revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A IMPORTÂNCIA DE DIFERENTES REPRESENTAÇÕES NO ESTUDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.311-324

Claudete Cargnin[1]
Cilio José Volce[2]
Silvia Teresinha Frizzarini[3]

Resumo: O objetivo deste artigo é discutir as conversões entre representações semióticas de números complexos, suas implicações no ensino médio e conteúdos que podem ser revistos ou aprofundados nesse momento de retomada. É uma investigação de cunho teórico, com base nos Registros de Representação Semiótica de Duval. Sem levar em consideração se esse objeto matemático deve ou não ser ensinado na Educação Básica, dúvida advinda da implementação da Base Nacional Comum Curricular, o texto aponta que uma abordagem em sala de aula que favoreça as diferentes representações pode contribuir para que o estudante retome conteúdos como inequações, módulo, trigonometria, arredondamento, operações com pares ordenados, entre outros, atribuindo-lhes sentido. Além disso, promove a articulação entre representações de diferentes objetos matemáticos.
Palavras-chave: Números complexos. Ensino. Representações Semióticas.

THE IMPORTANCE OF DIFFERENT REPRESENTATIONS IN THE STUDY OF COMPLEX NUMBERS

Abstract: The purpose of this article is to discuss the conversions between semiotic representations of complex numbers, their implications in high school and content that can be revised or deepened at this moment of recapture. It is a theoretical investigation based in Duval’s Semiotic Representation Registers. Without taking into account whether or not this mathematical object should be taught in Basic Education, a doubt arising from the implementation of the National Curricular Common Base, the text points out that an approach in the classroom that favors different representations can contribute to the student reviewing contents such as inequalities, modulus, trigonometry, rounding, operations with ordered pairs, among others, giving them meaning. In addition, it promotes the articulation between representations of different mathematical objects.
Keywords: Complex numbers. Teaching. Semiotic Representations.

Introdução

Os números complexos formam um conjunto importante para diversas áreas de engenharia, além da própria matemática. Entretanto, há controvérsias em relação ao seu ensino, ou não, em nível médio. Professores do ensino superior dizem que os alunos devem ter esse conhecimento ao entrar em uma graduação, principalmente para aqueles que irão seguir uma carreira na área de exatas e suas tecnologias, em que este conteúdo é muito utilizado de

[1] Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), cargnin@utfpr.edu.br
[2] Mestre em Ensino de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)/ Secretaria de Estado da Educação e do Esporte (SEED), ciliojosevolce@gmail.com
[3] Doutora em Educação para a Ciência e a Matemática, Universidade do Estado de Santa Catarina (UDESC), stfrizzarini@hotmail.com

diferentes formas. Por outro lado, esse conteúdo não mais está, explicitamente, contemplado entre os conhecimentos básicos a ser adquiridos na Educação Básica, segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018).

Entretanto, quando a BNCC postula para o Ensino Médio que a área de Matemática e suas tecnologias "propõe a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental" (BRASIL, 2018, p.529) e que a etapa do Ensino Fundamental deve trabalhar com problemas envolvendo números reais em diferentes contextos, está, de forma implícita, enquadrando o ensino de números complexos, que amplia esse conjunto numérico, desde o Ensino Fundamental.

Sem entrar nesse mérito, o presente artigo discute as conversões possíveis entre números complexos e suas implicações para o Ensino Médio. O que aqui está apresentado é fruto de investigações realizadas no âmbito do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina/Cornélio Procópio, e parcerias. Vemos nos números complexos uma possibilidade de aprofundar, ou até mesmo desenvolver, aprendizagens essenciais na Educação Básica. Considerando que dois dos autores são professores da rede pública do Estado do Paraná, vale lembrar que as aprendizagens essenciais estabelecidas nesse Estado, mesmo que sejam anteriores à BNCC, inclui esse conteúdo.

Assim, neste artigo, considerando que a diversidade de representações semióticas contribui com a aprendizagem de números complexos, refletimos sobre: quais relações podem ser estabelecidas entre as unidades significantes das representações gráficas, na forma cartesiana e a representação algébrica? Nosso objetivo é discutir as conversões entre representações semióticas de números complexos, suas implicações no Ensino Médio e conteúdos que podem ser revistos ou aprofundados nesse momento de retomada.

Para melhor compreensão do leitor, organizamos esse texto de modo a, primeiramente, apresentar dificuldades e necessidades dos números complexos, apontadas em pesquisas recentes. Em seguida, discutimos as implicações entre conversões da representação algébrica para a gráfica e trigonométrica em termos de possibilidades de ancoragem de conhecimentos, para, assim, tecer algumas reflexões e, por fim, trazer algumas considerações.

O ensino de números complexos

Em geral, no ensino dos números complexos se contempla as representações algébricas do tipo $z = a + bi$, ou a trigonométrica[4] ($z = \rho(\cos\theta + isen\,\theta)$), ou gráfica com coordenadas cartesianas (o número complexo como um afixo[5] no plano complexo). Ghedamsi e Tanazefti (2015) alertam que o recurso à representação gráfica deveria permitir resolver e operar problemas geométricos. Esses autores afirmam que "O trabalho com os números complexos induz a necessidade de desenvolver uma flexibilidade permitindo entender as diferentes representações e as mudanças que elas requerem" (GHEDAMSI; TANAZEFTI, 2015, p.31, tradução nossa[6]).

No levantamento realizado por Carvalho (2019, p.122), a autora constatou que "o ensino dos números complexos, quando parte de uma perspectiva histórica e quando a representação geométrica é explorada, atrelada às aplicações, parece levar à compreensão efetiva do tema", o que acarreta "maior qualidade ao processo de ensino" e destaca a importância da diversificação de representações semióticas em sala de aula, especialmente envolvendo a representação gráfica. Cabe destacar que Ghedamsi e Tanazefti (2015) concluíram que uma das categorias de dificuldades em relação aos números complexos é justamente o tratamento e conversão de representações, principalmente as que envolvem a representação gráfica.

Carvalho (2019, p.94) utilizou uma abordagem prioritariamente geométrica para o ensino de números complexos e concluiu que, embora tenha causado desconfortos em alunos repetentes, "propiciou um significado geométrico dinâmico (além do algébrico) para a unidade imaginária i, proporcionando aos alunos a visualização de figuras geométricas, a observação de suas rotações e a construção de relações e de propriedades de tais figuras".

Nesse mesmo sentido, a pesquisa de Amorim e Oliveira (2016) indica que o software GeoGebra oferece uma visualização gráfica que contribui com a compreensão das operações algébricas com números complexos. Esse conteúdo é pré-requisito para assuntos da engenharia como circuitos elétricos em correntes alternadas (CA). Puhl (2021) argumenta que os professores, em busca de preencher lacunas no conhecimento discente, como é o caso citado, se utilizam, por vezes, de "estratégias didáticas que potencializam uma aprendizagem mecânica" (p.261), que não favorece uma escolha consciente a respeito do uso e significado dos números complexos na resolução de problemas envolvendo circuitos elétricos em CA.

Na tentativa de contribuir com esse ensino, Carniélli (2022) e Volce (2022) propõem

---

[4] Embora a representação trigonométrica também seja algébrica, nesse texto, optamos por diferenciar o conteúdo de cada representação a partir do seu nome. Assim, quando nos referirmos à representação trigonométrica, estaremos enfatizando que a representação fornece módulo e argumento do número complexo em tela.
[5] "O ponto $P(a, b)$ que representa o complexo $z = a + bi$ é chamado de afixo ou imagem geométrica de z" (BIANCCHINI; PACCOLA, 2003, p.510)
[6] Le travail avec les nombres complexes induit la nécessité de développer une flexibilité permettant de saisir ses diferentes représentations, et les changements qu'elles requièrent.

jogos didáticos que favorecem a compreensão das conversões de representação, especialmente as que envolvem a representação gráfica (RG). Volce (2022) ainda propõe uma sequência adidática que explora a representação dos números complexos como vetores, em um contexto de voo de avião. Ambos os autores argumentam sobre a importância da RG para a aprendizagem do conteúdo. Carniélli (2022), ainda, expõe que jogos didáticos são ferramentas que podem auxiliar estudantes autistas, por exemplo, com a abstração requerida no estudo desses números.

Brevemente, apresentamos aqui pesquisas recentes, a maioria com data após o advento da BNCC, as quais desmistificam e mostram a importância da representação gráfica de um número complexo no ensino, tanto para reconhecer seus elementos quanto suas operações, com diferentes recursos que levam o aluno a escolhas conscientes, ao contrário de um processo mecânico de aprendizagem. Na próxima seção, fazemos uma análise das conversões entre a representação algébrica para a representação gráfica.

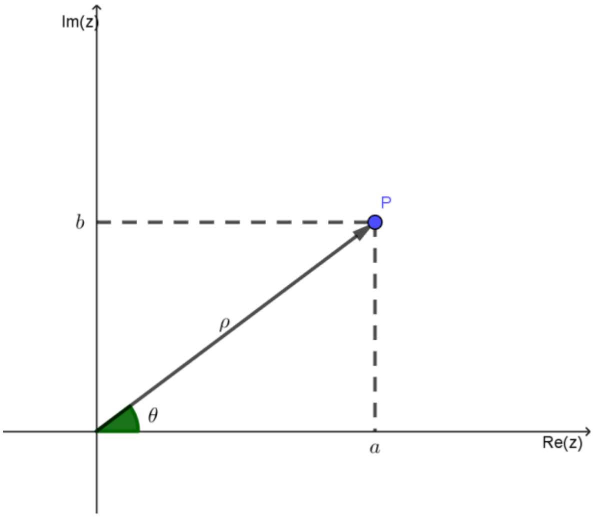
Possíveis conversões entre representações semióticas e suas implicações

Como já comentado na seção anterior, o ensino de números complexos tem se pautado nas representações algébricas, o que, de certa forma, mecaniza a aprendizagem e não favorece a atribuição de sentido ao tema de estudo. Nesta seção, queremos discutir a relação dos coeficientes reais a e b, na expressão $z = a + bi$, tanto em relação à posição do afixo $z = (a, b)$ no plano complexo, quanto em relação à representação vetorial.

Defendemos a importância de levar o aluno a perceber que tais números possuem relevância no contexto geométrico, e trazem consigo informações sobre a posição e o argumento do número complexo. Ao converter a representação algébrica para a gráfica, o professor pode retomar outros assuntos, se necessário, como a equação das retas bissetrizes dos quadrantes pares e ímpares e o significado dessa nomenclatura.

Dado um número complexo $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, em que $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$ a imagem geométrica de z no plano de Argand-Gauss (plano complexo) é o ponto de coordenadas $P(a, b)$, também chamado de afixo de z. Uma representação geométrica do número z o considera como um vetor, e como tal, possui uma direção, dada pelo argumento θ do número complexo z, e pelo módulo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. O argumento e o módulo compõem a forma trigonométrica ou polar de z: $z = \rho(\cos\theta + isen\,\theta)$, em que $cos\theta = \frac{a}{\rho}$ e $sen\theta = \frac{b}{\rho}$. Veja a figura 1.

Figura 1: representações gráficas de um número complexo



Fonte: os autores

Apesar de estarmos interessados na representação gráfica, cabe destacar que as transformações de representação, dentro da Teoria de Registro de Representação Semiótica[7], de Duval (1995), podem ser internas a um sistema semiótico, quando são chamadas de tratamentos, ou externas, isto é, envolvem ao menos dois sistemas. Neste último caso, são chamadas de conversões. É o caso que queremos analisar aqui: uma transformação que vai do registro algébrico ao registro gráfico e vice-versa. Duval (2009, p.81) afirma que "a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação". E mais, considerando a atividade matemática, Duval alerta para o que chama de *face oculta* , que "corresponde aos gestos intelectuais que constituem o caráter cognitivo e epistemológico específicos da matemática. [...] não é direta e imediatamente perceptível em relação ao que observamos do trabalho dos alunos em sala de aula" (FREITAS; REZENDE, 2013, p.17).

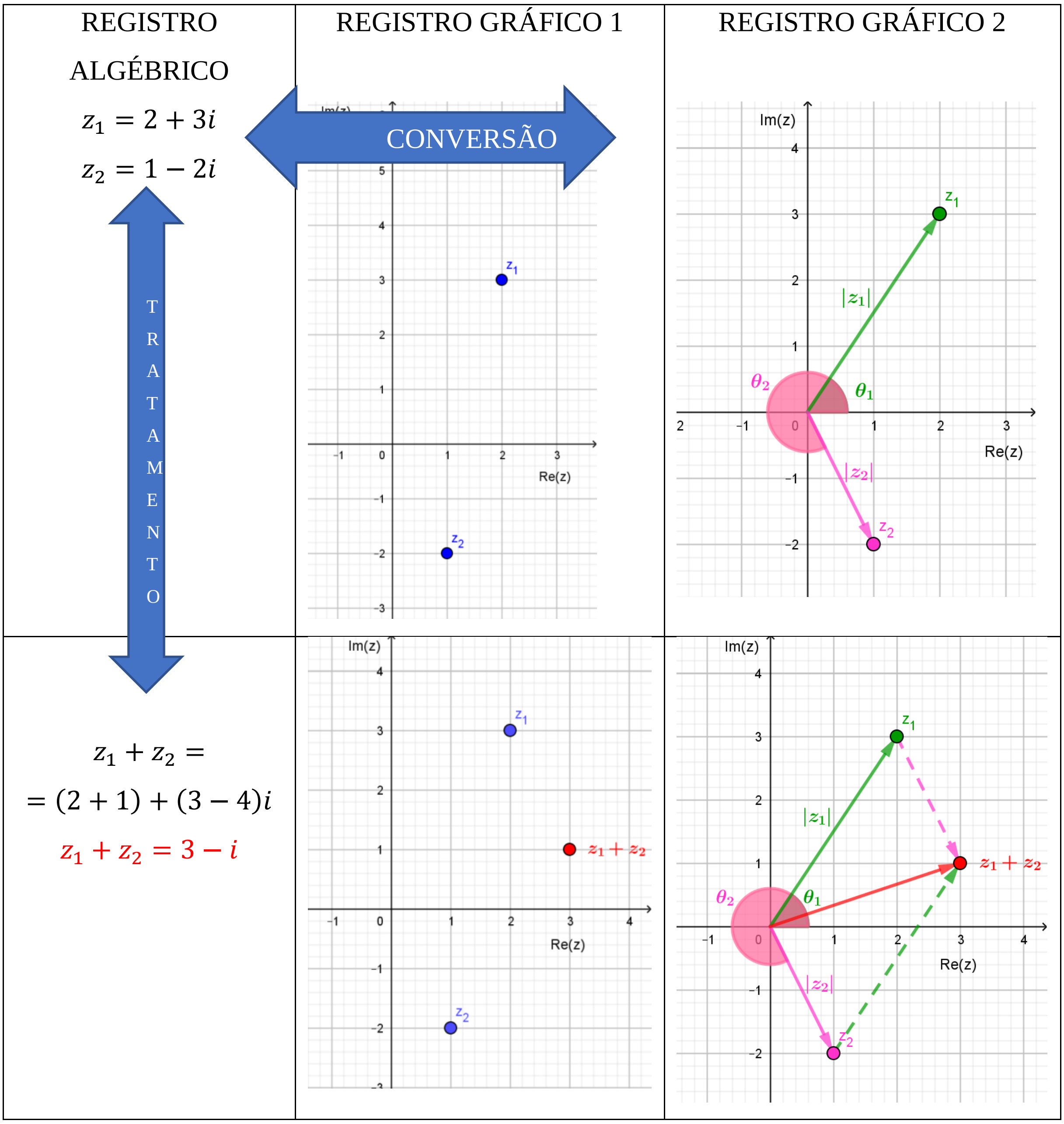
Chergui, Zraoula e Amal (2019) apresentam uma pesquisa sobre as dificuldades linguísticas de estudantes marroquinos em relação a números complexos e citam, entre elas, a interpretação geométrica das propriedades algébricas de um número complexo, a representação nas formas trigonométrica ou exponencial, bem como a conversão da representação geométrica às representações algébricas. Embora os autores tenham tratado de outro público, a prática da sala de aula nos mostra que os mesmos desafios aqui se apresentam, com estudantes brasileiros de Ensino Médio.

Cabe destacar que Duval (2012) chama de Registro de Representação Semiótica (RRS)

[7] O texto de Rezende *et al.* (2018) apresenta uma síntese esclarecedora sobre essa teoria. Aos interessados, recomendamos a leitura.

àquele no qual é possível três atividades fundamentais ligadas à *semiósis*: formação de uma representação identificável com uma representação com um registro dado, tratamentos e conversão de representação. Em síntese, tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo RRS, já na conversão as transformações envolvem RRS diferentes. Exemplos de tratamento e conversão são mostrados na Figura 2.

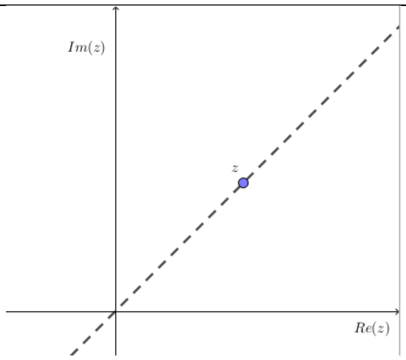
Figura 2: exemplos de tratamentos e conversões em números complexos

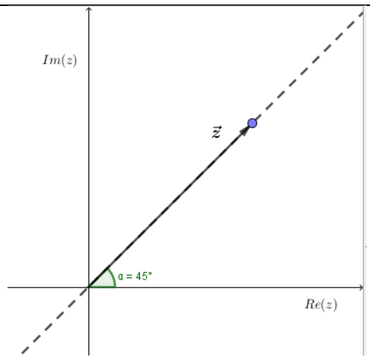


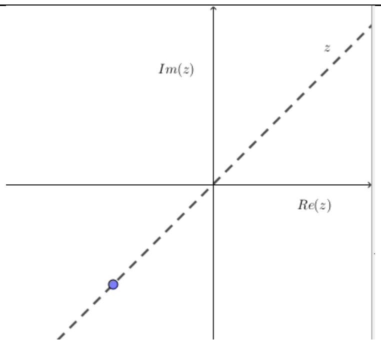
Fonte: os autores

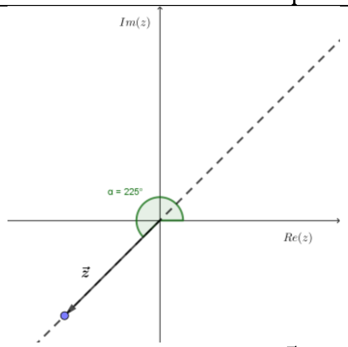
O quadro 1 apresenta as implicações gráficas para as variações de sinais dos coeficientes reais quando são iguais ou opostos, tanto a posição do afixo z no plano complexo, quanto do vetor $\vec{z}$ no plano cartesiano, o que caracteriza duas conversões distintas.

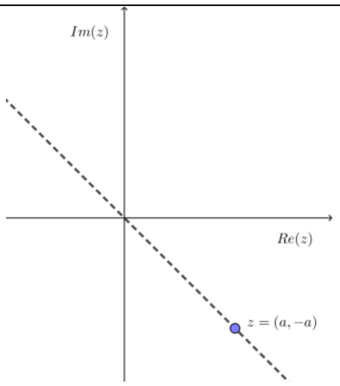
Quadro 1: implicações dos coeficientes reais da representação algébrica para a gráfica quando $a = b$

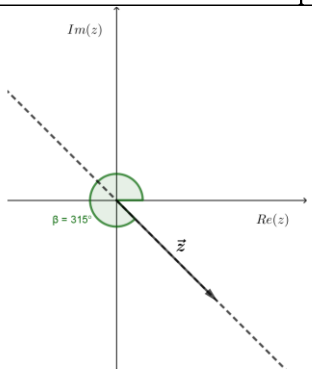
<table>
<tr><th colspan="2">coeficientes reais a e b na expressão $a + bi$</th><th>Posição do afixo z no plano complexo/variáveis visuais</th><th>Posição do vetor $\vec{z}$ no plano cartesiano</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$a = b$</td><td>$a > 0$
$b > 0$</td><td>

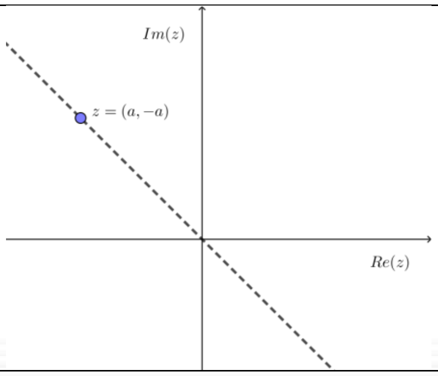
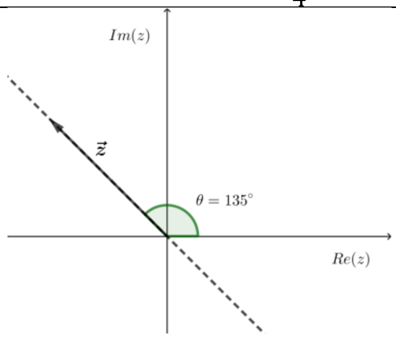
z está sobre a reta $y = x$ no 1º quadrante</td><td>

$\theta = 45° = \frac{\pi}{4} rad$</td></tr>
<tr><td>$a < 0$
$b < 0$</td><td>

z está sobre a reta $y = x$ no 3º quadrante</td><td>

$\theta = 225° = \frac{5\pi}{4} rad$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a = -b$</td><td>$a > 0$
$b < 0$</td><td>

z está sobre a reta $y = -x$, no 4º quadrante</td><td>

$\theta = 315° = \frac{7\pi}{4} rad$</td></tr>
<tr><td>$a < 0$
$b > 0$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

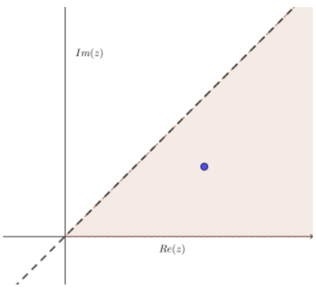
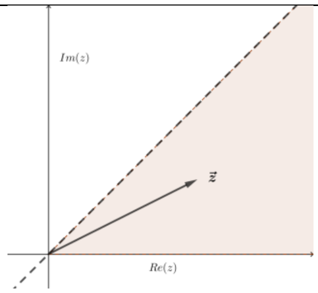
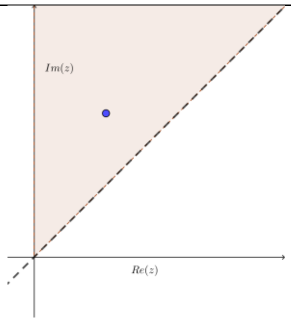
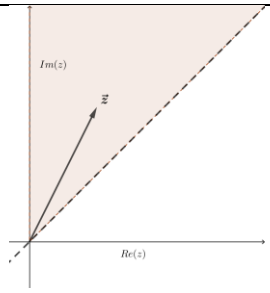
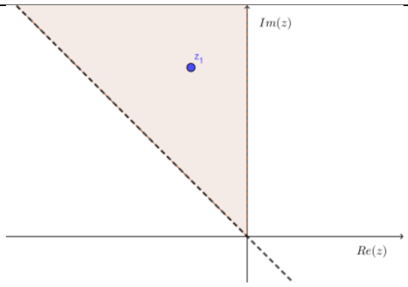
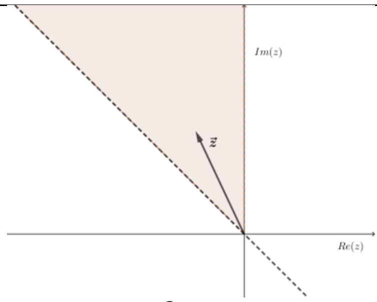
		z pertence ao 2º quadrante	$\theta = 135° = \frac{3\pi}{4} rad$

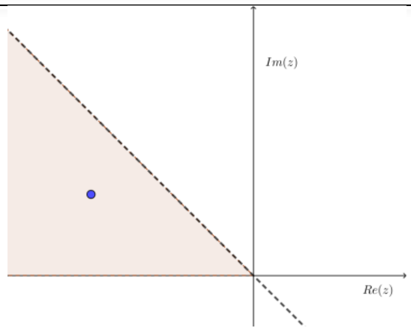
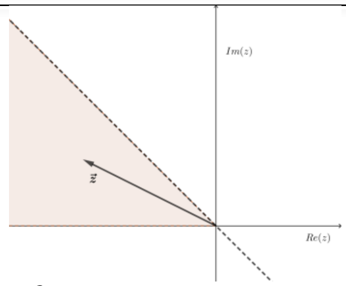
Fonte: os autores

Em síntese, podemos dizer que quando $a = b$, o afixo do número complexo $y = a + bi$ estará sobre a reta $y = x$ no primeiro quadrante do plano complexo se ambos os coeficientes forem positivos e no terceiro se ambos forem negativos. Quando os coeficientes forem números opostos, o afixo estará sobre a reta $y = -x$, no segundo (se $a < 0$) ou quarto (se $a > 0$) quadrantes.

Já para o caso em que $a \neq b$, temos outras questões a considerar, além do sinal. Neste caso, além do sinal, é preciso comparar os módulos dos respectivos números.

Quadro 2 : implicações dos coeficientes reais da representação algébrica para a gráfica quando $a \neq b$

Restrições para a e b	Região para o afixo $z = a + bi$	Região para o vetor $\vec{z}$ no plano cartesiano
$a, b > 0$	 $a > b$	 $a > b$ e $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$
	 $a < b$	 $a < b$ e $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$
$a < 0$ $b > 0$	 $\|a\| < \|b\|$	 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ e $\|a\| < \|b\|$

	 $\|a\| > \|b\|$	 $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$ e $\|a\| > \|b\|$

Fonte: os autores

Além desse vínculo em relação à representação algébrica e a posição do número no plano de Argand Gauss, quando o professor trabalha com as representações gráficas, há outros conceitos que podem ser explorados, como é o caso, por exemplo, das inequações. Como descrever algebricamente a região na qual um número complexo pode estar localizado? Qual o significado de escrever $x < y < 0$? Em particular, ao converter a representação algébrica de um número complexo para a trigonométrica, inequações trigonométricas também são retomadas.

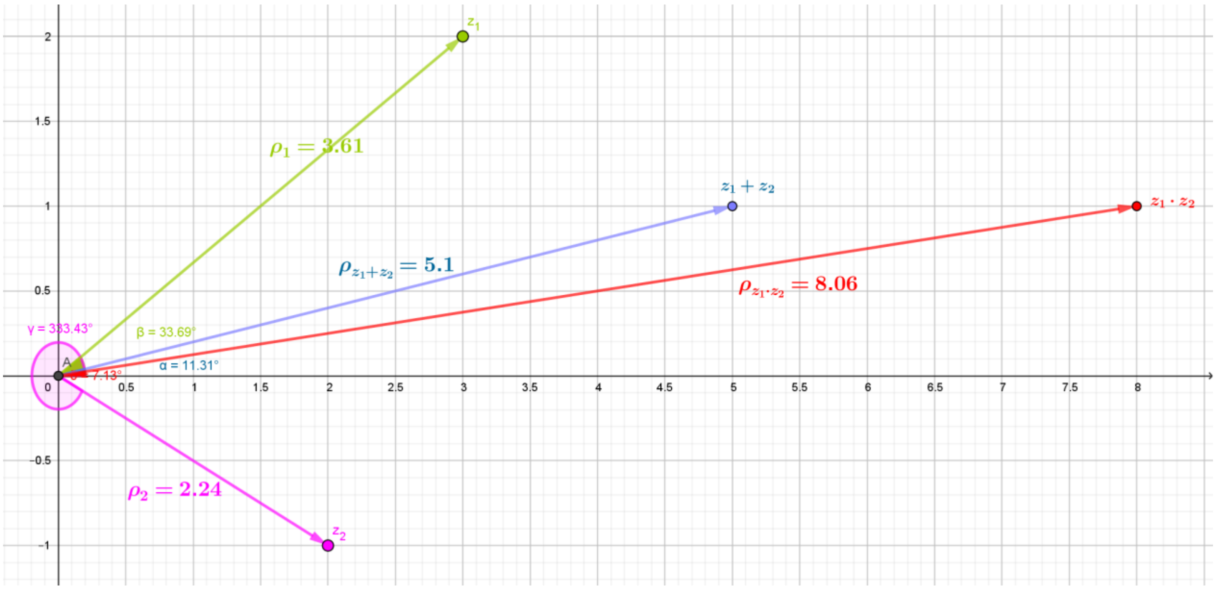
O trabalho simultâneo com as representações algébricas e gráficas, poderá favorecer outras compreensões, e, ao mesmo tempo, talvez, desfazer possíveis entendimentos errôneos, principalmente quando se trata das operações com números complexos. Nesse interim, o GeoGebra pode ser um forte aliado para a discussão dos elementos que fornece automaticamente. Nesse sentido, Santos, Kozakevicius e Mathias (2017, p.2) atestam:

> A compreensão de que a adição e a multiplicação de Números Complexos podem ser visualizadas, gráfica e dinamicamente, como translação e rotação no plano complexo com o uso do software livre GeoGebra, trará aos alunos um conhecimento algébrico, fazendo a conexão da álgebra com a geometria . Estes movimentos de rotação e translação são fundamentais neste trabalho para se poder sugerir através da utilização de Números Complexos um olhar matemático sobre fenômenos da natureza, como o desabrochar de uma flor ou o crescimento de conchas e búzios marinhos.

Considere, por exemplo, os números $z_1 = 3 + 2i$; $z_2 = 2 - i$. Considere, ainda, a tarefa de calcular e representar geometricamente $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$. Algebricamente, para fazer $z_1 + z_2$ basta somar as respectivas partes real e imaginária e obter $z_1 + z_2 = 5 + i$, o que corresponde à $(3,2) + (2,-1) = (3 + 2,2 - 1) = (5,1)$. Com isso, o professor pode também associar à relação de somas de pares ordenados: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Para determinar $z_1 \cdot z_2$ basta usar as regras usuais dos números reais para multiplicar binômios, e encontrar $z_1 \cdot z_2 = 8 + 2i$. Neste caso, porém, tem-se $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Para compreender essas fórmulas, é importante que o estudante passe pelo passo-a-passo em cada uma das operações. Veja as coordenadas dos números $z_1 + z_2$ e $z_1 \cdot z_2$ na Figura 3.

Figura 3: representação cartesiana e trigonométrica de números complexos



Fonte: os autores

Pela Figura 3, observe que, geometricamente, $z_1 + z_2$ resultou em um vetor cujas coordenadas é a soma das respectivas partes real e imaginária de cada um dos números. Porém, o mesmo não acontece com a multiplicação. Nesse ponto, a ferramenta computacional (no caso, o GeoGebra) pode fazer o aluno "enxergar" que as operações realizadas são diferentes e compreender tais diferenças, inclusive quando os números complexos estão na forma trigonométrica. Note que $z_1 = 3{,}61(cos33{,}69° + isen33{,}69°)$ e $z_2 = 2{,}24(cos333{,}43° + isen333{,}43°)$, mas $z_1 + z_2 = 5{,}1(cos11{,}31° + isen11{,}31°)$, ou seja, na forma trigonométrica não é possível somar módulos e argumentos para efetuar a soma requerida. Como fazer então? Qual o significado geométrico desse valor resultante? Por que em determinado registro é possível fazer operações de um modo que não é possível em outro? Qual a sintaxe de cada registro?

A possibilidade de realizar inúmeras somas em pouco tempo, no GeoGebra, pode levar o aluno a analisar as semelhanças e diferenças entre as operações, ao invés de se preocupar com os cálculos. Acreditamos que, desse modo, o foco do ensino será a aprendizagem e não a mera reprodução de conteúdo, pois, como afirmam Beltrão, Vitor e Barbosa (2017, p.149): "O dinamismo do Geogebra foi imprescindível para a visualização das diferentes representações das trocas de coordenadas, fato que o confirma como sendo de grande potencial para trabalhar com tais aplicações vinculadas aos números complexos".

Ainda na Figura 3, pode-se observar que $z_1 \cdot z_2 = 8{,}06(cos7{,}13° + isen7{,}13°)$. Atente-se que $2{,}24 \cdot 3{,}61 = 8{,}08$, e que $33{,}69° + 333{,}43° = 367{,}12°$, arco côngruo a $7{,}13°$. Ou seja, é possível intuir que, quando representados na forma trigonométrica, algebricamente é possível determinar o valor de $z_1 \cdot z_2$ na forma trigonométrica por meio do produto dos respectivos módulos e da soma dos respectivos argumentos. Ainda resta uma questão a discutir: e as diferenças apresentadas nos cálculos, por que (não) são relevantes? Aqui, pode-se voltar o olhar para os arredondamentos usados no aplicativo: o que muda se ao invés de adotar duas casas decimais de arredondamento forem usados cinco ou dez? O que estamos apontando nesse texto, é que uma abordagem de ensino baseada no trânsito entre diferentes representações semióticas pode levar o estudante a ir além do mero cálculo, e refletir sobre os significados das operações que realiza, o que pode, consequentemente, ajudá-lo no processo de atribuição de sentido e significado às coisas que estuda em Matemática, além de favorecer a coordenação de registros.

Segundo Duval (1995), a coordenação entre representações em diferentes registros é necessária para que o aluno tenha condições de acesso ao objeto matemático. Porém, para isso, é preciso que diferentes representações sejam usadas no ensino, dando a oportunidade de estudar o conteúdo sob vários aspectos semióticos. Como afirmam Laburú e Silva (2011, p. 19). “a aprendizagem de novos conceitos não pode ser separada de como aprender a representá-los e nem do que significam essas representações”, entretanto, o uso contínuo de várias representações semióticas, inclusive passando de uma a outra, pode contribuir com esse processo de significação.

Em particular, em se tratando de números complexos, Barros e Agricco JR (2019) consideram esse tema relevante para o estudo dos circuitos elétricos em correntes alternadas, e que, embora os principais livros da área foquem nas representações algébricas, “talvez uma abordagem com mais representações gráficas facilitasse os processos de ensino e de aprendizagem” (BARROS; AGRICCO JR, 2019, p.205), afirmam os autores.

Acreditamos que uma exploração da localização geométrica de um número complexo, a partir dos coeficientes reais, ou vice-versa, pode fazer com que o estudante análise mais profundamente os aspectos teóricos do que está sendo estudado, proporcionando ancoragens mais fecundas. Além disso, o estudo deixa de ser meramente aplicação de fórmulas para se pautar em avaliação das relações existentes. Ademais, defendemos que ao trabalhar em sala de aula também os números complexos a partir de uma abordagem de vetores, estaremos proporcionando melhor formação, em termos acadêmicos, àqueles que pretendem seguir uma carreira na área de exatas, sem que isso prejudique os demais estudantes.

A conversão da representação algébrica $z = a + bi$ para a representação gráfica no plano cartesiano, em que a z fica associado o afixo $P(a, b)$ é mais congruente semanticamente do que a conversão para a forma trigonométrica, haja vista que, no primeiro caso, para cada coeficiente existe uma coordenada no plano cartesiano. Já para o segundo caso, é preciso considerar que os elementos da forma trigonométrica são dados em função dos coeficientes a e b não de forma única, pois $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ e θ é tal que atende a duas condições: $\theta = \arccos\left(\frac{a}{\rho}\right)$ e $\theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{b}{\rho}\right)$. Por outro lado, para a conversão da forma algébrica para a forma de vetor, basta considerar, assim como no primeiro caso, que ao número $z = a + bi$, corresponde o afixo $P(a, b)$, que representa o vetor $\vec{v} = (a, b)$. Em todo caso, são muitas relações a serem mobilizadas, e isso apenas é otimizado a partir de uma abordagem dos números complexos a partir das suas múltiplas representações.

Os demais casos para $a \neq b$ que não estão apresentados no Quadro 2 podem ficar a cargo dos próprios alunos. Com isso, o professor poderá perceber se o estudante: atribui significado para o módulo de um vetor? Qual a relação que estabelece entre módulo e valor absoluto? Há conhecimentos que precisam ser revisitados, especialmente os trigonométricos? dentre outros.

Considerações finais

O presente artigo teve por objetivo discutir implicações dos coeficientes reais de um número complexo na forma algébrica para as representações gráficas cartesiana, como afixo, e trigonométrica, como vetor, que podem ser elementos complicadores da aprendizagem. Tivemos o intuito de trazer reflexões sobre as dificuldades inerentes a uma abordagem puramente algébrica em detrimento de relações e compreensões que podem ser favorecidas a partir das representações gráficas, inclusive para tratar das operações com números complexos algebricamente.

Esperamos que as reflexões apresentadas possam contribuir com o repensar da prática de outros professores. Mesmo que existem divergências entre a necessidade, ou não, de trabalhar números complexos em nível médio, essa discussão é profícua em termos de formação integral do estudante da Educação Básica, cuja finalidade é dar-lhes condições de prosseguir seus estudos em nível superior.

Como implementar um ensino que priorize as diferentes representações e as relações entre elas, se há tão pouco tempo disponível para o tratamento desse tema é uma questão para pesquisas futuras, e aqui fica como sugestão para os interessados.

Referências

AMORIM, T.M. ; OLIVEIRA, P.C. O software Geogebra: uma ferramenta para o ensino de números complexos. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais** [...], Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2016.

BARROS, L. G. X. DE; AGRICCO JR., R. C. Números complexos e grandezas elétricas vetoriais sob a ótica da Teoria dos Registros das Representações Semióticas. In: **Revemop**, v. 1, n. 2, p. 183 - 206, 1 maio 2019. Disponível em https://periodicos.ufop.br/revemop/article/view/1743/1507

BELTRÃO, I. S. L.; VÍTOR, C. B.; BARBOSA, I. S. Software Geogebra: uma ferramenta na prática docente para o ensino dos números complexos no ensino médio. **Educitec - Revista de Estudos e Pesquisas sobre Ensino Tecnológico**, Manaus, Brasil, v. 3, n. 05, 2017. DOI: 10.31417/educitec.v3i05.207. Disponível em: https://sistemascmc.ifam.edu.br/educitec/index.php/educitec/article/view/207. Acesso em: 5 jul. 2022.

BIANCCHINI, E.; PACCOLA, H. **Curso de Matemática**. Volume Único. São Paulo: Editora Moderna, 2003.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARNIÉLLI, A.F. O jogo como um recurso didático: uma perspectiva inclusiva para o ensino de números complexos. **Dissertação** (Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

CARVALHO, P. L. Uma perspectiva das pesquisas sobre o ensino dos números complexos. **Revista. Produção Discente em Educação Matemática**, São Paulo, v.8, n.2, pp.114-123, 2019.

CHERGUI, M.; ZRAOULA, L.; AMAL, H. Impact des difficultés langagières sur l'apprentissage des nombres complexes. *In:* MASTAFI, M. ; CHERRADI, B. ;JAMEA, A. (coords). Formation et Enseignement des Mathematiques et des Sciences: didactique, TIC et innovation pédagogique. **Actes de la deuxième édition du colloque international sur la formation et l'enseignement des mathématiques et des sciences**. pp.131-142, 2019. Disponível em https://cifem2018.sciencesconf.org/data/pages/ouvrageCIFEM_2019.pdf#page=131 Acesso em 28 fev. 2022.

DUVAL, R. **Semiosis et Pensée Humaine**. Registres sémiotiques et appprentissages intellectuels. Bern: Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano** (Fascículo I). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles T. Moretti. **Revemat**. Florianopólis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012.

FREITAS, J. L. M. , REZENDE, V. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v.2, n.3, p.10–34, 2013. https://doi.org/10.33871/22385800.2013.2.3.10-34

GHEDAMSI, I.; TANAZEFTI, R. Difficultés d'apprentissage des nombres complexes en fin de secondaire. **Petit x**, n°98, pp. 29-52, 2015.

LABURÚ, C. E.; SILVA, O.H.M. Multimodos e múltiplas representações: fundamentos e perspectivas semióticas para a aprendizagem de conceitos científicos. **Investigações em Ensino de Ciências**, v.16, n.1. pp.7-33, 2011. Disponível em https://www.if.ufrgs.br/cref/ojs/index.php/ienci/article/view/244/170 Acesso em 25 fev. 2022.

PUHL, C.S. **Interagindo com os Números Complexos: um material potencialmente significativo para acadêmicos de Engenharia**. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Escola Politécnica, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2021.

REZENDE, V. ; MORAN, M.; MARTIRES, T.M. ; TRAVASSOS, W. B. Registros de Representação semiótica e sua articulação com o hexágono de Dürer nas aulas se Matemática. **Em Teia**, v.9, n.12, p.1-25, 2018.

SANTOS, E. ; KOZAKEVICIUS, A. J.; MATHIAS, C. GeoGebra como Ferramenta no Ensino de Números Complexos. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, Gramado, v.5, n.1, 2017. Disponível em https://proceedings.sbmac.org.br/sbmac/article/viewFile/1483/1495 Acesso em 05 jul. 2022.

VOLCE, C.J. Recursos Didáticos para números complexos na perspectiva da Teoria dos registros de Representação Semiótica. **Dissertação** (Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática). Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2022.

Recebido em: 28 de fevereiro de 2022
Aprovado em: 27 de julho de 2022