

# TAREFAS DE VISUALIZAÇÃO EM EXERCÍCIOS DE GEOMETRIA ESPACIAL

## Spatial visualization tasks in Geometry problems

Carmen Vieira Mathias

Fabio Luiz Borges Simas

### Resumo

Apresenta-se, neste artigo, uma pesquisa de cunho qualitativo, cujo objetivo é analisar exercícios de livros didáticos de matemática que demandam habilidade de visualização espacial para sua resolução. Para tanto, foram investigadas várias ações (tarefas de visualização) apresentadas em artigos científicos nas áreas de Ensino e de Educação Matemática. Na pesquisa, foi proposta uma classificação das ações e utilizou-se dessa categorização como critérios de análise. Os exercícios de Geometria Espacial analisados são provenientes dos quatro livros didáticos de matemática para o Ensino Médio mais adquiridos pelas escolas públicas no ano de 2018. Os resultados sugerem que os exercícios propostos pelos autores desses livros didáticos não têm como objetivo de aprendizado o desenvolvimento desse tipo de habilidade.

**Palavras-chave:** Livro didático, Habilidade de Visualização Espacial, Pensamento Espacial, Geometria Espacial.

### Abstract

This article presents a qualitative research; whose aim is to analyze textbook exercises of math that require spatial visualization skills to its resolution. Therefore, we investigated various actions (visualization tasks) presented in scientific articles in the areas of education and mathematics education. In the research it was proposed a classification of actions and used this categorization as analysis criteria. The Spatial Geometry exercises analyzed come from the four math textbooks for high school, with the greatest acquisition by public schools in 2018. The results suggest that the exercises proposed by the authors of these textbooks are not aimed at learning the development of this type of skill.

**Keywords:** Mathematical textbooks, Spatial Visualization Ability, Spatial Thinking, Spatial Geometry.

### Introdução

Nas escolas, a Geometria Espacial costuma ser um desafio tanto para professores quanto para estudantes. As figuras tridimensionais são representadas em duas dimensões e as dificuldades de interpretação dos estudantes tornam-se problemas no aprendizado e desafios no ensino. Como se sabe, as habilidades de visualização e de representação espacial (ver e desenhar) são afetadas por fatores socioculturais e podem ser desenvolvidas com os estímulos adequados (BAKÓ, 2003; HA; SONNAD, 2017). O Guia do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) da disciplina de Matemática sinaliza que a habilidade de visualização espacial (HVE) deve ser explorada com mais afinco nos livros didáticos.

Observa-se, geralmente, pouca exploração da capacidade de visualização, tão necessária em estudos posteriores e em muitas profissões, como as ligadas à mecânica, à arquitetura e às artes. Aqui, a apresentação de vistas de sólidos mais complexos do que os estudados no ensino fundamental seria uma ótima oportunidade para exercitar as capacidades de visualização espacial dos alunos. O ensino médio usual não tem contribuído de modo desejável para o aperfeiçoamento das habilidades de desenho e de visualização de objetos geométricos. Nesse sentido, seria importante explorar diferentes perspectivas, projeções, cortes, planificações, entre outros recursos de representação dos objetos (BRASIL, 2014, p. 99).

Salienta-se que o referido apontamento do Guia do PNLD (BRASIL,

2014) tem suporte em estudos em Educação Matemática e em Psicologia (e.g., BISHOP, 1983, BATTISTA; CLEMENTS, 1996; GUTIERREZ, 1996).

Por anos educadores matemáticos como Bishop, Clements, Mitchelmore, Tatha entre outros têm defendido que um dos maiores objetivos do ensino de geometria está sendo preterido durante a onda da ‘nova matemática’ e precisa ser restabelecido. Trata-se do desenvolvimento da intuição espacial dos estudantes, incluindo sua habilidade de visualização espacial e de comunicação de informações espaciais de várias maneiras (GAULIN, 1985, p.64).

Apesar dessa afirmação tão contundente, poucas pesquisas mensuram a contribuição dos livros didáticos na construção das habilidades de visualização espacial. Tendo em vista esta demanda, o presente artigo tem como objetivo analisar exercícios de livros didáticos de matemática que demandam HVE para sua resolução. Antes, é preciso entender o que significa esse termo.

Não há acordo geral sobre a terminologia a ser usada neste campo: pode acontecer que um autor utilize, por exemplo, o termo “visualização” e outro autor use “pensamento espacial”, mas descobrimos que eles estão compartilhando o mesmo significado para termos diferentes. (...) Essa bagunça aparente é meramente um reflexo da diversidade de áreas onde a visualização é considerada relevante e há variedade de especialistas interessados (GUTIERREZ, 1996, p. 4).

Observa-se que, em pesquisas cujo foco é o ensino e a aprendizagem de Geometria, os termos raciocínio espacial, pensamento espacial e visualização espacial são geralmente utilizados para se referir à HVE. Nesses estudos, a capacidade de visualização se destaca como uma necessidade característica da geometria, no entanto, é uma habilidade que é exigida não só na Matemática, mas também em outras áreas.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), o pensamento espacial “está associado ao desenvolvimento

intelectual que integra conhecimentos não somente da Geografia, mas também de outras áreas como Matemática, Ciência, Arte e Literatura” (BRASIL, 2018, p. 359). Inclusive, o documento afirma que “a grande contribuição da Geografia aos alunos da Educação Básica é desenvolver o pensamento espacial” (p. 360).

Ainda assim, a BNCC não indica explicitamente esse rol de habilidades em nenhum nível de escolaridade. Em particular, no Ensino Médio, a Geometria Espacial surge exclusivamente ligada ao cálculo de áreas, a volumes e à deformação de ângulos e áreas em projeções cartográficas.

## Referencial Teórico

### Sobre a visualização espacial de objetos tridimensionais

Os objetos geométricos da Geometria Espacial escolar são acessados, por professores e estudantes, por meio dos conceitos e, principalmente, por suas representações visuais. Assim, a distinção entre conceito, representação e forma de uma figura geométrica precede a discussão da HVE.

Fischbein (1993, p. 148) define “conceito figural como uma figura geométrica em que a construção mental de um objeto matemático é caracterizada por generalidade e abstração e desprovida de propriedades sensoriais como cor ou textura”. É a construção intelectual dessa figura que permite ao indivíduo transformar mentalmente o objeto matemático. Por exemplo, na solução de problemas de Geometria, pode-se transladar, refletir, girar, cortar ou sobrepor. São operações com significados matemáticos precisos que são acessados pelo indivíduo por meio do conceito figural.

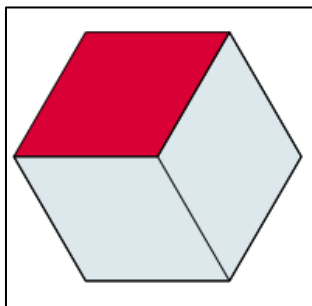
De forma semelhante, Duval (1999) difere a figura geométrica de sua representação e discute os diferentes registros semióticos com os quais um objeto pode ser representado. As investigações de Duval (1999) e Fischbein (1993) têm forte impacto em pesquisas na área de Educação Matemática. Porém, antes deles, Parzys (1988) já apresentava preocupação com as questões relativas ao papel das representações

no ensino de matemática, em particular na Geometria.

O ensino da geometria espacial permanece, embora o novo programa se esforce para promovê-la o 'parente pobre' do ensino da matemática. Não é dada grande prioridade, é uma parte do currículo tida como difícil - tanto para professores como para alunos - e certamente coloca alguns problemas específicos, que não são desprezíveis, de representação, que podem ser entendidos como representação mental e representação material (desenho) das figuras estudadas nos problemas (PARZYSZ, 1988).

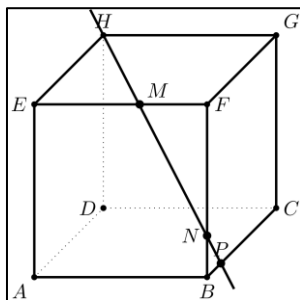
Segundo Laborde (1997), o ensino de geometria ignora as relações entre a figura geométrica e o desenho, como se estivessem ligados por um vínculo natural. De acordo com o autor, o ensino considera apenas a leitura geométrica do desenho e não outras interpretações possíveis. Por exemplo, a Figura 1 representa um cubo ou um hexágono plano? Na Figura 2, os pontos M, N e P são colineares?

Figura 1 - Cubo ou hexágono?



Fonte: elaborada pelos autores

Figura 2 - Os pontos M, N e P são colineares?



Fonte: adaptada de Bakó (2003)

A visualização de representação plana de uma figura espacial inclui a capacidade de identificar a tridimensionalidade do objeto representado e de reconhecer as representações de transparência e paralelismo, por exemplo. Isso exige o que alguns autores chamam de raciocínio espacial (e.g., BRUNHEIRA e DA PONTE, 2018; NOTARE e BASSO, 2018).

O raciocínio espacial envolve a compreensão de três propriedades relacionadas: (1) a consciência do próprio espaço, como distância e dimensões; (2) a representação de informações espaciais (internamente, na mente, e externamente, em gráficos como diagramas e mapas); e (3) o raciocínio envolvido na interpretação e na manipulação da informação espacial para a resolução de problemas e tomada de decisão (NATIONAL RESEARCH COUNCIL, & GEOGRAPHICAL SCIENCES COMMITTEE, 2005).

Raciocínio espacial é a capacidade de “ver”, examinar e refletir sobre objetos espaciais, imagens, relações e transformações. O raciocínio espacial inclui gerar e examinar imagens para responder a questões sobre elas, transformar e operar imagens e manter as imagens a serviço de outras operações mentais (BATTISTA, 2007, p. 843).

Para Lowrie, Logan e Ramful (2017), o raciocínio espacial serve como fundamento para o raciocínio geométrico, que é mais inclinado à articulação de propriedades axiomáticas. Segundo os autores, o raciocínio espacial não é útil apenas dentro do domínio da matemática, mas também de outras disciplinas do currículo escolar, como geografia e ciências. Eles posicionam a visualização espacial como um dos três pilares que formam o raciocínio espacial, sendo que os outros dois são a rotação mental e a orientação espacial. Lowrie, Logan e Hegarty (2019, p.2) definem a visualização espacial como “a capacidade ou habilidade utilizada para transformar mentalmente ou manipular propriedades espaciais de um objeto”, e essa é a definição utilizada nesse artigo.

Considerando que “o livro didático é um dos recursos quase sempre presente no ensino da Matemática e tem o papel de referência para a validação do saber escolar”

(MARTINS E MANDARINO, 2013), cabe a preocupação em analisar como as atividades propostas nos livros didáticos favorecem a HVE dos alunos do Ensino Médio.

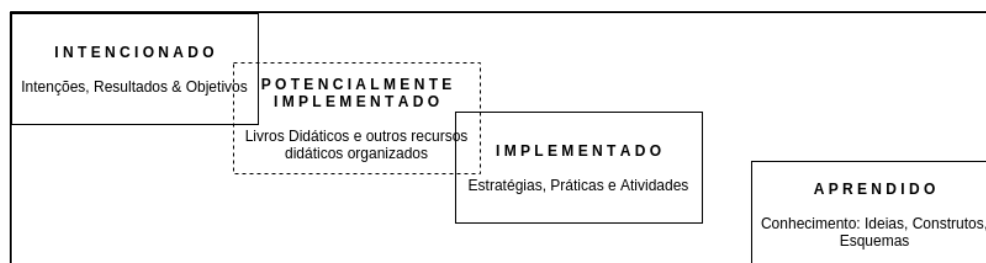
### A pesquisa sobre livros didáticos de Matemática e o Livro Aberto de Matemática

O livro didático estabelece a maioria das condições em que ocorrem o ensino e a aprendizagem escolar e, diversas vezes, define o que é essencial em termos de conteúdo (APPLE, 2013). Por exemplo, um estudo

empírico realizado com material didático produzido pela Universidade de Chicago mostrou que professores tendem a usar estratégias de ensino diferentes quando usam distintos materiais didáticos (FAN E KAELEY, 2000).

O Terceiro Estudo Internacional sobre Matemática e Ciências (TIMSS, na sigla em inglês, c.f. VALVERDE *et al.*, 2002) diferencia currículo “intencionado”, “potencialmente implementado”, “implementado” (pelos professores) e “aprendido” (pelos estudantes), como ilustra a Figura 3.

**Figura 3** - Livros didáticos no modelo tripartite do currículo segundo Valverde *et al.* (2002).



Fonte: Adaptado de Valverde *et al.* (2002).

O modelo tripartite da Figura 3 ilustra o longo caminho pelo qual passa a Matemática até chegar ao aprendizado dos estudantes, incluindo as proposições instauradas via documentos oficiais, a materialização dos conteúdos em livros didáticos e as escolhas e estratégias adotadas pelo professor.

Decisões específicas são tomadas nos livros didáticos buscando as sequências mais adequadas de conteúdos e estruturando situações pedagógicas onde atividades, explicações, exemplos e exercícios cumprem papéis específicos. Estes papéis, como são apresentados nos livros didáticos, são fixos em termos da natureza física imutável do livro didático (VALVERDE *et al.*, 2002, p. 13).

Assim, na prática, o aprendizado dos estudantes se relaciona mais fortemente com as oportunidades de aprendizado disponibilizadas no livro didático do que com as intenções dos currículos.

Em seu famoso *survey*, Fan, Zhu e Miao (2013) dividem os estudos sobre livros

didáticos de Matemática em três categorias: (a) os focados na análise de livros distintos, (b) os que tratam de análise comparativa e (c) os interessados no uso que professores e estudantes fazem dos livros didáticos. O estudo documentado neste artigo encontra-se na categoria (a), embora o interesse central esteja nas oportunidades dos estudantes em desenvolver habilidades de visualização espacial a partir do livro didático.

Nesse cenário, em 2016, a OBMEP/IMPA<sup>1</sup> criou o projeto Livro Aberto de Matemática<sup>2</sup>, com o objetivo de desenvolver materiais didáticos com licença aberta (*Creative Commons BY-NC-SA*) para a Educação Básica, bem como uma plataforma online em que os professores podem fazer comentários, sugestões e criar suas próprias versões do material didático produzido. O projeto tem por princípio que a elaboração seja ancorada e acompanhada por pesquisa científica em Ensino de Matemática. O presente estudo é uma sistematização e aprofundamento de levantamentos realizados

<sup>1</sup> Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)

<sup>2</sup> O projeto Livro Aberto de Matemática foi parcialmente financiado pela Fundação Itaú Social.

para a elaboração do módulo de Geometria para o Ensino Médio.

**Materiais e métodos**

O presente estudo visa analisar exercícios de livros didáticos de Matemática que demandam HVE para sua resolução. Para isso, foi realizada uma pesquisa bibliográfica que contou, em um primeiro momento, com observações, revisões e análises documentais.

Inspirados em Gonzato, Fernández e Díaz (2011), buscou-se, em artigos científicos, tarefas que exemplificam ações que contribuem para o desenvolvimento de habilidades de visualização. Essas tarefas de visualização serviram como critérios para a análise de exercícios de Geometria Espacial. As seis ações encontradas, detalhadas na Tabela 1, são: coordenar e integrar visualizações de sólidos (CIV); girar um sólido tridimensional (GS); gerar sólidos de revolução (GSR); desenvolver (planificar) uma superfície (DS); compor e decompor sólidos (CDS) e identificar seções de um sólido por um plano (ISS).

Em um segundo momento, foram analisados exercícios do conteúdo de Geometria Espacial presentes nas quatro coleções de Ensino Médio mais vendidas no PNLD do ano de 2018. A análise resultou na catalogação dos exercícios que exigiam

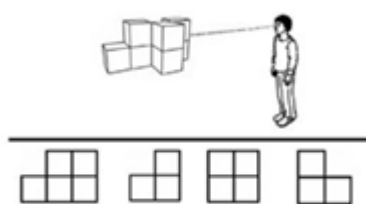
alguma das seis ações citadas anteriormente. Essa exigência não precisou ser explícita ou direta, bastando que a ação fosse usada na resolução do exercício para ser considerada. Cabe ressaltar que a catalogação se deu por ação e não por exercício.

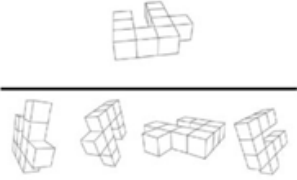

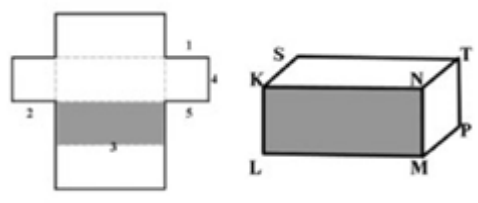
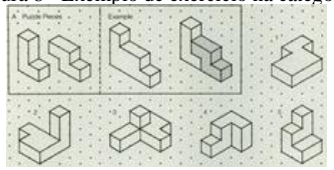
Neste artigo, os nomes dos autores e das editoras são preservados sempre que possível. Os livros serão identificados por L1, L2, L3 e L4, pois o objetivo não é a análise do livro em si, mas a identificação das oportunidades presentes na maioria das salas de aula brasileiras para se desenvolver o raciocínio espacial.

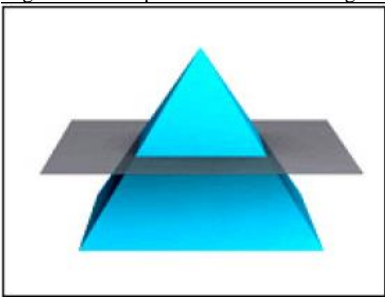
**Resultados**

Nesta seção, são detalhadas e exemplificadas as ações ou tarefas de visualização por meio de exercícios presentes na literatura. São apresentados os números provenientes da análise e tecidos comentários sobre o processo de catalogação, os quais devem favorecer a reprodutibilidade deste estudo em outros contextos, bem como a conferência dos resultados aqui apresentados. Ao longo do texto, nesta seção e nas conclusões, são expostas algumas observações empíricas obtidas durante a análise, menos precisas, mas igualmente relevantes. O Quadro 1 detalha o significado de cada ação.

**Quadro 1** - Categorias consideradas na análise das tarefas de visualização.

Ação	Descrição	Exemplo de exercício na literatura
Coordenar e integrar visualizações de sólidos (CIV)	Exercícios que dependem de representações planas do objeto, que exijam algum sistema de projeção para serem realizadas.	<p>Indique a vista frontal do sólido de acordo com o ângulo de visão do observador, como na Figura 4.</p> <p>Figura 4 - Exemplo de exercício na categoria.</p>  <p>Fonte: PITTALIS; CHRISTOU (2010, p.199)</p>

<p>Girar um sólido (GS)</p>	<p>Exercício em que o estudante é convidado a girar mentalmente um sólido dado. Geralmente, é apresentada a imagem de um sólido e é necessário identificar a imagem deste mesmo sólido após sua rotação.</p>	<p>Existem quatro sólidos abaixo da linha (Figura 5). Qual deles NÃO é idêntico ao sólido acima da linha?</p> <p>Figura 5 - Exemplo de exercício na categoria.</p>  <p>Fonte: PITTALIS; CHRISTOU (2010, p.199)</p>
<p>Gerar sólidos de revolução (GSR)</p>	<p>Exercícios em que são apresentadas representações planas do objeto e o eixo de rotação em que o estudante precisa reconhecer o sólido percorrido durante a rotação.</p>	<p>Ao desenhar, com todos os detalhes possíveis, os corpos de revolução obtidos obteremos ao girar as seguintes imagens (Figura 6) em relação aos eixos indicados.</p> <p>Figura 6 - Exemplo de exercício na categoria.</p> <p>Figura A      Figura B</p>  <p>Fonte: BLANCO, DIEGO-MANTECÓN; SEQUEIROS (2019, p.772)</p>
<p>Desenvolver uma superfície (DS)</p>	<p>Exercícios onde é apresentada a representação do sólido de forma planificada e é solicitada a representação espacial ou vice versa</p>	<p>O diagrama (Figura 7) mostra como um pedaço de papel pode ser cortado e dobrado para formar a forma sólida. As linhas pontilhadas mostram onde o papel é dobrado.</p> <p>Figura 7 - Exemplo de exercício na categoria.</p>  <p>Fonte: PITTALIS; CHRISTOU (2010, p.199)</p> <p>Indique quais arestas no desenho à direita correspondem às arestas numeradas ou linhas pontilhadas na figura à esquerda.</p>
<p>Compor e decompor um sólido tridimensional (CDS)</p>	<p>Exercícios onde é apresentado o sólido (ou uma de suas representações) e solicitado sua identificação como decomposto em duas ou mais partes (ou vice versa).</p>	<p>Ao juntar duas peças de um quebra-cabeça, novos sólidos podem ser construídos, como mostra o exemplo. Cada um dos sólidos a seguir (Figura 8) é formado pela junção dessas duas peças. Para cada um, mostre como ele é construído, delineando uma das peças que o compõem.</p> <p>Figura 8 - Exemplo de exercício na categoria.</p>  <p>Fonte: LAPPAN PHILLIPS ; WINTER (1984, p.623)</p>

<p>Identificar as seções de um sólido relacionadas a certos cortes (ISS)</p>	<p>Exercício onde são dados um sólido e um plano que o intersecta e é solicitado o reconhecimento da figura formada na interseção. Ou, reciprocamente, são dadas as interseções do sólido por planos e é solicitado que se identifique o mesmo.</p>	<p>Desenhe a forma do corte transversal que resultará da interseção do plano de corte indicado na Figura 9, com o sólido geométrico.</p> <p>Figura 9 - Exemplo de exercício na categoria.</p>  <p>Fonte: COHEN; HEGARTY (2008, p.1).</p>
--	---	--

Fonte: Elaborado pelos autores

O Quadro 2 apresenta um resumo quantitativo do resultado encontrado.

**Quadro 2** - Número de tarefas de visualização em exercícios dos livros.

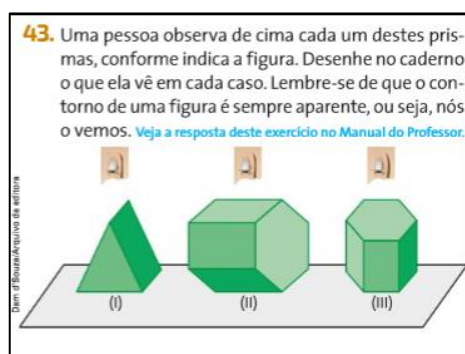
Ação	L 1	L 2	L 3	L 4
Coordenar e integrar visualizações de objetos (CIV)	02	06	06	04
Girar um sólido tridimensional (GST)	-	-	-	-
Gerar sólidos de revolução (GSR)	06	04	06	03
Desenvolver uma superfície (DS)	08	01	06	12
Compor e decompor um sólido em partes (CDS)	08	12	07	08
Identificar as seções de um sólido relacionadas a certos cortes (ISS)	-	05	11	07
Soma/Total de exercícios	24/171 ≈14%	28/141 ≈19,8%	36/210 ≈17,1%	34/228 ≈14,9%

Fonte: Elaborado pelos autores

Observa-se, primeiramente, que, embora a tarefa de manipular mentalmente um sólido para resolver problemas surja em diversas referências sobre inteligência e visualização espacial (BUCKLEY, SEERY; CANTY, 2018), a ação GST não está presente em qualquer dos quatro livros analisados. Os exercícios com esse tipo de tarefa, geralmente, “não oferecem alta demanda cognitiva e estudos sobre o tema tipicamente são aplicados em crianças” (BUCKLEY, SEERY; CANTY, 2018, p. 963). Talvez esse seja o motivo desta ação ser desconsiderada no Ensino Médio brasileiro pelos livros didáticos analisados. A CIV é a única tarefa de

visualização explicitamente solicitada em exercícios, como ilustra a Figura 10.

**Figura 10** - Vista, dado o sólido.



Fonte: Dante (2016, p. 187)

Nos demais casos, as ações são passos intermediários de exercícios que visam a realização de cálculos envolvendo medidas como distâncias, áreas ou volumes. Isso leva a crer que os autores dos materiais didáticos veem essas ações como alvos de oportunidade ou que simplesmente não as consideram na concepção do texto. Alguns dos exercícios referentes a ação CIV aparecem em seções especiais ou como desafios. Esse dado pode conduzir à compreensão de que são tarefas opcionais ou menos importantes. Os quatro livros possuem seções dedicadas a projeções ortogonais e a maioria dos exercícios dessa ação estão concentradas nessas seções. No L4, por exemplo, em três dos quatro exercícios dessa tarefa de visualização, a representação plana dos objetos não é apresentada. Esse tipo de exercício é importante porque leva o aluno a imaginar e a representar o que visualiza mentalmente (Figura 11).

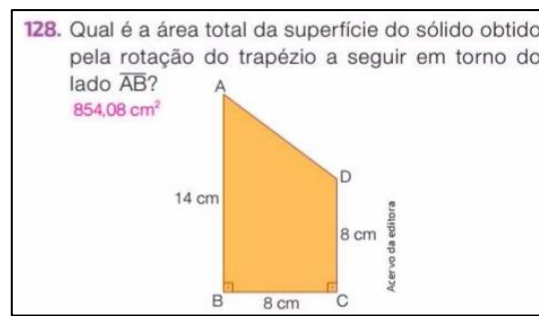
**Figura 11** - Exercício em que o estudante é convidado a representar o que visualiza.

4. Escreva como pode ser a projeção ortogonal de uma reta sobre um plano.
6. Quais são as possíveis projeções ortogonais de uma circunferência sobre um plano? E de uma esfera?
10. Uma circunferência está contida em um plano  $\alpha$  que é perpendicular a um plano  $\beta$ . Determine a projeção ortogonal dessa circunferência sobre o plano  $\beta$ .

Fonte: Leonardo (2016, p. 100)

Nos livros didáticos analisados, a tarefa GSR esteve relacionada aos cilindros e aos cones retos, eventualmente, também a esferas ou à união de dois desses sólidos (Figura 12).

**Figura 12** - Exercício que demanda duas ações.



Fonte: Souza; Garcia (2016, p. 247).

O exercício ilustrado na Figura 12 aparece nas categorias GSR e CDS, pois o estudante precisa identificar o sólido obtido da rotação da figura plana em torno de uma reta, bem como reconhecer esse sólido como a união de um cilindro e um cone para resolvê-lo. Observa-se que, nessa análise, casos de múltiplas tarefas de visualização em um mesmo exercício foram exceção e não regra.

No exercício ilustrado na Figura 13, o estudante não precisa identificar quais são os sólidos, pois o enunciado já diz que são cones. Mas a ação GSR é demandada, uma vez que, para resolver o exercício, é necessário visualizar mentalmente o sólido gerado, já que não foi dada uma figura (BLANCO, DIEGO-MANTECÓN; SEQUEIROS, 2019).

**Figura 13** - Imaginar corpos de revolução.

32. Dois cones, 1 e 2, são gerados pela rotação da superfície determinada por um triângulo retângulo de catetos 5 cm e 12 cm. Para obter o cone 1, o giro se dá em torno do cateto menor; para obter o cone 2, em torno do cateto maior. 240%
- a) Determine a razão percentual entre  $V_1$  e  $V_2$ .
- b) Se as medidas dos catetos desse triângulo fossem  $x$  e  $y$ , em torno dos quais se fizessem rotações para gerar, respectivamente, os cones 1 e 2, qual seria a razão entre  $V_1$  e  $V_2$ ?

Fonte: Leonardo (2016, p. 148).

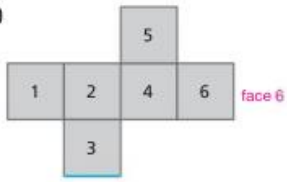
O L4 contém 12 exercícios na categoria DS, pois a planificação é abordada transversalmente na Geometria Espacial. Além disso, os exercícios relacionados são indicados em diversos momentos, conforme ilustra a Figura 14.



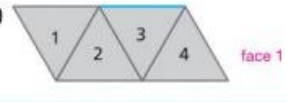
**Figura 14** - Exercícios de recompor a superfície a partir da planificação.

**16.** Em cada uma das planificações abaixo, anote o número da face que coincidirá com o lado destacado em azul depois que o sólido for montado.

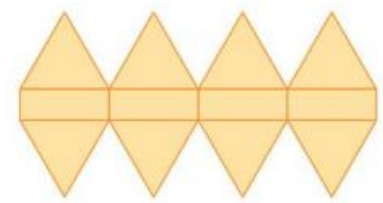
a)



b)



**17.** Considere que a figura abaixo seja a planificação da superfície de um poliedro convexo. Qual é a soma do número de arestas e do número de vértices do poliedro? **30**



**18.** Represente a planificação de um octaedro regular.

Fonte: Leonardo (2016, p. 104)

Observa-se que o L1 não possui nenhum exercício que envolva a ação ISS, ao passo que os demais livros apresentam um número relativamente pequeno de exercícios

desse tipo. Além disso, em geral, são questões objetivas (Figura 15), o que não oportuniza ao estudante realizar a inferência a seção transversal 2D de uma figura 3D.

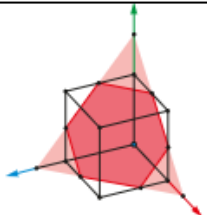
**Figura 15** - Exemplo de exercício da categoria ISS.

**2.** Quando um plano intercepta um cubo, sobre ele podem ser geradas várias figuras planas, por exemplo, um hexágono, como mostra a figura ao lado.

Assinale a alternativa que contém um polígono que não pode ser obtido na intersecção de um plano e um cubo.

a) triângulo	c) pentágono	<input checked="" type="checkbox"/> e) heptágono
b) quadrado	d) hexágono	

Matriz do Enem: H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.



Fonte: Dante (2016, p. 199)

Ao realizar a análise dos livros didáticos, percebeu-se que a lista de critérios para avaliar as tarefas de visualização em exercícios de Geometria Espacial, não está completa (ver Quadro 1). O exercício ilustrado na Figura 16 demanda a identificação

(ou a visualização) e a representação da tridimensionalidade do espaço, portanto, não está contemplado nas categorias aqui listadas.

**Figura 16** - Tarefa de visualização não catalogada.

**1.** Quando estudamos geometria plana, como o próprio nome sugere, as figuras são planas, isto é, em 2D. No entanto, com exceção do triângulo, existem regiões poligonais que não são necessariamente planas, são limitadas por polígonos chamados reversos. Você conseguiria representar um quadrilátero reverso?

Fonte: Dante (2016, p. 159)

Observou-se que as categorias foram criadas de acordo com a análise documental realizada no primeiro momento. Essa lacuna, identificada por nossa investigação, pode abrir portas a outros estudos.

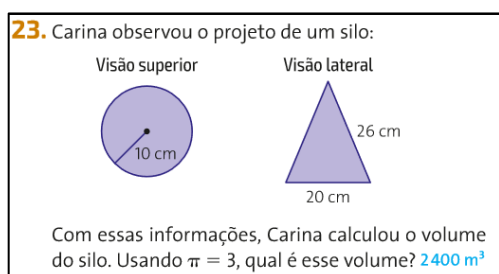
### Conclusão

O objetivo desta pesquisa foi analisar exercícios de livros didáticos de Matemática que demandam HVE para sua resolução. Nesse sentido, percebeu-se, via pesquisa bibliográfica realizada no primeiro momento

do estudo, que tal habilidade envolve a manipulação de diferentes representações de objetos tridimensionais. Uma dessas representações é o que Pittalis e Christou (2010) definem como estruturação espacial. Neste trabalho, tais representações foram indicadas pela ação CDS, que estava presente nos exercícios de todos os livros analisados. Porém, essas manifestações se deram de uma forma muito tímida, não possibilitando ao aluno estruturar espacialmente um objeto, bem como identificar seus componentes espaciais, de forma a conseguir estabelecer relações.

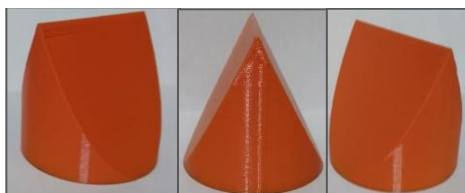
Como já observado, segundo o Guia do PNLD de 2015 para o Ensino Médio “(...) a apresentação de vistas de sólidos mais complexos do que os estudados no ensino fundamental seria uma ótima oportunidade para exercitar as capacidades de visualização espacial dos alunos” (BRASIL, 2014, p. 99). A Figura 17 ilustra uma situação em que os autores perderam tal oportunidade. A resposta sugere ao professor que o cone é a única solução para o problema, o que não é verdade, conforme ilustra o sólido da Figura 18.

**Figura 17** - Sólido, dada a vista.



Fonte: Dante (2016, p. 81)

**Figura 18** - Possível solução para o exercício.



Fonte: Elaborada pelos autores

Em geral, observou-se que praticamente a totalidade dos sólidos apresentados nos livros didáticos analisados são os mesmos tradicionalmente apresentados no Ensino Fundamental: prismas, pirâmides,

cilindros, cones e esferas. Percebe-se, portanto, que os exercícios propostos nos livros didáticos analisados, em geral, não têm como objetivo o desenvolvimento de habilidades de visualização espacial.

Outra percepção foi a valorização excessiva dos cálculos de área e volume, em detrimento de exercícios que privilegiam o raciocínio espacial. Conforme explicitado ao longo deste artigo, o percentual de exercícios classificados não ultrapassou 20%, um valor baixo quando se considera que o desenvolvimento dessa forma de raciocínio é um dos principais objetivos para se ensinar Geometria Espacial na Educação Básica. Além disso, apesar de não ser um dos objetivos desta pesquisa, observou-se que nenhum exercício indicou aos alunos que utilizassem algum tipo de tecnologia. Pesquisas como a de Cohen e Hegarty (2008) sugerem que o uso de tecnologias que permitam a animação interativa de sólidos geométricos é benéfico ao desenvolvimento de HVE.

## Referências

APPLE, M. W. **Teachers and texts: A political economy of class and gender relations in education.** Psychology Press, 2013.

BAKÓ, M. **Different projecting methods in teaching spatial geometry.** In: Proceedings of the Third Conference of the European society for Research in Mathematics Education. 2003. Disponível em <<https://bitly.com/V0JcN>>. Acesso: 13 mai 2021.

BATTISTA, M. T.; CLEMENTS, D. H. Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 27, n. 3, p. 258-292, 1996.

BATTISTA, M. T. The development of geometric and spatial thinking. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, v. 2, p. 843-908, 2007.

BISHOP, A. J. . **Space and geometry.** En R. Lesh y M. Landau (Eds), Acquisition of Mathematics Concepts and Process, p. 175-203. New York: Academic Press. 1983.

BLANCO, T. F.; DIEGO-MANTECÓN, J. M.; SEQUEIROS, P. G. Procesos de Visualización en una Tarea de Generación y Representación de Cuerpos de Revolución. **Bolema: Boletim de**

Educação Matemática, v. 33, n. 64, p. 768-789, 2019.

BRASIL. **Guia de livros didáticos: PNLD 2015 : matemática : ensino médio.** – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014, 108p.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular - Educação é a base.** Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em [http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/B\\_NCC\\_20dez\\_site.pdf](http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/B_NCC_20dez_site.pdf). Acesso em 13 mai 2021.

BRUNHEIRA, L.; DA PONTE, J. P. Desenvolvendo o raciocínio espacial na formação inicial de professores dos primeiros anos. **Zetetike**, v. 26, n. 3, 2018.

BUCKLEY, J., SEERY, N., CANTY, D. **A heuristic framework of spatial ability: A review and synthesis of spatial factor literature to support its translation into STEM education.** Educational Psychology Review, 30(3), 947-972. 2018

COHEN, C. A.; HEGARTY, M. **Spatial visualization training using interactive animation.** In: Conference on Research and Training in Spatial Intelligence. Sponsored by National Science Foundation, Evanston, IL. 2008.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris. Matemática**, 2a edição: São Paulo, Editora Ática, 2016.

DUVAL, R. **Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking.** En F. Hitt y M. Santos (Eds.), Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME, 3-26. 1999.

FAN, L.; KAELEY, G. S. **The Influence of Textbooks on Teaching Strategies: An Empirical Study.** Mid-Western Educational Researcher, v. 13, n. 4, p. 2-9, 2000.

FAN, L., ZHU, Y., MIAO, Z. **Textbook research in mathematics education: development status and directions.** ZDM, v. 45, n. 5, p. 633-646, 2013.

FISCHBEIN, E. **The theory of figural concepts.** Educational Studies in Mathematics, n. 24, p. 139-162. 1993.

GAULIN, C. **The need for emphasizing various graphical representations of 3-dimensional shapes and relations.** In: Proceedings of the 9<sup>th</sup> Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. p. 53-71. 1985.

GONZATO, M.; FERNÁNDEZ, M.; DÍAZ, J. J. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. **NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, v. 77, p. 99-117, 2011.

GUTIERREZ, A. **Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework.** University of Valence, Spain, 1996. Disponível em: <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/Gut96c.pdf>. Acesso em: 25 out. 2020.

HA, T. H.; SONNAD, N. **How do you draw a circle? We analyzed 100,000 drawings to show how culture shapes our instincts.** Quartz. 2017. Disponível em <https://qz.com/994486/the-way-you-draw-circles-says-a-lot-about-you/>. Acesso em 13 mai.2021.

LABORDE, C. Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. **Investigar y enseñar.** Variedades de la educación matemática, p. 33-48, 1997.

LAPPAN, G., PHILLIPS, E., WINTER, M. . **Spatial Visualization.** The Mathematics Teacher, v. 77, n. 8, p. 618-625. 1984.

LEONARDO, F. M. de. **Conexões com a Matemática.** São Paulo: Editora Moderna, v. 2, 2016.

LOWRIE, T.; LOGAN, T.; HEGARTY, M. The influence of spatial visualization training on students' spatial reasoning and mathematics performance. **Journal of Cognition and Development**, v. 20, n. 5, p. 729-751, 2019.

LOWRIE, T.; LOGAN, T.; RAMFUL, A. Visuospatial training improves elementary students' mathematics performance. **British Journal of Educational Psychology**, v. 87, n. 2, p. 170-186, 2017.

MARTINS, R., MANDARINO, M. **Argumentação, prova e demonstração em geometria: análise de coleções de livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental.** Boletim GEPEM. p. 101-115. 2013.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL, & GEOGRAPHICAL SCIENCES COMMITTEE. **Learning to think spatially.** National Academies Press. 2005.

NOTARE, M. R.; BASSO, M.V. A. **Geometria dinâmica 3D: novas perspectivas para o pensamento espacial.** RENOTE: revista novas tecnologias na educação. v. 14, n. 2, 2016.

PARZYSZ, Bernard. “Knowing” vs “seeing”. **Problems of the plane representation of space**

**geometry figures.** Educational studies in mathematics, v. 19, n. 1, p. 79-92, 1988.

PITTALIS, M.; CHRISTOU, C. **Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability.** Educational Studies in mathematics, v. 75, n. 2, p. 191-212, 2010.

SOUZA, J.; GARCIA, J. **Contato matemática.** São Paulo: FTD, v. 3, 2016.

VALVERDE, G. A., BIANCHI, L. J., WOLFE, R. G., SCHMIDT, W. H., HOUANG, R. T. **According to the book:** Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Springer Science & Business Media. 2002.

---

**Carmen Vieira Mathias:** Doutora em Matemática, Universidade Federal de Santa Maria/UFSM e Associação Livro Aberto, Santa Maria, RS, Brasil, carmen@ufsm.br

**Fabio Luiz Borges Simas:** Doutor em Matemática, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro/UNIRIO e Associação Livro Aberto, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, fabio.simas@uniriotec.br