RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Problem Solving: a proposal for teaching space geometry

Dioney Luiz Fernandes

Janaína Poffo Possamai

Resumo

Este trabalho descreve parte de uma pesquisa de mestrado, na qual se investiga as contribuições da Resolução de Problemas no ensino da geometria espacial no Ensino Médio. O objetivo deste artigo é discutir as concepções de uma prática de ensino direcionada pela Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Desse modo, apresenta-se os preceitos teóricos de um estudo, caracterizado como investigação-ação e uma atividade que foi aplicada como problema gerador para o ensino do cálculo de volume e capacidade, indicando como é possível trabalhar um problema no qual o foco principal é o estudante. Os resultados apontam indicadores positivos e conclui-se que a Resolução de Problemas, como meio de ensinar, possibilita que o conhecimento matemático seja resultado da construção do estudante no processo de fazer e dar significado à Matemática envolvida no problema.

Palavras-chave: Metodologia de ensino de Resolução de Problemas; Ensino de Matemática; Ensino Médio; Geometria Espacial; Volume.

Abstract

This essay is part of a master's research, which investigates the contributions of Problem Solving in the teaching of spatial geometry in high school. The objective, article is to discuss the conceptions of a teaching practice guided by the Teaching-Learning-Evaluation Methodology of Mathematics through Problem Solving. In this way, the theoretical precepts of a study are presented, it deals with action-research and an activity that was applied as a generating problem for teaching the calculation of volume and capacity, as it is possible to work on a problem in which the main focus is the student. The results point to positive indicators and it is concluded that Problem Solving, as a means of teaching, enables mathematical knowledge to be the result of the student's construction in the process of making and giving meaning to the Mathematics involved in the problem.

Keywords: Problem-solving teaching methodology; Mathematics teaching; High school; Spatial Geometry; Volume.

Introdução

Resolver problemas parece algo inerente às aulas de Matemática, porém as práticas pedagógicas relacionadas nem sempre vem acompanhadas de um claro posicionamento do que é um problema (ALLEVATO, 2014). Nesse sentido, o foco deste artigo é discutir as concepções da Resolução de Problemas como uma estratégia de ensino de Matemática. Assim, para que a resolução de problemas possa ser entendida para além de um procedimento ou ação, inicialmente faz-se necessário definir o que é um problema.

Na perspectiva de Lester Jr. (1977, p. 6, tradução nossa) se define problema como "[...] uma situação em que um indivíduo ou grupo é chamado a executar uma tarefa para a qual não há acesso fácil a um algoritmo que determina completamente o método de solução". Nessa mesma linha, Onuchic (1999, p. 215) indica que "problema é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver".

É importante enfatizar que, normalmente, os problemas apresentados no final dos capítulos em livros didáticos e comumente abordados nas aulas de Matemática – que Diniz denomina de problemas "convencionais" e que denominamos como exercícios, – tem as seguintes características:

> a) é apresentado por meio de frases, diagramas ou parágrafos curtos;
> b) vem sempre após a apresentação de determinado conteúdo;
> c) todos os dados em que o resolvedor precisa aparecem explicitamente no texto;
> d) pode ser resolvido pela aplicação direta de um ou mais algoritmos;
> e) tem como tarefa básica em sua resolução a identificação de que operações são apropriadas para mostrar a solução e a transformação das informações do problema em linguagem matemática;
> f) é ponto fundamental a solução numericamente correta, a qual sempre existe e é única. (DINIZ, 2001, p. 89)

Quando o professor se utiliza dos "problemas convencionais", diga-se de passagem, normalmente como único material de apoio para trabalhar a Resolução de Problemas, ele está considerando que todos os estudantes já adquiriram as ideias e significados após sua explicação, acreditando que todos concordam que seu método de resolução é o mais correto, fácil e melhor. Essa ilusão de que "mostrar e dizer" ou "ensinar – então – praticar", como denota o autor Van de Walle (2009), pode trazer bons resultados, porém, não é referência para a promoção da equidade em Matemática.

Nessa concepção, por vezes, o estudante entende o método do professor, consegue resolver e acertar as questões, mas acaba resolvendo o problema mecanicamente. Outra situação complicada ocorre quando ele se depara com um problema de grau de desafio um pouco maior, nesse caso, ou ele erra a questão, ou ele observa que seu método não funciona para essa situação e acaba se frustrando, tornando-se inseguro, e a sua saída é desistir, esperar a resposta do professor ou de um colega.

Assim, especificamente nas aulas de matemática, um problema diferencia-se de um exercício pelas experiências anteriores do estudante com aquela situação, ou seja, uma questão pode ser um problema para um estudante que não conhece de antemão alguma técnica para resolvê-lo, enquanto que para outro que já a conhece pode se constituir de um exercício – "Problema não é um exercício que no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória" (ONUCHIC, 1999, p. 215).

Além do mais, os bons problemas têm um papel importante nas aulas de matemática uma vez que "os problemas dão aos alunos a chance de solidificar e ampliar o que sabem e, quando bem escolhidos, podem estimular o aprendizado de matemática" (NCTM, 2000, p. 52, tradução nossa). Porém, é importante também esclarecer "[...] que não estamos dizendo que todas as tarefas com que os estudantes se deparam devam ser problemáticas. Se o objetivo de uma aula é desenvolver e dominar certas habilidades, alguns exercícios são necessários" (CAI; LESTER, 2012, p. 152).

Com base nesses preceitos, esse estudo tem como intuito investigar as contribuições da Resolução de Problemas no ensino da geometria espacial no Ensino Médio, em especial para entendimento do cálculo de volume de pirâmides e cones. Para tanto, na sequência apresenta-se a metodologia de ensino de Resolução de Problemas que norteia a investigação realizada, a caracterização da pesquisa, o relato e análise de um problema que foi aplicado e, por fim, as considerações finais desse estudo.

O Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática Através da Resolução de Problemas

A palavra composta "ensino-aprendizagem-avaliação" denota a concepção de que esses três processos devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento do estudante e que, o professor como mediador, deve atuar como um guia no decorrer dessa metodologia. Nesse sentido, o estudante é avaliado no processo de resolver problemas, nas suas potencialidades e crescimento, fundindo-se com o ensino e o redirecionamento das práticas quando necessárias (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

Essa vertente, da construção do conhecimento da matemática enquanto se resolve um problema é defendida também por Allevato e Onuchic (2014, p. 40) ao afirmarem que:

> [...] a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas

> concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Desta forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático.

Para isso, as autoras propõem a *Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas*[1] no sentido de que:

> [...] os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. (ALLEVATO; ONUCHIC, 2009, p. 142).

Esse problema é denominado pelas autoras de problema gerador e difere daqueles comumente apresentados ao final dos livros didáticos em que a resolução é resumida a seguir um modelo/exemplo discutido pelo professor. Assim, essa metodologia é uma proposta diferente do que normalmente acontece quando se fala em Resolução de Problemas nas aulas de matemática e, conforme enfatizam Cai e Lester (2012, p. 152), se a intenção é "[...] ajudar os estudantes a se tornarem solucionadores de problemas bem-sucedidos, primeiramente precisaremos mudar nossa visão de resolução de problemas como um tema que é adicionado à instrução após os conceitos e habilidades terem sido ensinados".

Para tanto, Allevato e Onuchic (2014) sugerem o desenvolvimento dessa metodologia com vista à organização das atividades em uma sequência de 10 passos, conforme apresenta o Quadro 1:

Quadro 01: Passos da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas

01º Passo: Proposição do problema;
02º Passo: Leitura individual;
03º Passo: Leitura em conjunto;
04º Passo: Resolução do problema;
05º Passo: Observar e incentivar;
06º Passo: Registro das resoluções na lousa;
07º Passo: Plenária;
08º Passo: Busca do consenso;
09º Passo: Formalização do conteúdo;
10º Passo: Proposição e resolução de novos problemas.

Fonte: Allevato e Onuchic (2014)

No primeiro passo, indicado no Quadro 1, ao planejar uma aula baseada na Metodologia de ensino de Resolução de Problemas, parte-se da escolha de um problema gerador, que pode ser selecionado, adaptado, elaborado pelo próprio professor ou ainda aceito como proposta dos próprios estudantes. Esse problema gerador deve ser direcionado a construção de um novo conteúdo, conceito, princípio ou procedimento matemático de interesse, o qual não se tenha trabalhado anteriormente em sala (ALLEVATO, ONUCHIC, 2014).

> O papel do professor na escolha de problemas e tarefas matemáticas importantes é crucial. Ao analisar e adaptar um problema, antecipando as ideias matemáticas que podem ser trazidas ao trabalhar no problema e, antecipando as perguntas dos alunos, os professores podem decidir se problemas particulares ajudarão a promover seus objetivos matemáticos para a classe. Existem muitos, muitos problemas interessantes e divertidos, mas que pode não levar ao desenvolvimento das ideias matemáticas que são importantes para uma aula em um determinado momento. Escolher os problemas com sabedoria, e usar e adaptar problemas de materiais instrucionais é uma parte difícil do ensino de matemática. (NCTM, 2000, p. 53, tradução nossa)

Na escolha dos problemas é importante ter em mente o que é um problema

[1]A Metodologia é apresenta por Allevato e Onuchic (2009, 2014) e Onuchic e Allevato (2011), sendo resultados dos estudos do Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP – UNESP). Na sequência ao se tratar dessa metodologia, será abreviada a escrita para Metodologia de ensino de Resolução de Problemas.

nas aulas de matemática, diferenciando-os de exercícios, e que nessa metodologia ele se constitui como o ponto de partida para a construção de novos conceitos/conteúdos matemáticos. Esses problemas podem ter como contexto situações do cotidiano, outras áreas do conhecimento, ou mesmo o contexto pode ser a própria matemática. Não é necessário e nem mesmo suficiente que tenha um enunciado na questão para que esta seja caracterizada como um problema.

> Problemas com enunciados ou palavras frequentemente vêm à mente em uma discussão sobre resolução de problemas. No entanto, essa concepção de resolução de problemas é limitada. Alguns 'problemas com enunciados' não são suficientemente problemáticos para os estudantes e, portanto, deveriam ser considerados apenas como exercícios para os alunos realizarem. (CAI; LESTER, 2012, p. 148)

O *segundo passo* volta-se ao estudante, quando ele terá seu envolvimento com o problema em sua leitura individual. Nesse momento ele terá a oportunidade de buscar a compreensão do problema proposto, refletindo sobre conceitos e linguagens matemáticas. Em seguida os estudantes são organizados em pequenos grupos para uma nova leitura, promovendo uma discussão e troca de ideias. O professor nesse momento é um mediador, auxilia-os, caso necessário, para uma melhor compreensão do problema, para aprimoramento de linguagens, sem deixar evidente a resposta ou caminho a seguir, pois o que é essencial nessa etapa é a ação realizada pelo estudante, o exercício de levantar ideias e expressar-se com clareza.

No *quarto passo* entra-se na resolução propriamente dita. Os estudantes, ainda em grupos, buscam resolver o problema, utilizando-se de estratégias voltadas para a expressão escrita da linguagem matemática ou, ainda, de tabelas, esquemas, gráficos etc. Esse processo os conduzirá para a construção do conhecimento do conteúdo de matemática, planejado pelo professor anteriormente. O professor continua a observar a ação dos estudantes e a incentivá-los a buscar por seus conhecimentos prévios e contribuir com a troca de ideias, sempre confiando nas condições dos estudantes, deixando-os caminhar com as próprias pernas.

É importante que as perguntas realizadas pelo professor tenham como objetivo fazer os estudantes refletirem e analisarem suas soluções, sem direcionar para o caminho de solução. Nesse sentido Cai e Lester (2012, p. 154) alertam que uma "[...] barreira importante para as experiências significativas de resolução de problemas é que os professores geralmente retiram os desafios de uma tarefa matemática, assumindo o pensamento e o raciocínio, e dizendo aos alunos como resolver o problema".

Nos passos seguintes, propõe-se que um representante de cada grupo vá até a lousa (use cartazes, recursos computacionais, entre outros) para registrar a forma de resolução abordada pelo grupo. Após a conclusão e diante do "painel de soluções" certas, erradas e resolvidas por diferentes caminhos, prossegue-se com a discussão, onde cada um defende seu ponto de vista, faz comparações, justifica suas ideias e, consequentemente, avalia sua ação, de modo a corrigir ou aprimorar sua forma de apresentação e/ou escrita da resolução. Este é o momento em que o professor e estudantes, de forma conjunta e permissiva, chegam a um consenso sobre o resultado correto. Van de Walle (2009, p. 66, grifos do autor) destaca que:

> Com o passar do tempo, você fará sua turma se transformar em uma *comunidade de aprendizes de matemática*, onde os alunos se sentem confortáveis em se arriscar e compartilhar ideias; onde alunos e professor respeitam as ideias uns dos outros mesmo quando discordam, onde as hipóteses são defendidas e desafiadas respeitosamente, e onde o raciocínio lógico ou matemático é estimado acima de tudo. Essa atmosfera não se desenvolverá fácil nem rapidamente. Você precisará orientar seus alunos sobre suas expectativas durante esta fase e como interagir com os seus colegas.

Já no *nono passo*, o papel do professor é destacar na lousa (ou com outros recursos), de forma organizada e estruturada em linguagem matemática, uma apresentação "formal" e sistematizada o conteúdo matemático. Nessa discussão constarão as definições dos conceitos, os princípios e procedimentos matemáticos construídos através da Resolução de Problemas, explorando demonstrações e diferentes técnicas operatórias, caso necessário. Nessa etapa Van de Walle (2009, p. 75-76) enfatiza que:

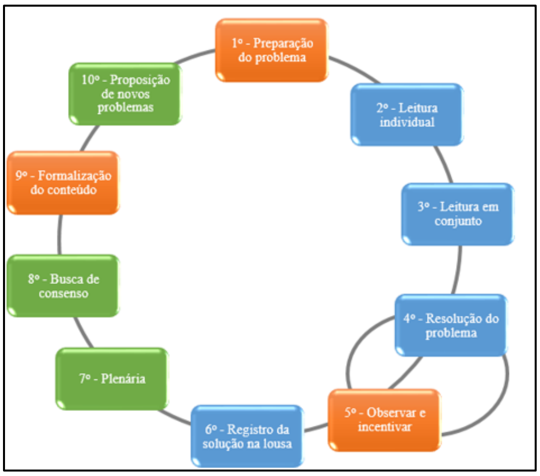
> As convenções sociais de simbolismo e de terminologia (nomenclatura) importantes em matemática nunca serão desenvolvidas por pensamento reflexivo. [...] Como uma regra geral, o simbolismo e a terminologia só devem ser introduzidos depois de os conceitos serem desenvolvidos como um meio de expressar ou nomear ideias. Eles raramente devem ser apresentados de início ou como coisas a serem memorizadas.

Por fim, o último passo objetiva-se analisar se os elementos essenciais do conteúdo matemático proposto naquela aula foram compreendidos. Nesse propósito, o professor aplica novos problemas relacionados com o problema gerador, buscando consolidar as aprendizagens construídas nas etapas anteriores. Ainda, esses novos problemas podem ser resultado de questionamentos realizados pelos estudantes durante a resolução do problema gerador. Allevato e Onuchic (2014) apostam que um ciclo deve ser criado, visando aprofundar e ampliar as compreensões acerca daquele conteúdo específico, pela construção de novos conhecimentos, pela resolução de novos problemas, e assim continuamente.

Nesse ciclo, a avaliação acontece durante todo o desenvolvimento da atividade, sendo que o professor ensina enquanto faz perguntas, enquanto verifica os conhecimentos prévios e concepções erradas, podendo reorientar sua prática. O estudante também realiza uma autoavaliação, na medida em que discute com os colegas, argumenta sobre o seu raciocínio e se depara com outras formas de abordar o problema (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014).

A Figura 01 ilustra os dez passos, destacando o papel do estudante (em azul), do professor (em laranja) e o processo coletivo (em verde) nesse ciclo:

Figura 01: O papel do professor e do estudante no ensino através da RP



Fonte: Criado pelos autores

A partir do exposto, o papel do estudante está em 7 dos 10 passos, evidenciando que o centro da atividade matemática na resolução do problema está nas suas ações. Ele é o protagonista na construção do conhecimento matemático. Ou seja, nessa metodologia se começa onde os estudantes estão, com as ideias deles, e não onde está o professor, assim eles estão aprendendo matemática enquanto fazem matemática (VAN DE WALLE, 2009).

Porém, ao professor, cabe o papel importante de efetivar essa metodologia, ao escolher/criar o problema gerador, observando, incentivando e questionando (com perguntas adequadas) enquanto os estudantes resolvem o problema, na organização da plenária, orientando para a busca de consenso, mediando e incentivando as discussões, com a formalização do conteúdo e, por fim, na proposição de novos problemas.

Na sequência apresenta-se a caracterização da pesquisa realizada e uma atividade que foi aplicada como problema gerador, pela metodologia acima descrita.

Caracterização da pesquisa

Nessa pesquisa buscou-se investigar implicações do uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas no ensino da geometria espacial (cálculo de volume e capacidade), com 62 estudantes do 3º ano do

Ensino Médio de uma escola estadual de Gaspar-SC.

Esse percurso investigativo é de natureza qualitativa e caracteriza com uma investigação-ação. O foco esteve no processo de interação dos estudantes entre si e com o professor e a construção do conhecimento. O objeto de interesse envolvia a resolução das atividades propostas, o acompanhamento dos estudantes nos seus raciocínios, na tomada de decisões e nas dificuldades encontradas ao longo de todo o processo. Buscou-se assim, compreender qual o significado dado pelos estudantes à situação que estavam vivenciando e resolvendo, quais conceitos já adquiridos eram visíveis, explorados por meio de questionamentos diante de suas decisões.

Neste artigo são apresentados os resultados obtidos ao se analisar o problema intitulado "Prisma X Pirâmide - Cilindro X Cone: construindo o conceito de volume", sendo que anteriormente a este, outros problemas geradores relacionados com geometria espacial haviam sido resolvidos pelos estudantes utilizando a metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Descrição e análise da aplicação

O problema intitulado "Prisma X Pirâmide - Cilindro X Cone: construindo o conceito de volume" teve como objetivo de aprendizagem desenvolver o raciocínio geométrico, ampliando a visualização mental ao explorar o material, manipulando e relacionando-os e desenvolver um método para o cálculo do volume/capacidade das pirâmides e dos cones. É importante salientar que a aplicação do problema seguiu os passos da *Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.*

Antes de resolver esse problema gerador, os estudantes já haviam resolvido outros quatro problemas geradores, com os quais haviam formalizado os conteúdos: classificação de poliedros, nomenclatura pertinente aos poliedros, cálculo de volume e capacidade, cálculo do volume de prismas e cilindros. Com o problema gerador discutido neste artigo foi formalizado o conteúdo relativo ao cálculo de volume de pirâmides e cones.

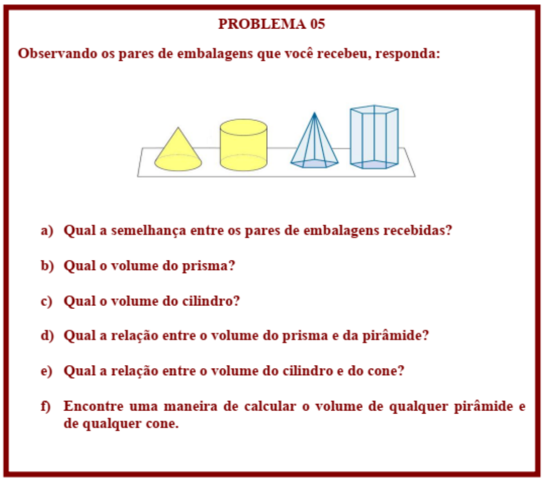
Nessa atividade os estudantes recebem o problema impresso e fizeram a leitura individual. Em seguida, em grupos de até quatro estudantes, fizeram a leitura novamente no coletivo. O professor entregou embalagens a cada grupo, com os formatos de: uma pirâmide e um prisma de mesma altura e mesma base, um cone e um cilindro também com mesma medida de altura e mesmo raio da base, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 02: Embalagens entregues aos grupos para realização da atividade

Fonte: Acervo de pesquisa.

Essas embalagens continham uma abertura na parte superior para que os estudantes consiguissem colocar e retirar os grãos de arroz com facilidade de modo a experenciar as hipóteses criadas por eles. A Figura 3 ilustra o problema entregue aos estudantes.

Figura 03: Atividade a ser entrega para os estudantes



PROBLEMA 05

Observando os pares de embalagens que você recebeu, responda:

a) **Qual a semelhança entre os pares de embalagens recebidas?**
b) **Qual o volume do prisma?**
c) **Qual o volume do cilindro?**
d) **Qual a relação entre o volume do prisma e da pirâmide?**
e) **Qual a relação entre o volume do cilindro e do cone?**
f) **Encontre uma maneira de calcular o volume de qualquer pirâmide e de qualquer cone.**

Fonte: Fernandez e Possamai (2020, p. 38)

Com os grãos de arroz disponíveis para manuseio, os estudantes buscaram encontrar uma maneira de provar qual a relação existente entre o volume das embalagens agrupadas. Partindo da fórmula do cálculo do volume do prisma e do cilindro, desenvolvidas por eles na resolução do problema anterior, os estudantes formam instigados a definirem uma outra, que satisfaça a relação do volume da pirâmide e do cone encontrada com o uso do arroz.

Os estudantes criaram uma boa expectativa com a atividade proposta e se demonstraram empolgados durante a resolução do problema. Cada integrante queria manusear e sugerir caminhos para seguirem. Partiram dando sugestões e palpites: “Ah, aqui (cilindro) cabe mais arroz do que aqui (cone), com certeza!”; “Vamos encher esse (cilindro) e despejar aqui pra ver (cone).”

Não há dúvidas que diante dessa possibilidade de colocar o conhecimento nas mãos dos estudantes (ao invés de colocá-los pronto na lousa), para que eles mesmos desvendem os conceitos matemáticos, manuseando com curiosidade o material manipulativo, o professor possa ter grandes expectativas sobre os materiais concretos para ajudar os estudantes a construir ideias. Para Van de Walle (2009, p. 50), fazer uso de “Modelos manipulativos ou materiais concretos para modelar conceitos matemáticos são ferramentas importantes para ajudar as crianças a aprender matemática”.

A proximidade do professor com o “fazer matemática” dos estudantes enquanto resolviam o problema, possibilitou acompanhá-los na construção de ideias, nas tentativas falhas, nas mudanças de estratégias e, finalmente, na compreensão/descoberta da solução do problema.

Um cenário que demonstrou essa vivência ocorreu ao acompanhar uma equipe que partiu colocando o arroz primeiramente no cilindro. Ao passarem o arroz do cilindro para o cone (1/3), observaram que a sobra de arroz dentro do cilindro (2/3) não deu nenhum parâmetro de comparação para uma possível conclusão. Nesse momento ocorreu uma discussão muito interessante: “Eu disse que devíamos ter enchido primeiro o cone e passado o arroz para o cilindro.”, questionou o estudante “A”; “Mas ia dar no mesmo.”, respondeu o estudante “B”; “Eu concordo com você ‘A’.”, completou “C”; “Mas ainda temos uma saída, vamos despejar esse arroz fora (do cone) e vamos repetir o processo.”, indagou “B”. Nesse caminho eles conseguiram encher 3 vezes o cone com o arroz que continha no cilindro. “Agora sim! Pela minha sugestão ia dar no mesmo, iríamos passar o arroz do cone para o cilindro 3 vezes então.”, tornou a indagar o estudante “A”.

Outro cenário a destacar, que a equipe apresentou um caminho inusitado e inesperado por parte do professor/pesquisador, ocorreu quando um integrante perguntou: “Professor, podemos encher os dois (pirâmide e prisma) e depois contar os grãos de arroz?” De imediato a resposta foi sim, porém, logo que a sugestão dada foi abstraída, o professor/pesquisador indagou: “Essa pode ser uma boa estratégia, mas foi a única alternativa que vocês encontraram? Não teria, talvez, um outro caminho mais fácil e rápido?” Desse modo, os estudantes não foram orientados a seguir ou não tal caminho desvendado por eles, mas instigados a refletir e voltar ao debate para que, diante das ideias compartilhadas, conseguissem encontrar diferentes estratégias.

Não é interessante o professor desencorajar ou negar as ideias dos estudantes enquanto resolvem os problemas. Como os estudantes são criativos, normalmente o professor é surpreendido com estratégias ou caminhos inusitados, certos ou errados, simples ou complexos, como no caso relatado anteriormente. A postura tomada pelo professor/pesquisador foi assertiva e seguiu o que Onuchic e Allevato (2011, p. 84) sugerem nessa etapa, sendo que “[...] o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles”. E, de fato, eles conseguiram encontrar um método mais eficaz para determinar a relação existente e um método de cálculo do volume.

Nesses cenários apresentados os estudantes desenvolveram argumentos matemáticos sobre as relações geométricas envolvidas na resolução do problema. Com isso, conseguiram construir o conceito de volume (do cone e da pirâmide), estabelecendo e validando conjecturas, ao investigar e manusear os materiais manipulativos disponibilizados.

Com exceção da equipe 08, que respondeu caber a metade, todas as outras acertaram ao responder que a relação existente entre o volume da pirâmide e do prisma era de um terço. Já para criar um método para calcular o volume da pirâmide, nota-se claramente uma má interpretação da maioria das equipes no que se pedia. As equipes 01, 03, 04, 05 e 06 entenderam que era para calcular o volume da pirâmide e não propor um método, e assim usaram as medidas das embalagens. As equipes 02, 07 e 09 responderam usando a escrita matemática para explicar seu método e de forma correta. As equipes 08 e 10 não responderam e apenas a equipe 11 utilizou a fórmula do prisma, já definida como padrão na atividade anterior, para encontrar a sua terça parte (multiplicando por 1/3).

Apenas uma equipe errou a relação existente, ao colocar que cabem 4 cones em um cilindro (equipe 01), as demais acertaram, o que é um resultado bem satisfatório. Para a criar um método para determinar o volume de um cone, mais uma vez eles fizeram o cálculo do volume ou explicaram o método de forma escrita, com exceção da equipe 10 que apresentou o método/fórmula corretamente.

Nas apresentações de suas soluções na plenária, a equipe que apresentou a resposta de encher 4 cones com um cilindro, já se manifestou rapidamente, justificando-se que provavelmente contaram errado o total de vezes que foram passando o arroz do cone para o cilindro. As equipes 08 e 10 foram questionadas pelos colegas por não apresentarem o método, nas questões 2 e 4. Eles justificaram que estavam debatendo e que não tiveram tempo suficiente para colocar as ideias no papel.

Um estudante questionou se a embalagem com formato de pirâmide tivesse o fundo diferente, não o triangular, o que aconteceria. Então foi aproveitado o momento para debater sobre esse cuidado, analisando as semelhanças das embalagens e concluído: conforme muda-se a base da pirâmide, deve-se ter o cuidado de compará-la com um prisma de mesma base e, também, que ambos devem ter a mesma altura, senão a comparação/relação não faz sentido. Essa discussão também serviu para buscar um consenso na padronização das fórmulas do cálculo de volume, bem como para transcrever o método da forma escrita para uma simbologia. Para Van de Walle (2009, p. 23), "mudar de uma representação para outra é um modo importante de ampliar a compreensão de uma ideia".

Um integrante da equipe 11 defendeu a ideia de usar a mesma do prisma e do cilindro, para não haver confusão e dificultar, e dividir por 3. Todos concordaram e alguns ainda completaram: "Além de trabalharmos com uma fórmula só, que facilita, ela serve para qualquer tipo de pirâmide, como no caso dos prismas". Após isso foi formalizado o conteúdo na lousa e propostos novos problemas, envolvendo diferentes tipos de pirâmides e cones.

De modo geral, o problema gerador possibilitou que os estudantes atingissem os objetivos propostos nessa atividade. Além disso, cada etapa da metodologia foi fundamental para que compartilhassem as ideias, compreendessem as relações e, assim, desenvolver o raciocínio geométrico.

Nessa atividade ficou evidente que o material manipulativo facilitou aos estudantes a compreensão da relação existente entre os volumes, o que nas aulas ditas "tradicionais" os estudantes receberiam esse conceito pronto, como verdade absoluta, sem a possibilidade de testar e validar conjecturas. Entretanto, o material manipulativo não foi relevante para alguns estudantes desenvolver os métodos de cálculo do volume da pirâmide e do cone, mas sim, a plenária! O momento da plenária foi primordial para esses estudantes, pois puderam ouvir as explicações, as argumentações perante as respostas, fazer reflexões e, assim, compreender a construção do método. Na etapa da plenária, não só o professor, mas os estudantes "[...] devem ver a explicação como uma parte integrante do processo de resolução de problemas". (VAN DE WALLE, 2009, p. 63)

Por meio da implementação dessa prática com a resolução de problemas, intuímos que apesar de nem todos os estudantes que gostarem/preferirem ir à lousa, dar sua explicação e responder questionamentos dos colegas, eles "[...] precisam desenvolver o hábito de apresentar um argumento ou uma razão como parte integrante de toda resposta. Justificar as respostas é um processo que aumenta a compreensão conceitual” (VAN DE WALLE, 2009, p. 23). Essa metodologia possibilita que os estudantes se encorajem e acreditem que são capazes.

Por fim, é importante enfatizar que o professor avaliou os estudantes durante todo o processo, fazendo perguntas que os levassem a refletir sobre as resoluções, bem como o registro das resoluções também permitiu verificar a aprendizagem dos estudantes.

Considerações Finais

A aplicação do problema apresentado anteriormente auxiliou os estudantes no entendimento dos conceitos pretendidos, pois, além de um problema gerador, foi facilitador para o ensino dos conceitos da geometria espacial. Esse e os demais problemas desenvolvidos na pesquisa sob a perspectiva de Resolução de Problemas, foram aplicados seguindo a metodologia pesquisada, passando por todos os passos propostos por Allevato e Onuchic (2014).

Com todo o roteiro envolvido na aplicação dos problemas geradores pode-se fazer uma análise das contribuições e limitações no uso da metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas para o ensino da geometria espacial. Alisando as implicações da metodologia, destacam-se alguns pontos relevantes durante o processo, uma vez que o papel do professor e do estudante fugiram dos moldes tradicionais vivenciados em sala de aula.

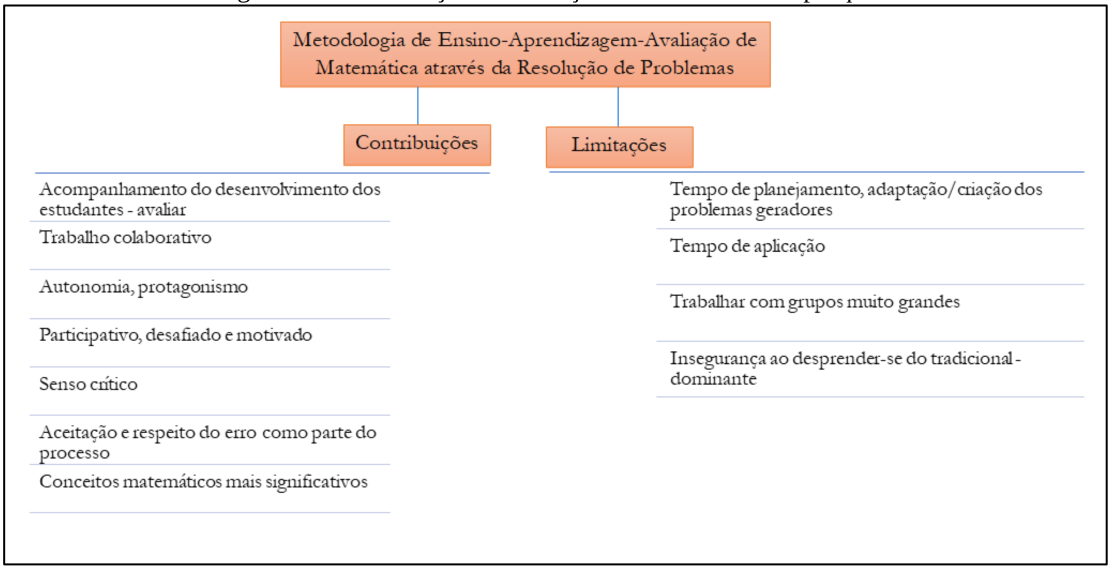
Tratando-se de contribuições, a abordagem possibilita que os estudantes se sintam desafiados e instigados na busca da solução dos problemas propostos. O professor não estabelece as regras e nem mostra o caminho, mas acompanha o trabalho dos grupos, verifica quando interferir e a forma ideal de perguntar e instigar, deixando os estudantes serem os protagonistas do processo, acreditando e confiando nos discentes.

Os problemas geradores, alinhados com a metodologia e a ação docente, levaram os estudantes a desenvolver o raciocínio geométrico, o trabalho colaborativo, a autonomia, o estabelecimento e validação de conjecturas, favorecendo a construção do seu próprio conhecimento, superando seus erros e os dos colegas. O conhecimento dos conceitos de geometria espacial se tornou mais significante, ocorrendo durante o fazer matemática, sem a necessidade de decorar inúmeras fórmulas.

Essa abordagem contribuiu para que o professor/pesquisador reconhecesse o desenvolvimento de argumentos matemáticos sobre as relações geométricas e o senso espacial dos estudantes. Os estudantes, por sua vez, conseguiram compreender os conceitos de volume e capacidade, conseguiram construir conjecturas, desenvolver o pensamento geométrico enquanto trabalhavam em grupos, discutiam e manipulavam os objetos tridimensionais, durante a resolução dos problemas.

Diante das limitações e contribuições constatadas durante a aplicação dessa abordagem, adotada nessa pesquisa, organizou-se um comparativo para melhor visualização e análise, conforme apresenta a Figura 04.

Figura 04: Contribuições e limitações analisadas nessa pesquisa



Fonte: Criado pelos autores

Em referência as contribuições destacadas, observou-se quesitos importantes que dificilmente são explorados, numa totalidade, em uma aula dita "tradicional". Com exceção do primeiro, nota-se um destaque aos quesitos que se referem ou favorecem o estudante, o que mostra que ele é sim o protagonista, não somente do seu próprio conhecimento, mas do processo referente a metodologia de ensino a qual participa também.

Agora, tratando-se das limitações encontradas, observa-se situações que podem e foram sanadas após experiências adquiridas no decorrer da própria prática. Quando o professor tem bem definido para quem irá ensinar e o que deseja que eles aprendam, o planejamento e a criação/adaptação dos problemas geradores se tornam mais fáceis e rotineiros.

O tempo de aplicação, em relação a um determinado problema, deve-se ter o cuidado de não ultrapassar uma ou duas aulas (geminadas), não ficando para outro dia o seu término, o que pode quebrar a sequência de raciocínio, envolvimento e resultados esperados. Em se tratando de um conjunto de problemas geradores, para o ensino de um determinado conteúdo, alerta-se para o tempo gasto para tal.

Pode-se considerar que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas contribuiu com o processo de ensino e aprendizagem de geometria espacial e o entendimento dessa prática, enquanto professor de matemática, vai além do que se almejava antes da pesquisa: livrar-se de um ensino baseado na aplicação de fórmulas decoradas.

Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensinando Matemática na sala de aula através da Resolução de Problemas. **Boletim GEPEM,** Rio de Janeiro, v. 55, p.1-19, dez. 2009.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? *In*: ONUCHIC, L. R., *et al.* (Org.). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

CAI, J; LESTER, F. Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? *In*: **Boletim GEPEM**. Trad. BASTOS, A. S. A. M. e ALLEVATO, N. S. G., Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254, 2012.

DINIZ, M. I. Resolução de Problemas e Comunicação. *In*: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. **Ler, escrever e resolver problemas:** Habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001a. p. 87-97.

FERNANDES, D. L.; POSSAMAI, J. P. **Problemas Geradores** – Geometria Espacial. 2020. 58 p. Disponível em: http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/586354. Acesso em: 10 jan. 2021.

LESTER JR, F. K. **Mathematical Problem Solving Project Technical Report I**: Documents Related to a Problem-Solving Model. Part B: Mathematical Problem Solving in the Elementary School-Some Educational and Psychological Considerations. Final Report. Bloomington: Indiana University, 1977. Disponível em: https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED168834.pdf. Acesso em: 01 jun. 20.

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Unesp, 1999. p. 199-218.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** Formação de professores e Aplicações em Sala de Aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p.

Dionei Luiz Fernandes: Mestre em Ensino de Ciências Naturais e Matemática. Blumenau, SC, Brasil. dioneymat@hotmail.com

Janaína Poffo Possamai: Pós-Doutoranda em Ensino de Ciências pela Universidade Cruzeiro do Sul. Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Regional de Blumenau. Blumenau, SC, Brasil. janainap@furb.br