Sempre que as questões forem idênticas a de algum livro, indicaremos a referência.

Quadro 1: Tarefas propostas

Tarefa 1. Responda:

a) Na teoria da relatividade, a massa de uma partícula com velocidade v é dada por: $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, onde m_0 é a massa da partícula em repouso e c, a velocidade da luz (STEWART, 2013, p.91). Utilizando uma calculadora, faça uma análise do que ocorre com a massa de uma partícula, quando sua velocidade v se torna arbitrariamente grande.

b) Na Teoria da relatividade, a fórmula da contração de Lorentz, $L = L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, expressa o comprimento L de um objeto como uma função de sua velocidade v em relação a um observador, onde L_0 é o comprimento do objeto em repouso e c é a velocidade da luz. (STEWART, 2013, p.99). Novamente usando uma calculadora, faça um prognóstico do que acontece com o comprimento L de certo objeto, se sua velocidade v, em relação a um observador, tornar-se arbitrariamente próximo da velocidade da luz. Seria possível este objeto chegar a uma velocidade maior do que a da luz? Explique.

c) Em algumas espécies de animais, a ingestão de alimentos é afetada pelo grau de vigilância que o animal mantém enquanto está comendo. Para resumir, é difícil comer bem se você tem que estar em guarda o tempo todo contra predadores que podem comê-lo. Em um modelo**, se o animal está se alimentando de plantas que permitem uma mordida de tamanho S, a ingestão de alimentos, I(S), é dada por uma função da forma $I(S) = \frac{aS}{S+c}$, onde a e c são constantes positivas. O que acontece com a ingestão I(S) quando o tamanho S da mordida aumenta indefinidamente? Interprete o resultado (HOFFMAN, 2015, p.56).

**A.W.Wilhus and C. Fitzgibbon, Costs of vigilance in foraging ungulates, Animal Bahavior, v.47, p.2, 1994.

Usando o ambiente lápis & papel, dê a representação gráfica da função f definida por $f(x) = lnx$. Obtenha uma estimativa para a área da região do plano limitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas $x = 1$ e $x = 24$. Neste caso, em particular, podemos não saber como calcular a área sob a curva dada, mas sabemos calcular a área de um retângulo. Assim, divida a região dada em uma série de regiões retangulares (2, 3, 4, 6, 8 e 12 retângulos) e calcule o valor aproximado da área A sob a curva $y = f(x)$ somando as áreas dessas regiões retangulares.

Faça o mesmo do item d, mas agora utilize o ambiente do Geogebra. Compare as duas respostas.

Tarefa 2. Complete a tabela abaixo, seguindo o exemplo:

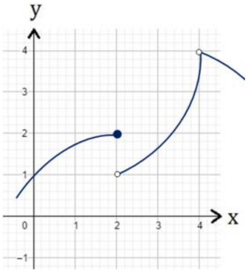
Representação no registro algébrico	Representação na língua materna	Representação na língua materna
Exemplo: $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$	os valores de *f* (*x*) podem se tornar tão próximos quanto queiramos de *5*, desde que tomemos os valores de *x* suficientemente próximos de *2* (mas não iguais a *2*).	O limite de *f* (*x*) tende a *5* quando *x* tende a *2*
a) ?	os valores de *f* (*x*) podem se tornar tão próximos quanto queiramos de *1*, desde que tomemos os valores de *x* suficientemente próximos de *-2* (mas não iguais a *-2*).	?
b) ?	?	O limite de *f* (*x*) tende a *-3* quando *x* tende a *0*
c) $\lim_{x\to -2} f(x) = 4$	?	?

Tarefa 3. Parte I. Complete a tabela abaixo.

Representação algébrica	Representação na língua natural
$\lim_{x\to 1^+} f(x)$	?
?	*f* (*x*) tende a *5* quando *x* tende a *-2* pela esquerda.
$\lim_{x\to -1^-} g(x)$	?
?	*h* (*x*) tende a *1/2* quando *x* tende a *-8* pela direita.

Parte II. Use cada gráfico dado de *f* para dizer o valor de cada limite ou o valor da função no ponto determinado, se ele existir. Se não existir, explique por quê.

Gráfico 1



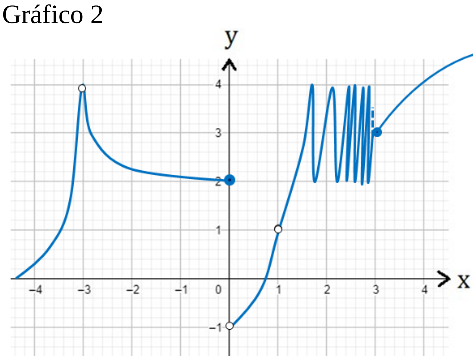
$a)\ \lim_{x\to 2^-} f(x)$ $e)\ \lim_{x\to 4^-} f(x)$

$b)\ \lim_{x\to 2^+} f(x)$ $f)\ \lim_{x\to 4^+} f(x)$

$c)\ \lim_{x\to 2} f(x)$ $g)\ \lim_{x\to 4} f(x)$

$d)\ f(2)$ $h)\ f(4)$

Gráfico 2



$a)\ \lim_{x\to -3^-} f(x)$ $e)\ \lim_{x\to 0^-} f(x)$ $i)\ \lim_{x\to 1^-} f(x)$ $n)\ \lim_{x\to 3^-} f(x)$

$b)\ \lim_{x\to -3^+} f(x)$ $f)\ \lim_{x\to 0^+} f(x)$ $j)\ \lim_{x\to 1^+} f(x)$ $o)\ \lim_{x\to 3^+} f(x)$

$c)\ \lim_{x\to -3} f(x)$ $g)\ \lim_{x\to 0} f(x)$ $l)\ \lim_{x\to 1} f(x)$ $p)\ \lim_{x\to 3} f(x)$

$d)\ f(-3)$ $h)\ f(0)$ $m)\ f(1)$ $m)\ f(3)$

Tarefa 4

Parte I) Utilizando a planilha Excel, construa tabelas e faça uma estimativa do que acontece com as funções em cada um dos casos.

a) O que acontece com a função f dada por $f(x) = x^2 - x$ para valores de x próximos a 2, mas não iguais a 2? A função está definida para x = 2?

b) O que acontece com a função g dada por $g(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ para valores de x próximos a -2, mas não iguais a -2? A função está definida para x = -1?

c) O que acontece com a função h dada por $h(x) = \frac{senx}{2x}$ para valores de x próximos a 0, mas não iguais a 0? A função está definida para x = 0?

d) O que acontece com a função g dada por $p(x) = \frac{4(\sqrt{x^2+4}-2)}{x^2}$ para valores de x próximos a 0, mas não iguais a 0? A função está definida para x = 0?

e) O que acontece com a função q dada por $q(x) = cos\frac{\pi}{x}$ para valores de x próximos a 0, mas não iguais a 0? A função está definida para x = 0?

Parte II) Utilizando o Applet do Geogebra "Noção intuitiva de limites e continuidade" represente graficamente cada uma das funções da Parte I e responda às mesmas perguntas. Compare sua estimativa feita na Parte I com sua análise gráfica.

Tarefa 5. Utilizando o software Geogebra, dê a representação gráfica de cada uma das funções abaixo e responda às perguntas.

a) $g(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3}$. O que acontece com os valores de h(x) para valores de x próximos a 3/2? A função está definida para x = 3/2? Justifique.

b) $p(x) = \begin{cases} 2-x, & x < -1 \\ x, & -1 \le x \le 1 \\ (x-1)^2, & x > 1 \end{cases}$. O que acontece com os valores de p(x) para valores de x próximos a 1 e -1? A função está definida para x = 1? E para x = -1? Justifique.

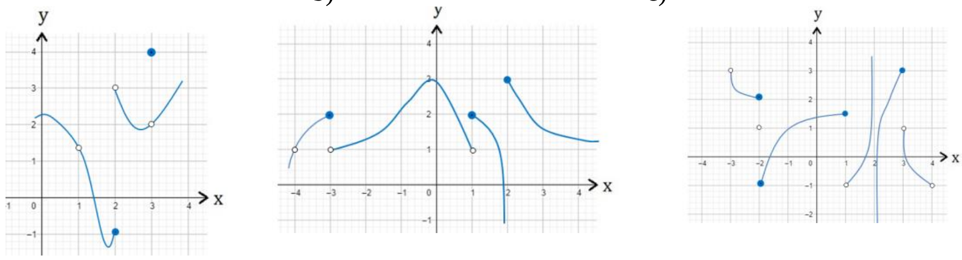
c) $q(x) = \begin{cases} 1+x, & x < -1 \\ x, & -1 \le x \le 1. \\ 2-x, & x \ge 1 \end{cases}$
O que acontece com os valores de p(x) para valores de x próximos a 1 e -1? A função está definida para x = 1? E para x = -1? Justifique.

d) $r(x) = \begin{cases} 1+senx, & x < 0 \\ \cos x, & 0 \le x \le \pi. \\ 2-x, & x > \pi \end{cases}$
O que acontece com os valores de r(x) para valores de x próximos a 0? E para valores próximos a π? A função está definida para x = 0? E para x = π? Justifique.

Tarefa 6

Parte I. Abaixo, temos a representação gráfica de certas funções. Identifique os pontos nos quais estas funções não são contínuas e explique por quê. Para cada um destes pontos, determine se a função é contínua à direita ou à esquerda, ou nenhum dos dois.

a) b) c)



Parte II. Discuta cada uma das funções das tarefas 7 e 8 sob o ponto de vista da continuidade. Justifique suas respostas.

A tarefa 1 serve como uma porta de entrada para o tema central. A ideia é motivar os estudantes mostrando que o conceito de limite tem aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento. Ao contrário do que muitos livros de Cálculo fazem, que iniciam falando de limites com o exemplo de retas tangentes entendemos que esta não é a forma mais “natural” para o estudante recém egresso do ensino médio. Por isso, iniciamos com exemplos concretos, tornando a aprendizagem mais significativa, no sentido de Ausubel, que segundo o qual:

> [...] a essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas de maneira substantiva (não-literal) e não arbitraria ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante para a aprendizagem com essas ideias (AUSUBEL, 1978, p. 41).

Nessa tarefa, a componente material é composta pelo ambiente lápis e papel, pelo computador e/ou calculadora e software Geogebra. A componente didática poder ser tomada como as indicações de Tall (1989) sobre o uso sobre o uso de computadores no ensino da matemática e as indicações de Ausubel acerca da aprendizagem significativa.

O item *d* desta atividade vai ao encontro da ideia de Zollman (2014), no sentido de enfatizarmos a comparação e a inter-relação entre os conceitos, neste caso, de limite e soma de Riemann.

Na tarefa 2 a noção intuitiva do conceito de limite de uma função de uma variável real constitui a componente matemática da tarefa. A componente material é composta pelo ambiente lápis e papel e como componente didática temos as indicações de Duval acerca da coordenação de registros.

A tarefa 3 possui duas partes e tem como componente matemática, a noção de limites laterais. Inicialmente o estudante procederá como na tarefa 2 e o ambiente lápis & papel será a componente material. Em seguida, terá como componente didática as indicações Duval acerca da coordenação de registros, com o objetivo de verificar se o estudante consegue determinar limites de funções a partir de sua representação no registro gráfico. Utiliza-se fortemente nas tarefas 2 e 3 os pressupostos da teoria das representações semióticas de Duval, no sentido de coordenar representações formuladas em registros distintos e a habilidade de mudar de registros de representação. Nesta tarefa, o estudante deverá coordenar representações em dois registros: algébrico e língua materna, e realizará tratamentos e conversões.

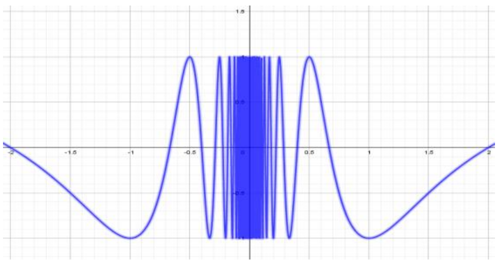
Na tarefa 4, os alunos são instigados a encontrar os limites por experimentação numérica. Na primeira parte, utilizarão como componente material o computador, o Applet do Geogebra e a planilha eletrônica Excel. A componente didática é composta por indicações de Tall sobre o uso de computadores e os pressupostos da teoria das representações semióticas de Duval. A componente matemática é a noção de limite e continuidade. Inicialmente, deverá ser feito uma conversão da representação no registro da língua materna, para uma representação no registro numérico na forma de tabela.

Na segunda parte, o estudante deverá converter a representação do registro da língua materna, para uma representação no registro gráfico.

Os itens *d* e *e*, são particularmente interessantes, pois ilustram situações nas quais, a conjectura sobre o valor de um limite por meio de tabelas numéricas, pode levar ao erro. É fácil conjecturar um valor falso se usarmos os valores não apropriados de *x*, mas é difícil saber quando parar de calcular valores. Por exemplo, se o estudante considerar os valores de x como $\pm1, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{5}, \pm\frac{1}{7}$ e assim por diante, ele pode ficar tentado a conjecturar que $\lim_{x\to0} cos\frac{\pi}{x} = -1$.

Entretanto, o estudante poderá ver na representação no registro gráfico (Figura 6) que dessa vez a conjectura feita a partir da representação numérica dada pela Tabela 1 não está correta. Os estudantes precisam saber que é importante interpretar corretamente os resultados obtidos por calculadoras e os computadores, assim como, utilizar estes recursos corretamente. Por isso da importância de desenvolvermos métodos mais confiáveis para o cálculo de limites.

Figura 1 – Gráfico da função dada por $q(\mathrm{x}) = \cos\frac{\pi}{\mathrm{x}}$



Fonte: Elaborada pelo autor

A tarefa 5 tem como componente material o software Geogebra e o computador, como componente didático as indicações de Tall sobre seu uso. No que tange a TRRS, o estudante deverá fazer uma conversão da representação no registro algébrico para a representação no registro gráfico. Essa atividade vai ao encontro do pensamento de Tall, segundo o qual em geral, uma função é apresentada aos alunos como definidas por uma única fórmula e que isso prejudica o significado do conceito de função formado pelo aluno. Outra motivação que tivemos para propor esta tarefa é fato de que as funções definidas por mais de uma sentença, são ideias para fazermos o link entre os conceitos de limite e continuidade.

Por fim, na tarefa 6, o componente matemático é o conceito de continuidade, o componente material é o ambiente lápis e papel. A Parte I tem o objetivo de desenvolver a habilidade de, a partir da representação gráfica de uma função, identificar os pontos de descontinuidade (caso existam) e justificar fundamentado no conceito de função contínua num ponto. Na segunda parte, o aluno deverá discutir cada uma das funções das tarefas 3, 4 e 5 sob o ponto de vista da continuidade, justificando sua resposta.

Considerações Finais

Este trabalho vai ao encontro da necessidade apontada por pesquisadores de integrar teoria e prática nas pesquisas acerca do processo de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral uma vez que apresentamos um material, respaldado teoricamente pela noção de recurso no sentido de Gueudet e Trouche bem como nos Constructos Teóricos de David Tall acerca do uso de computadores no ensino de cálculo e da Teoria Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval, para o ensino das noções intuitivas de limites e continuidade de funções de uma variável real.

Lançamos uma conjectura, no sentido de Lakatos e Marconi onde as autoras afirmam que "conjectura é uma solução proposta em forma de proposição passível de teste" (LAKATOS; MARCONI, 2003, p.98). Devido aos fins práticos do desenvolvimento de

recursos para compor o repertório dos professores que ministram aulas de Cálculo Diferencial e Integral, propomos este material que deverá ser passível de testes, cuja eficácia apenas poderá ser comprovada ou refutada na prática em sala de aula pelo professor.

E por fim, é nossa expectativa que este material possa contribuir tanto com a pesquisa em Educação Matemática, quanto com a prática docente, além de motivar a elaboração de novos materiais que possam favorecer a aprendizagem matemática.

Referências

ADLER, J. Conceptualising resources as a theme for teacher education. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 3, p.205–224, 2000.

ALMEIDA, M. V. DE.; IGLIORI, S. B. C. Elementos para o desenvolvimento de uma abordagem para o ensino de funções reais. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**. ISSN 2238-8044, [S.l.], v. 4, n. 1, abr. 2015.

ALMEIDA, M. V. DE; IGLIORI, S. B. C. Material de apoio para o ensino de função. **Revista de Produção Discente em Educação Matemática**. ISSN 2238-8044, [S.l.], v. 6, n. 1, maio 2017.

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. **Cálculo.** tradução: Claus Ivo Doering, 10. ed., Porto Alegre: Bookman, 2014.

AUSUBEL, D.P.; NOVRK, J.D.; HANESIAN, H. **Educational psychology: a cognitive view.** 2.ed. Nova York, Holt, Rinehart and Winston, p. 733, 1978.

BELLEMAIN, F.;TROUCHE, L. Compreender o trabalho do professor com os recursos de seu ensino, um questionamento didático e informático. In: I **Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática**, 2016. Mato Grosso do Sul. Anais.

BEZUIDENHOUT, J. Limits and continuity: some conceptions of firstyear students, **International Journal of Mathematical Education in Science and Technolog**y, v.32, n.4, p. 487-500, 2001.

BEYNON, Kenneth A.; ZOLLMAN, Alan. Lacking a Formal Concept of Limit: Advanced Non-Mathematics Students' **Personal Concept Definitions. Investigations in Mathematics Learning**, 2015, 8.1: 47-62.

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T. As contribuições da teoria das representações semióticas para o ensino e pesquisa na educação Matemática. Ijuí, RS: **Unijuí**, 2014.

BRESSOUD, D., et al. Teaching and learning of calculus. In: **Teaching and Learning of Calculus**. Springer, Cham, p. 1-37, 2016.

CORNU, B. Limits In Advanced Mathematical Thinking, edited by Tall, D. ME Library: **Kluwer Academic Press**, p. 153-166, 1991.

DAVIS, R. B.; VINNER, S. The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. **Journal of Mathematical Behavior**, v.5, p. 281-303, 1986.

DAMM, Regina Flemming. Registros de representação. In: MACHADO, S. D. A.(Org.). **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**. 3. ed. São Paulo: Educ, 2008. p. 167-188.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, p. 11-33, 2003.

DUVAL, Raymond. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: **Livraria da Física**, 2009.

GUEUDET, G.;TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers? **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199-218, 2009.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. In: GUEDET, G; PEPIN, B.; TROUCHE, L. From Text to 'Lived' Resources: **Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development. Dordrecht**: Springer Netherlands, p. 23 -41, 2012.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Do trabalho documental dos professores: gêneses, coletivos, comunidades: o caso da Matemática. **Revista em Teia**. v.6, n.3, 2016.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Du travail documentaire des enseignants : genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. **Education et didactique,** 2(3), pp.7-33, 2008.

GULCER, B. Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. **Educational Studies in Mathematics**, v.82, n.3, p. 439-453,2012.

GUZMAN, M. de. The Role of Visualization in the Teaching and Learning of Mathematical Analysis, 2002.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciênc. Educ**., Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

Francisco Eteval da Silva Feitosa: Possui graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (1999), mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (2002),Doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Amazonas (2016) e Pós-Doutorado em Educação Matemática pela PUC-SP. Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal do Amazonas. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: matemática, ensino, cálculo diferencial e integral, olimpíada de matemática e metodologias ativas. E-mail: feitosaufam@gmail.com