

LIVRO DIDÁTICO E MODELAGEM MATEMÁTICA: ARTICULAÇÕES POSSÍVEIS

Textbook and mathematical modeling: possible articulations

Victor Hugo dos Santos Gois

Karina Alessandra Pessoa da Silva

Resumo

Neste artigo apresentamos resultados de pesquisa de mestrado em que buscamos evidenciar potencialidades em tarefas presentes em livros didáticos de Matemática para serem encaminhadas como atividades de modelagem matemática. A Modelagem Matemática enquanto alternativa pedagógica possibilita a participação dos alunos nos processos de ensino e de aprendizagem. Analisamos livros didáticos do Ensino Médio aprovados no Programa Nacional do Livro Didático de 2018. A partir das tarefas analisadas, planejamos e desenvolvemos uma atividade de modelagem com alunos do Ensino Médio de um colégio estadual. Inspirados na Teoria Fundamentada em Dados apresentamos códigos que emergiram, análises e categorias realizadas. Assim, inferimos que a seleção de situações-problema em livros didáticos que podem ser encaminhadas como atividades de modelagem deve ser feita a partir de temas que se aproximam do cotidiano dos alunos. E o “potencial para” desenvolver essas atividades de modelagem demanda do professor conhecer seus alunos estabelecendo articulações com experiências dos discentes.

Palavras-chave: Educação Matemática; Tarefas de livros didáticos; Atividades de modelagem matemática; Teoria Fundamentada em Dados; Fatura de água.

Abstract

In this paper we present results of a master's research in which we seek to highlight potentialities in tasks present in Mathematics textbooks to be referred to as mathematical modeling activities. Mathematical Modeling as a pedagogical alternative enables students to participate in teaching and learning processes. We analyzed high school textbooks approved in the 2018 National Textbook Program. Based on the tasks analyzed, we planned and developed a

modeling activity with high school students from a state school. Inspired by Grounded Theory we present codes that emerged, analyzes and categories performed. Thus, we infer that the selection of problem situations in textbooks that can be referred to as modeling activities should be based on themes that are closer to the students' daily lives. And the “potential to” develop these modeling activities requires the teacher to get to know his students by establishing links with students' experiences.

Keywords: Mathematics Education; Textbook Tasks; Mathematical Modeling Activities; Grounded Theory; Water invoice.

Introdução

A busca por estratégias e encaminhamentos que possibilitem potencializar os processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula tem sido subsidiada por tendências da Educação Matemática. Dentre elas, a Modelagem Matemática tem apresentado resultados positivos, conforme indicam pesquisas presentes na literatura.

De acordo com Bisognin e Bisognin (2011, p. 106) podemos caracterizar a Modelagem Matemática como “[...] um caminho que pode aproximar a linguagem do professor à dos alunos e propiciar a aprendizagem de conteúdos matemáticos”. Nesse sentido, aborda-se um problema do cotidiano dos alunos (linguagem dos alunos) utilizando a Matemática (linguagem do professor). Para isso, os alunos podem utilizar os conhecimentos matemáticos que já possuem e aprender outros novos.

Assim, a Modelagem pode se constituir como alternativa pedagógica para as aulas de Matemática, perspectiva essa que

adotamos neste artigo, seguindo principalmente os pressupostos apontados por Almeida, Silva e Vertuan (2012). Desse modo, busca-se ensinar matemática a partir de solução de problema via representações matemáticas da realidade que vão sendo elaboradas por aqueles que a investigam.

Considerando questões relativas à sala de aula, à linguagem do professor e à dos alunos, um instrumento a se considerar para auxiliar as práticas é o Livro Didático de Matemática (LDM). Isso porque os livros didáticos “são a personificação das intenções curriculares e orientam e moldam a implementação da sala de aula” (VOS, 2011, p. 666). Além disso:

O livro didático é um dos instrumentos mais utilizados pelos professores para organização e desenvolvimento das atividades em sala de aula e, até mesmo, para aprimorar seu próprio conhecimento sobre o conteúdo e, para os alunos, trata-se de uma fonte muito valiosa de informação [...] (COSTA; ALLEVATO, 2010, p. 72-73).

Existem pesquisas que analisam a presença, mesmo que de forma implícita, da Modelagem Matemática em LDM. Ao analisar livros didáticos de escolas primárias franco-alemãs, Cabassut e Wagner (2011, p. 567) evidenciaram que atividades “de modelagem aparecem em livros didáticos envolvendo variados domínios do mundo da matemática e do mundo real”, mesmo que a Modelagem não esteja explicitamente destacada neste material. Reilly (2017, p. 444), afirma que “Muitos livros didáticos são projetados para orientar os alunos no processo de solução de problemas sem permitir muito espaço para explorarem sua própria abordagem”.

Em nossa pesquisa, entretanto, o que nos move é evidenciar potencialidades em tarefas presentes em livros didáticos de Matemática para serem encaminhadas como atividades¹ de modelagem matemática. Assim, analisamos coleções de LDM aprovadas no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2018 e selecionamos tarefas relativas ao conteúdo

de funções definidas por mais de uma sentença que possam ser desenvolvidas como atividades de modelagem e as implementamos em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do norte do Paraná, em que o primeiro autor desenvolveu sua pesquisa de mestrado (GOIS, 2019).

Levando em consideração nossos interesses, organizamos este artigo apresentando, além desta introdução, a fundamentação teórica sobre Modelagem Matemática, seguida dos aspectos metodológicos para, então, apresentarmos nossas análises inspiradas na Teoria Fundamentada em Dados. Finalizamos com nossas considerações.

Modelagem Matemática

De modo geral, uma atividade de modelagem tem como tríade basilar: uma situação inicial (problemática ou situação-problema), uma situação final e uma coleção de ações necessárias para partir da situação inicial e chegar à situação final.

Essa coleção de ações na perspectiva de Almeida, Silva e Vertuan (2012) é caracterizada pelas seguintes fases: interação (primeiro contato com a situação inicial), matematização (processo de transição de linguagens, fazendo o uso de objetos matemáticos), resolução (construção de um modelo matemático), interpretação dos resultados (a análise de uma resposta para o problema) e validação (verificação e adequação do modelo matemático para a situação inicial).

Na situação final há uma solução para a problemática, a partir de uma representação matemática da situação inicial. Tal representação convencionou-se chamar de modelo matemático. “Um modelo matemático pode ser escrito utilizando-se para isso diferentes sistemas de representação” (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 14). Além disso, um modelo matemático serve para representar uma situação ou descrevê-la, sendo possível fazer previsões a partir do modelo deduzido para o problema, ou ainda, considerar informações antes não pensadas.

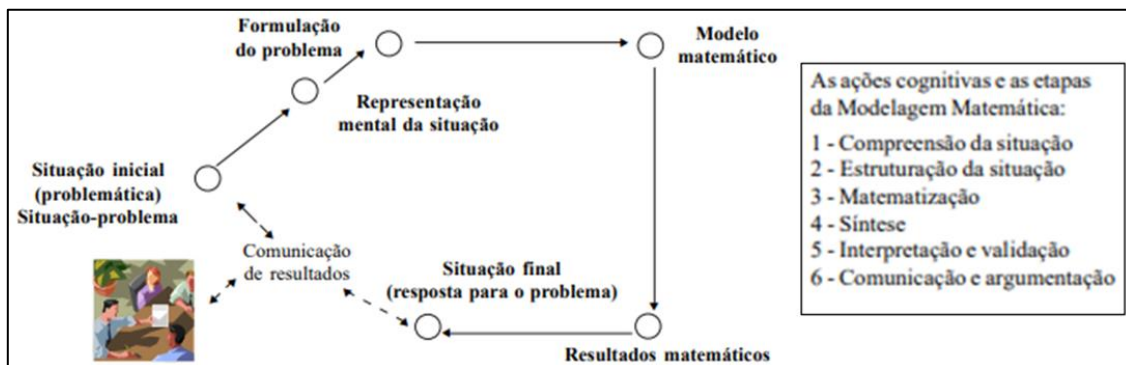
¹ Ao empregarmos o termo atividade, quando nos referimos a atividades de modelagem, seguimos a mesma aceção do termo que Almeida, Silva e Vertuan (2012) adotam. Usamos

a palavra tarefa ao nos referirmos a textos presentes em livros didáticos.

No desenvolvimento de uma atividade de modelagem as fases propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) podem ocorrer de maneira cíclica e não linear, já que enquanto não há uma resolução e

validação dos dados é possível revisitar as outras fases. Almeida e Silva (2012) apresentam uma imagem de como seria esse ciclo, conforme Figura 1.

Figura 1 – Ciclo de uma atividade de modelagem matemática



Fonte: Almeida e Silva, 2012, p. 630.

No ciclo de Almeida e Silva (2012), podemos identificar que há uma preocupação com as ações cognitivas dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem. Entretanto, ao desenvolver tais atividades, os alunos podem ter dificuldades em perpassar pelas fases desse ciclo.

Concordamos com Cabassut e Wagner (2011, p. 559) de que por meio da Modelagem, “o conhecimento matemático e o conhecimento do mundo real são transpostos na instituição escolar para se tornar um conhecimento ensinado”. E, nesse sentido, sua implementação em sala de aula pode ser considerada uma maneira envolver os alunos em situações das quais tenham interesse em investigar. No entanto, assim como Giraldi e Sant’Ana (2020, p. 44), entendemos que “a Modelagem Matemática ainda precisa assumir seu lugar nas escolas, não para ser absoluta, mas para trazer entendimento da matemática básica no dia a dia”.

Um aspecto que tem sido abordado na literatura com relação à implementação de atividades de modelagem matemática em sala de aula é quem escolhe a situação a ser investigada. É o professor? É o aluno? Todavia, o que está em jogo é o interesse dos alunos. Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 25), “a literatura tem registros de experiências de modelagem bem-sucedidas ainda que os temas tenham sido indicados

pelo professor”. É nessa assertiva que nos debruçamos ao intentar articular atividades de modelagem matemática e tarefas presentes em livros didáticos, com foco em evidenciar as potencialidades das mesmas.

Aspectos metodológicos

Estabelecida a fundamentação teórica da pesquisa, o próximo passo foi selecionar tarefas em livros didáticos aprovados no Programa Nacional do Livro Didático 2018 (PNLD–2018) com potencial para serem encaminhadas enquanto atividades de modelagem matemática. Para isso, delineamos as seguintes questões norteadoras:

- como selecionar, nos LDM, situações-problema para serem encaminhadas por meio da modelagem, em particular, situações-problema que tratam de funções definidas por mais de uma sentença?
- o que caracteriza que uma tarefa presente no LDM tenha “potencial para” ser encaminhada enquanto atividade de modelagem?
- como pode se configurar o potencial para ser encaminhada uma atividade de modelagem planejada a partir do LDM, no primeiro momento de familiarização dos alunos com

atividades de Modelagem Matemática?

Em uma primeira etapa, fizemos uma análise das características de tarefas presentes em LDM que podem ser encaminhadas como preconizado na literatura sobre Modelagem Matemática como alternativa pedagógica (buscando responder a primeira questão e parcialmente a segunda). Numa segunda etapa de análise para a pesquisa, desenvolvemos essas tarefas com alunos de um primeiro ano do Ensino Médio (buscando complementar a resposta para a segunda questão e responder a terceira).

Optamos por analisar, dentre as oito coleções aprovadas no PNLD-2018, aquelas em que o objeto matemático função definida por mais de uma sentença aparecesse no sumário do livro, seja como capítulo ou como um tópico. E, em cinco coleções do primeiro ano do Ensino Médio é abordado o conceito de função definida por mais de uma sentença e é sobre elas que direcionamos nosso olhar, identificando-as em nossa pesquisa com os respectivos códigos: Moderna (2016) – LDM1; Dante (2017) – LDM2; Iezzi et al. (2016) – LDM3; Paiva (2015) – LDM4; Smole e Diniz (2017) – LDM5.

Contudo, ao analisarmos tarefas relacionadas ao objeto matemático funções definidas por mais de uma sentença nos livros didáticos, não tínhamos por objetivo determinar que objeto matemático iria emergir no desenvolvimento das atividades de modelagem, mas evidenciar se tais atividades permitiam que esse conteúdo matemático emergisse.

Já com relação à segunda etapa desta pesquisa, participaram 21 estudantes de uma turma do primeiro ano do Ensino Médio, organizados em quatro grupos com os quais o primeiro autor desenvolveu atividades de modelagem. Foram coletados os registros escritos e áudio visuais no desenvolvimento das atividades com os alunos. Os pais dos alunos assinaram uma declaração autorizando a realização da pesquisa de modo que os mesmos não fossem identificados. Assim, para os alunos utilizamos a letra A seguida de números de 1 a 21; para referenciar os grupos utilizamos a letra G seguida de números de 1 a 4.

A análise qualitativa foi subsidiada na Teoria Fundamentada em Dados (TFD), na perspectiva de Charmaz (2009). Por meio da codificação dos dados evidenciamos aspectos relativos à potencialidade da tarefa para ser encaminhada como atividade de modelagem, levando em consideração as tarefas dos livros didáticos e o desenvolvimento em sala de aula da atividade.

Na TFD há três tipos de codificações: inicial, axial e focalizada. Os códigos, na codificação inicial, segundo Charmaz (2009, p. 74), “são provisórios, comparativos e fundamentados nos dados”. Em nossa pesquisa, a codificação inicial foi realizada a partir dos enunciados apresentados nas tarefas das cinco coleções de LDM analisadas. A codificação axial que “visa a associar as categorias às subcategorias e questiona o modo como elas estão relacionadas” (CHARMAZ, 2009, p. 91) foi abordada pela adaptação e desenvolvimento de uma das tarefas elegidas do LDM1, seguindo encaminhamentos de uma atividade de modelagem com os alunos. A partir dos dados coletados e, para refinar nossa teoria emergente, estabelecemos subcategorias para uma das categorias da codificação inicial, realizando a codificação focalizada que “exige a tomada de decisão sobre quais os códigos iniciais permitem uma compreensão analítica melhor para categorizar os seus dados de forma incisiva e completa” (CHARMAZ, 2009, p. 87).

Discussão e análise empreendidas

Neste tópico descrevemos e analisamos uma das tarefas que implementamos a partir da análise das cinco coleções de LDM. Porém para nosso propósito, neste artigo, focamos a codificação em uma das coleções – LDM1. Porém, vale ressaltar que a codificação a ela associada diz respeito a todas as coleções analisadas. A partir das tarefas presentes no LDM1 pudemos identificar e estabelecer três grupos de tarefas – GT01, GT02, GT03 – que foram mediadas pelas características semelhantes nas estruturas dos enunciados, como apresentado no Quadro 1, configurando a codificação inicial.

Quadro 1 – Grupos de tarefas presentes no LDM1

Grupo de tarefas	Características
GT01	Tarefas com enunciados mais curtos e usando comandos imperativos, tais como: escreva, calcule, construa, faça, determine.
GT02	Tarefas com comandos imperativos, como as tarefas de GT01, mas com alguma representação gráfica ou figural.
GT03	Tarefas que apresentam enunciados com situações-problema.

Fonte: da pesquisa

Com a identificação de características comuns às tarefas presentes nos outros LDM, além do LDM1 e organizadas nos três grupos de tarefas, consideramos que três categorias nos auxiliaram a responder à questão de pesquisa. Indicamos estas categorias pela letra maiúscula C seguida de numeração sequencial de 01 a 03:

- C01: tarefas com comandos imperativos;
- C02: tarefas com comandos imperativos e um gráfico ou figura;
- C03: tarefas com situações-problema no enunciado.

Assim, associamos as tarefas que pertenciam ao GT01 à categoria C01 e obtendo como códigos iniciais os comandos imperativos nos enunciados das tarefas tais como use, faça, calcule, entre outros. O mesmo tipo de associação ocorreu respectivamente entre GT02 e GT03 com C02 e C03. Para a categoria C02 obtivemos códigos como “Observe a lei e o gráfico... responda as questões...” e “Seja f... representada no gráfico...qual é a lei...”. Já a categoria C03, que mais nos interessou, parece se aproximar de atividades de modelagem matemática pela sua característica investigativa em que,

[...] o ponto de partida é, normalmente, uma situação no mundo real. A simplificação, estruturação e esclarecimento da situação – de acordo com o conhecimento e os interesses do modelador – conduzem à formulação de um problema e de

um modelo real da situação (BLUM, 2002, p. 152).

Todavia, não estamos afirmando que as tarefas desta categoria do jeito que são apresentadas possam imediatamente ser desenvolvidas como atividades de modelagem. As tarefas elaboradas para livros didáticos apresentam questionamentos de caráter mais fechado e direto e, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012), em atividades de modelagem

[...] o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 17).

No LDM1 a tarefa envolvendo conta de água foi direcionada como aplicação do objeto de conhecimento matemático: função definida por mais de uma sentença, apresentando um quadro associando a quantidade de consumo c (em m^3) de água com quatro expressões que indicam o valor V (em reais) da conta a pagar conforme Figura 2.

Figura 2 – Tarefa sobre conta de água proposta no LDM1

1. Uma empresa de tratamento de água e esgoto de certa cidade calcula o custo residencial mensal de seus serviços da seguinte forma:

Consumo c de água	Valor V da conta (R\$)
$0 m^3 < c \leq 10 m^3$	$V = 10$
$10 m^3 < c \leq 20 m^3$	$V = 10 + (c - 10) \cdot 1,20 = V_1$
$20 m^3 < c \leq 30 m^3$	$V = V_1 + (c - 20) \cdot 1,50 = V_2$
$30 m^3 < c$	$V = V_2 + (c - 30) \cdot 2,00$

O valor total da conta é igual ao dobro do valor calculado para a água.
 O consumo de água na casa de Caio, nos três últimos meses, foi igual a $9 m^3$, $18 m^3$ e $36 m^3$. Então, Caio pagou, em reais, respectivamente:

a) 20,00; 39,20; 98,00
 b) 10,00; 19,60; 49,00
 c) 20,00; 40,00; 80,00
 d) 18,00; 37,20; 96,00

alternativa a

Fonte: Moderna, 2016, p. 81.

O enunciado da tarefa informa que o valor total a pagar pelo consumo de água é igual ao dobro do valor V em qualquer faixa de consumo. Desse modo, há uma simplificação na exploração do tema, pois para o cálculo de contas de água, em geral, há o cálculo da taxa de consumo de água acrescido de uma porcentagem referente ao consumo de esgoto.

Assim, a partir de uma situação presente nas tarefas codificadas (na codificação inicial) por C03, planejamos e desenvolvemos uma atividade de modelagem com os alunos de um primeiro ano do Ensino Médio, considerando o

cálculo de uma fatura de água. A dinâmica da aula foi o professor (primeiro autor deste artigo) organizar os alunos em grupos, conversar inicialmente a respeito da conta de água e da empresa que fazia a manutenção dos serviços de água e esgoto na cidade, a Sanepar, depois distribuir para os alunos uma folha com as informações apresentadas no Quadro 2.

Quadro 2 – Informações para o desenvolvimento da atividade sobre conta de água

Quanto pago pela água que consumo?

Em Londrina, a empresa responsável pelo abastecimento e tratamento de água e de esgoto é a Sanepar. Segundo o site SANEPAR (2018), A Sanepar fornece água tratada a 100% da população urbana dos municípios atendidos. Coleta mais de 70% e trata 100% do esgoto coletado, a média nacional de coleta é de 51,9% e de tratamento é de 74,9% conforme Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento - SNIS 2016 (SANEPAR, 2018).

Na Figura 3 estão apresentadas as tarifas, por consumo de m^3 de água, para o cálculo de custo residencial mensal. Sabendo que no cálculo da conta de água são cobrados o consumo de água e uma taxa referente ao esgoto, que corresponde a 80% do valor consumido de água, se conhecermos o consumo em m^3 de água, qual o total pago na conta de água?

Figura 3 – Tarifas apresentadas em um modelo de fatura

FAIXAS DE CONSUMO	VOLUME	VALOR $m^3/R\$,$	TOTAIS	
			ÁGUA	ESGOTO
Mínimo		34,58		
de 6 a 10		1,07		
de 11 a 15		5,96		
de 16 a 20		5,99		
de 21 a 30		6,04		
acima de 30		10,22		

Fonte: Sanepar. Disponível em: <<http://site.sanepar.com.br/>>. Acesso em: 01 jul. 2018

Fonte: elaborado para a pesquisa

As informações como apresentadas se aproximam da estrutura sugerida por Almeida, Silva e Vertuan (2012) para o primeiro momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem. Segundo os autores,

o professor coloca os alunos em contato com uma situação-

problema, juntamente com os dados e as informações necessárias. A investigação do problema, a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático são acompanhadas pelo professor, de modo que ações como definição de variáveis e de hipóteses, a simplificação, a transição para linguagem

matemática, obtenção e validação do modelo bem como o seu uso para a análise da situação, são em certa medida, orientadas e avaliadas pelo professor (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 26).

Ainda que os alunos tivessem conhecimento da existência de conta de água, não sabiam como era determinado o consumo e nem que era cobrada uma taxa de esgoto e estavam com dúvidas conforme evidenciado no diálogo com integrantes de G4:

A16: Então é que não estamos entendendo a faixa de consumo, porque aqui né, sabendo que no cálculo da conta de água são cobrados do consumo de água uma taxa referente ao esgoto, aí a faixa de consumo: mínimo de 6 a 10, vai ser só assim [aponta para o número 6 na primeira faixa de consumo de água], nós vamos usar só o 6 na conta? Pro consumo, na hora de fazer a conta e o esgoto?

Professor: Não, não foi especificado quanto foi consumido, então tem o mínimo de 6 a 10 metros cúbicos. A primeira coisa que vocês têm que saber é como calcular o consumo de água pra depois ver do esgoto, entendeu?

A18: É então porque aqui o x pode ser a faixa de consumo aí tira 80% que é do esgoto?

A17: Se a faixa de consumo for de 6 a 10 aí sei lá pode fazer 80% de 8, deve ser 10.

A partir do excerto entende-se que A18 relacionou o consumo de água a um objeto que era familiar para ele, a notação algébrica de x como uma variável e que se relaciona ao objeto matemático função. No excerto ainda evidenciamos o que Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15) caracterizam como fase de inteiração, pois “representa o primeiro contato com a situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação”.

Já no G2, durante a inteiração, os alunos estavam com dificuldade em entender de que maneira era medido o consumo de água, conforme destacado no excerto a seguir.

Professor: Como que eu meço o consumo de água? Isso está na folha de todo mundo.

A7: Não sei... [os alunos do grupo voltam e leem a folha que receberam].

Professor: Dá uma olhada aí. Essas faixas de consumo são referentes a que? [o professor aponta para as faixas de consumo da tarefa].

A7: Então isso que eu; estávamos vendo.

Professor: O consumo de água é medido em que unidade?

A8: Em litros? Em metros? [o aluno menciona metro como abreviação de metro cúbico].

[Os alunos questionam uns aos outros se o consumo é medido em litros ou metros cúbicos e concluem que é medido em metros cúbicos depois de relerem o texto].

A10: O consumo é em metros cúbicos, então de 6 a 10 vamos colocar 8, $8m^3$ que vai ser oito vezes oito vezes oito que é, não sei.

A9: Oito vezes oito é igual a sessenta e quatro e sessenta e quatro vezes oito, vocês não sabem quanto que é?

A7: 512 metros. A já sei então, vai ser x metros cúbicos, não é? Vai ficar x ao cubo que vai ser o valor correspondente à faixa de consumo e disso a gente retira 80%.

A8: Eu me perdi nas contas.

A7: Lê a pergunta novamente.

A9: A taxa referente ao esgoto então é uma taxa adicional?

A8: É.

A7: Então cobra a mais. x metros cúbicos mais oitenta por cento do x .

A partir desse excerto podemos evidenciar que o G2 estava com dificuldades em entender de que maneira era medido o consumo de água, e resignificaram tal objeto ao relerem o texto e questionarem uns aos outros, caracterizando a importância do trabalho em grupo, enquanto aporte para o desenvolvimento de atividades de modelagem em sala de aula. Ainda que tal resignificação tenha gerado um entendimento equivocado de que a medida em metros cúbicos deveria ser elevada ao cubo ($8 m^3$ seria igual a 8^3).

Contudo, podemos perceber que as discussões de A7, A8, A9 e A10 são características da fase da modelagem

denominada matematização. Nas palavras de Almeida, Silva e Vertuan (2012) essa fase

[...] é caracterizada pelo processo de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas, que são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido na fase de inteiração [...] (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15).

De modo análogo aos grupos 2 e 4, o G1 e o G3 também apresentaram questionamentos e conclusões semelhantes aos destacados nos excertos.

O professor vendo que era uma dúvida em todos os grupos, explicou a todos que primeiro eles deveriam tentar determinar de que maneira era cobrado o consumo de água para, em seguida, determinar quanto era cobrado pela taxa de esgoto.

Ainda conversando com todos os alunos, A3 questionou: *professor, podemos escolher um valor de consumo para tentar calcular quanto gasta?* Ao ver que esta poderia ser uma maneira de simplificar a situação foi consentido a todos os grupos escolherem um valor para determinar o quanto seria cobrado, mas o professor advertiu: *lembrem-se que escolher um valor*

e determinar quanto será gasto para esse determinado valor de consumo não responde ao problema, pois vocês devem achar uma maneira de dizer quanto é cobrado por qualquer valor de consumo de água informado.

Assim G1 e G2 decidiram determinar o valor cobrado por água e esgoto para 15 m³, enquanto G3 optou por 9 m³ e G4 por 16 m³.

Em relação às simplificações de primeiro determinar para um consumo específico de metros cúbicos para depois determinar em geral, temos que, segundo Almeida e Silva (2012, p. 95), “as simplificações são ações cognitivas que auxiliam na tomada de decisão para o encaminhamento do desenvolvimento da atividade”.

Apresentamos a seguir a resolução do grupo G1 que optou por determinar o valor a pagar por 15 m³, conforme Figura 4. Devido à qualidade da imagem, optamos por também digitar a resolução do grupo.

Figura 4 – Resolução apresentada por G1

$V_p - V_a + 34,58 = \frac{V_g}{100} \cdot 80 = V_t + V_g$ $15 \text{ m}^3 = 5 \cdot 5,96 + 5 \cdot 1,07 + \frac{V_g}{100} \cdot 80 + 34,58$ $29,8 + 5,35 + 94,58$ $69,95 + 85,96$ $T_p = 125,91$	$V_p - V_a + 34,58 = \frac{V_g}{100} \cdot 80 = V_t + V_g$ $15 \text{ m}^3 = 5 \cdot 5,96 + 5 \cdot 1,07 + \frac{V_g}{100} \cdot 80 + 34,58$ $29,8 + 5,35 + 94,58$ $69,95 + 85,96$ $T_p = 125,91$
---	---

Fonte: relatório entregue por G1

As letras da variável: “Ve” indicavam “valor excedente”; “Va” indicavam “valor da água”; “Vg” correspondiam a “valor gasto”; “VT” abreviavam “valor total”; “TP” correspondiam a “total pago”. Assim G1 identificou na atividade que os cinco primeiros metros cúbicos gastos de água

correspondem à tarifa mínima que é R\$ 34,58. E os outros metros cúbicos gastos são excedentes e são cobrados conforme faixa de tarifa de consumo, ou seja, para determinar o valor gasto com 15 m³ de água eles verificaram que há 5 m³ referente a tarifa mínima, 5 m³ excedentes e referente a faixa de tarifa de 6 m³ a 10 m³ e outros 5 m³

excedentes que correspondem a tarifa de 11 m³ a 15 m³.

Nesse caso, na primeira linha que escreveram, “ $V_e \times V_a$ ” corresponde de modo geral a identificar os metros cúbicos excedentes da tarifa mínima e multiplicá-los pela tarifa corresponde a cada faixa de consumo. Além disso, “ $V_e \times V_a + 34,58$ ” corresponde ao valor do consumo de água representado por “ V_g ”. E para determinar o valor do esgoto deveriam calcular 80% de “ V_g ” que está indicado na primeira linha por “ $V_g/100 \times 80$ ” obtendo assim o valor total gasto que os alunos representaram por “ VT ”.

Porém os alunos obtiveram uma soma equivocada por alguns centavos, pois ao invés de obterem R\$ 69,73 no valor gasto com água eles obtiveram R\$ 69,95 o que gerou um erro de alguns centavos no valor final a pagar.

Ao final da aula o professor sugeriu que todos os alunos validassem a expressão escrita pelo G1 para responder o problema. Para isso, usando a expressão $(V_e \times V_a + 34,58 = V_g/100 \times 80 = VT + V_g)$, G2, G3 e G4 deveriam refazer os cálculos dos metros cúbicos por eles escolhidos (15 m³, 9 m³ e 11 m³, respectivamente). Já G1 refazer os cálculos para 9 m³ e verificar se com esse modelo obteriam a mesma resposta.

Por fim, os grupos concluíram que a expressão escrita pelo G1 era um modelo para responder o problema, pois os alunos conseguiram validar com esse modelo o resultado que haviam obtido anteriormente. O que constitui a fase Interpretação de Resultados e Validação. A sistematização da situação, bem como a abordagem do conteúdo matemático foram realizadas pelo professor, pois os alunos não apresentaram a expressão geral considerando todas as faixas como uma função definida por várias sentenças.

A partir das análises no desenvolvimento dessa atividade no Quadro 3 apresentamos as subcategorias da categoria C03, “Tarefas com situações-problema no enunciado”, que emergiram das análises do desenvolvimento da atividade de modelagem e que correspondem à codificação axial indicada na Teoria Fundamentada em Dados.

Quadro 3 - Categoria C03 e subcategorias que emergiram das análises da atividade de modelagem

Categoria	Subcategorias
Tarefas com situações-problema no enunciado	Aluno identifica situação-problema como uma situação que pode acontecer com ele ou com alguma outra pessoa
	Familiaridade com a situação-problema
	Objeto matemático para resolver a situação é desconhecido
	Objeto matemático que soluciona a situação-problema não é singular, mas plural
	Situação-problema pode ser resolvida com os conhecimentos matemáticos que o aluno já possui
	Simplificações são ações cognitivas que possibilitam responder a atividade planejada
	Situação-problema pode ser usada para relacionar diferentes objetos de conhecimento matemático
Professor intervém quando necessário para auxiliar os alunos em qualquer fase do desenvolvimento da atividade de modelagem	

Fonte: da pesquisa

Com isso, temos nossas categorias conceituais a partir das análises da atividade que desenvolvemos com os alunos. O “potencial para” uma tarefa de modelagem em LDM articula-se a tarefas cujo tema permita ao aluno relacionar a situações que já foram vividas por ele ou por alguém próximo a ele. Sendo alguns destes temas já familiares aos alunos, como o cálculo de uma fatura de água.

A partir das categorias conceituais construídas e das características destacadas no Quadro 1 podemos destacar categorias teóricas que configuram o potencial para tais tarefas. Essas categorias teóricas emergiram na codificação focalizada:

- o aluno relaciona o tema trabalhado a situações que ele já experienciou ou conhece alguém próximo a ele que possui alguma experiência com o tema;
- a tarefa não possui uma única resolução ou uma única resposta e o

aluno entende que precisa pensar em uma maneira de resolver a tarefa, não há um objeto de conhecimento matemático pré-vinculado a tarefa que será aplicado;

- o aluno adquire confiança para atuar ativamente nos processos de ensino e de aprendizagem, considerando que os conhecimentos que possui articulados aos conhecimentos dos colegas em grupos possibilita que encontrem um modelo de modo independente do professor;
- a configuração da sala de aula se altera, o foco não é mais a lousa, carteiras são agrupadas para o trabalho em grupo o foco está nas discussões, matematizações e resoluções dos grupos.

O que podemos conjecturar é que tarefas que apresentam enunciados com situações-problema presentes em livros didáticos podem ser encaminhadas como atividades de modelagem matemática, desde que sejam de interesse dos alunos e que possam estar associadas ao cotidiano. Para isso, consideramos que essas tarefas necessitam ser adaptadas com dados atualizados e que correspondem ao contexto dos alunos, da escola e do professor.

Considerações finais

Considerando nosso interesse em evidenciar potencialidades em tarefas presentes em livros didáticos de Matemática para serem encaminhadas como atividades de modelagem matemática, realizamos uma análise em coleções aprovadas no PNLD–2018 do Ensino Médio. Com base nessas análises planejamos e desenvolvemos, a partir de um dos livros analisados, uma atividade de modelagem. As análises foram realizadas à luz das características da Modelagem Matemática na Educação Matemática enquanto alternativa pedagógica. Os dados foram categorizados à luz da Teoria Fundamentada em Dados.

As análises do LDM1 geraram uma codificação inicial dos dados e três categorias de tarefas: com comandos imperativos; com comandos imperativos e um gráfico ou figura; com situações-problema no enunciado. A partir dessas

categorias iniciais, inferimos que para selecionar situações-problema em livros didáticos de Matemática que podem ser encaminhadas por meio da modelagem, devemos considerar situações com temas que se aproximam da vida dos alunos que se articulem com experiências de vida deles ou de pessoas próximas a eles.

Inferimos isso considerando os apontamentos de Blum (2002) e de Almeida, Silva e Vertuan (2012) em que uma atividade de modelagem trata de uma situação do mundo real que a partir de simplificações e investigações os alunos buscam investigar e saber mais a respeito. Sendo assim, o professor deve levar em consideração tais características na busca por situações presentes em LDM que possam ser encaminhadas pela modelagem.

Em seguida, selecionamos uma das situações presentes na categoria “tarefas com situações-problema no enunciado”, elaboramos e desenvolvemos com os alunos do primeiro ano do Ensino Médio uma atividade de modelagem.

Os registros que emergiram no desenvolvimento das atividades pelos grupos nos permitiram construir e ter uma nova ótica dos dados – a codificação axial – e, a partir de tais codificações, elaboramos uma categoria conceitual e suas subcategorias, que nos permitiram delinear e construir a teoria emergente dos dados.

Nessas subcategorias identificamos, com base nos registros, que o “potencial para” desenvolver uma atividade de modelagem planejada a partir de situações presentes em LDM demanda que o professor conheça seus alunos e identifique situações com as quais os alunos, ou alguém próximo deles, possam ter alguma experiência. Podemos inferir isso a partir de excertos das falas dos alunos no desenvolvimento das atividades, quando reconhecem a temática tratada como uma situação que pode ocorrer com ele ou próximo a ele.

Outro fator a considerar é que tais atividades de modelagem não tinham como foco apenas objetos matemáticos, mas aproximam a Matemática de situações cotidianas podendo pensar e analisar tais situações fazendo uso de objetos de conhecimento matemático. Com isso os alunos puderam perceber que não havia um objeto matemático pronto e definido que

seria usado para matematizar e responder o problema que investigaram, mas que a Matemática seria utilizada para investigar a situação. Sendo plurais os objetos matemáticos que possibilitariam responder o problema.

O “potencial para” uma tarefa ser encaminhada por modelagem no primeiro momento de familiarização dos alunos com tais atividades se configura na relação que eles estabelecem entre a atividade e seu cotidiano. Romper o paradigma de tarefas que possuem única resposta correta, ou única resolução, assumir com confiança um papel ativo nos processos de ensino e de aprendizagem, identificando que os conhecimentos prévios tornam possíveis que deduzam um modelo e solução para o problema, bem como articular diferentes objetos de conhecimento matemático nos diferentes modelos deduzidos pelos alunos e/ou apresentados ao final pelo professor, caso deseje introduzir um novo objeto matemático aos alunos são ações realizadas em uma atividade de modelagem matemática.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência & Educação**. v. 18, n. 3, p. 623-642, 2012.
- ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.
- BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Construção de modelos discretos para o ensino de matemática, In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (orgs.), **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**. Londrina, Eduel, 2011.
- BLUM, W. ICMI Study 14: Applications and modeling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**. 51, p. 149–171, 2002.
- CABASSUT, R.; WAGNER, A. Modelling at Primary School Through a French–German Comparison of Curricula and Textbooks. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. A. (Eds.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical**
- Modelling**. ICTMA 14. New York: Springer, 2011, p. 559-568.
- CHARMAZ, K. **A construção da teoria fundamentada**: guia prático para análise qualitativa. Tradução de Joice Elias Costa. Porto Alegre: Artmed, 2009.
- COSTA, M. S.; ALLEVATO, N. S. G. Livro didático de matemática: Análise de professoras polivalentes em relação ao ensino de geometria. **Vidya**, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010.
- DANTE, L. R. **Matemática**: contextos e aplicações – ensino médio, volume 1.3ª ed., São Paulo: Ática, 2017.
- GIRALDI, O. C. P.; SANT’ANA, A. A. Uma experiência de modelagem matemática promovendo uma reflexão crítica sobre o consumo da água. **EMR-RS**, v. 1, n. 21, p. 35-45, 2020.
- GOIS, V. H. dos S. **Livro didático e atividades de modelagem matemática: algumas articulações**. 2019. 150 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática do Programa de Mestrado de Ensino de Matemática) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Londrina, 2019.
- IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N. **Matemática**: ciências e aplicações – ensino médio, volume 1. 9ª ed., São Paulo: Saraiva, 2016.
- MODERNA (Org.). **Conexões com a Matemática**. 3ª ed., São Paulo: Moderna, 2016.
- PAIVA, M. **Matemática**: Paiva. 3ª ed., São Paulo: Moderna, 2015.
- REILLY, E. Developing a Mathematical Modelling Task for All Students. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modelling and Applications**: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. New York: Springer, 2017, p. 443-453.
- SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo 1**. 1ª ed., São Paulo: Saraiva, 2016.
- VOS, P. Theoretical and Curricular Reflections on Mathematical Modelling – Overview. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. A. (Eds.). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. ICTMA 14. New York: Springer, 2011, p. 665-668.

Victor Hugo dos Santos Gois: Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Londrina – PR. Brasil. E-mail: victor.gois28@hotmail.com

Karina Alessandra Pessoa da Silva. Docente do Departamento Acadêmico de Matemática e do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR). Londrina – PR. Brasil. E-mail: karinasilva@utfpr.edu.br