revista PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS NO ENSINO DE COMBINATÓRIA

DOI: https://doi.org/10.33871/22385800.2022.11.25.433-458

Alan Gustavo Ferreira[1]
Fernando Emílio Leite de Almeida[2]

Resumo: O objetivo deste estudo é descrever e analisar as organizações matemáticas – os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias – relacionadas ao ensino de Combinatória no Ensino Médio. Para tanto, recorremos a Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard e colaboradores, que tem provado ser um referencial teórico útil e eficaz para a analisar e descrever práticas. Trata-se de uma investigação de cunho qualitativo com opção pelo método de estudo de caso educativo descritivo. Elegemos como sujeito da investigação uma professora de Matemática de uma escola pública. Os principais resultados indicam que, na prática docente analisada, emergem os três tipos de tarefas referentes aos problemas de contagem dos tipos arranjo, permutação e combinação. No entanto, as tarefas propostas geralmente são padronizadas ou pouco problemáticas. A principal técnica utilizada é a aplicação do princípio multiplicativo, que se revela apropriada para a resolução dos tipos de tarefas apresentados. Todavia, a formação do entorno tecnológico-teórico não é suficientemente explorada.
Palavras-chave: Combinatória. Teoria Antropológica do Didático. Organizações Matemáticas.

MATHEMATICAL ORGANIZATIONS IN COMBINATORY TEACHING

Abstract: The objective of this study is to describe and analyze the mathematical organizations - the types of tasks, the techniques, the technologies and the theories - related to the teaching of Combinatorics in High School. Therefore, we use the Anthropological Theory of Didactics, developed by Chevallard and collaborators, which has proven to be a useful and effective theoretical framework for analyzing and describing practices. This is a qualitative investigation with an option for the descriptive educational case study method. We chose a Mathematics teacher from a public school as the subject of the investigation. The main results indicate that, in the analyzed teaching practice, the three types of tasks emerge related to the arrangement, permutation and combination counting problems. However, the proposed tasks are usually standardized or unproblematic. The main technique used is the application of the multiplicative principle, which proves to be appropriate for solving the types of tasks presented. However, the formation of the technological-theoretical environment is not sufficiently explored.
Keywords: Combinatorics. Anthropological Theory of Didactics. Mathematical Organizations.

Introdução

Este estudo é um extrato de uma pesquisa de mestrado, desenvolvida pelo primeiro autor, que teve como objetivo central analisar as características relativas ao ensino de

[1] Mestre em Educação em Ciências e Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru – PE. Docente das instituições Secretaria Estadual de Educação de Pernambuco e Prefeitura Municipal de Recife – PE. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9366-695X - E-mail: alan.gustavo@hotmail.com
[2] Doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife – PE. Docente do Instituto Federal de Pernambuco e do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática – UFPE/CAA. ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7059-8050 - E-mail: fernandoemilioleite@yahoo.com.br

Combinatória no Ensino Médio. De maneira especial, centrou-se na análise sobre as atividades matemática e didática do professor em torno do estudo de Combinatória.

Apesar deste campo matemático ter experimentado uma importante evolução, tanto quantitativa quanto qualitativa, nas investigações desenvolvidas concernentes ao ensino e à aprendizagem, no âmbito da educação matemática, conforme assinalam Silva e Pessoa (2015), percebe-se que há uma grande concentração de estudos do tipo sondagem nos quais os estudantes aparecem como sujeitos. Estes estudos denotam o interesse em investigar os conhecimentos prévios dos estudantes a fim de se propor possibilidades de intervenção. Por outro lado, pesquisas que envolvem professores figuram em menor número. As autoras ainda apontaram que os trabalhos nessa categoria estão direcionados para dois tipos principais de estudos: sondagem sobre o que os professores sabem sobre a Combinatória e/ou seu ensino e sobre propostas de formação específica para tal conceito.

Dentre as pesquisas envolvendo os processos de ensino e aprendizagem em Combinatória, nas quais o professor aparece como sujeito, podemos elencar as de Costa (2003), Sabo (2010), Rocha (2011), Coutinho (2014), Assis e Pessoa (2015), Cunha (2015), Barbosa de Lima (2015), Lima (2016) e Martins (2018). Todavia, esses estudos, a exceção de Lima (2016), estão voltados para a identificação dos conhecimentos, tanto matemáticos quanto didáticos, destes profissionais a respeito do ensino de Combinatória ou proposição de formação continuada.

Portanto, fica evidente a importância de se ter um maior investimento em pesquisas que busquem analisar e refletir sobre práticas de ensino em Combinatória. Essa necessidade pode muito bem ser justificada pelo número bastante reduzido de estudos que privilegiem essa temática. Ainda que, em suas investigações, Lima (2016) tenha se debruçado na análise da prática docente sobre essa temática, a autora não teme em afirmar a imprescindibilidade de se observar outros momentos de ensino e a prática de outros professores.

Na tentativa de entendermos melhor as condições em torno da prática do professor no que diz respeito ao ensino de Combinatória, especialmente em relação aos saberes matemáticos produzidos e apresentados durante o processo de estudo dos conteúdos deste campo, procuramos nortear este estudo a partir das seguintes questões de pesquisa: “Que saberes são apresentados na prática do professor no ensino de Combinatória no Ensino Médio?” e “Quais características têm esses os saberes que emergem na prática docente em relação ao ensino de Combinatória?”.

Neste contexto e na intenção de responder aos questionamentos supramencionados, recorremos à Teoria Antropológica do Didático (TAD), originalmente desenvolvida por Chevallard (1996; 1999), cujo objetivo primeiro de investigação é a análise da atividade matemática escolar com suas relações humanas e enquadradas em certas instituições sociais. Este referencial teórico tem provado ser uma ferramenta útil e eficaz para analisar e descrever as práticas docentes.

Assim, este estudo tem por objetivo descrever e analisar as organizações matemáticas – os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias – relacionadas ao ensino de Combinatória.

Visando responder aos questionamentos e atingir o objetivo anteriormente apresentado, investiremos, na seção seguinte, em apresentar a TAD e os principais elementos desse aporte teórico que subsidiam este estudo. Na segunda parte do referencial teórico, nos dedicaremos em tratar do campo da Combinatória, buscando apresentar os problemas de contagem mais tratados no âmbito do Ensino Médio. Seguindo, apresentaremos as opções metodológicas, bem como o sujeito da pesquisa, as etapas e critérios de análise. Por fim, nos prestaremos a apresentar e analisar os resultados da investigação.

Teoria Antropológica do Didático

A ideia basilar da TAD reside em considerar que toda atividade humana regularmente realizada pode descrever-se como um modelo único que se resume com a palavra *praxeologia*, negando a visão particularista do mundo social e incluindo a atividade matemática dentro de um modelo mais amplo de atividade humana (CHEVALLARD, 1999).

Dessa ideia, emerge, então, dois aspectos inseparáveis que podem ser definidos a partir dos radicais etimológicos da própria palavra: o nível da prática ou *práxis* ou do *saber fazer*, que engloba um certo tipo de tarefas e questões que se estudam, assim como as técnicas para resolvê-las; e o nível do *logos* ou do *saber*, em que estão situados os discursos racionais sobre a prática que descrevem, explicam e justificam as técnicas que se utilizam, e que recebe o nome de tecnologia, bem como aparece um segundo nível de descrição, explicação e justificativa que se denomina de *teoria*. O primeiro nível, o da prática, denomina-se de *bloco prático-técnico* e o segundo, do saber, denomina-se *bloco tecnológico-teórico*.

Assim, uma praxeologia que descreve uma atividade matemática ou o saber que dela emerge se chama *praxeologia matemática* ou *organização matemática* (OM). Como bem define Bosch (2000, p. 16), uma OM é uma entidade composta por tipos de problemas ou tipos de tarefas, tipos de técnicas que permitem resolver os tipos de tarefas, tecnologias que descrevem ou explicam as técnicas e teorias que fundamentam e organizam os discursos tecnológicos.

Buscando explorar melhor os componentes supramencionados de uma praxeologia, chega-se à noção de *tarefa t* e de *tipos de tarefas T*. Conforme considera Chevallard (1999), uma tarefa, geralmente, é expressa por um verbo como, por exemplo, *lavar* a louça, *desenvolver* um produto notável, etc. Assim, considera-se que uma tarefa ou um tipo de tarefa é um objeto relativamente preciso. No entanto, é preciso considerar que o verbo em si não é capaz de caracterizar um tipo de tarefa. *Contar*, por exemplo, representa um gênero de tarefa. Mas, por si só, não designa uma tarefa. Mas, se dizemos "*contar a quantidade de subconjuntos que é possível formar a partir de um conjunto com n elementos*" teremos um tipo de tarefa.

Se um tipo de tarefa T é considerado em certas instituições é porque existe uma *técnica* τ ou um número limitado de técnicas que permitem não apenas resolver essa tarefa, mas também resolver muito mais tarefas do mesmo tipo. No entanto, nenhuma técnica pode sobreviver com normalidade em uma instituição se não aparece como uma maneira de fazer ou proceder corretamente, compreensível e justificada. Portanto, a existência de uma técnica pressupõe que existe em seu entorno um discurso interpretativo e justificativo da técnica, que é o que chamamos de *tecnologia* θ.

Sobre a tecnologia, é preciso ponderar que, conforme afirma Chevallard (1999), qualquer técnica relativa a um tipo de tarefa está sempre acompanhada de ao menos um embrião ou de um vestígio de tecnologia que, em muitos casos está integrado à própria técnica. Isso pode fazer com que a técnica assuma a dupla função de ser técnica e tecnologia concomitantemente. Por outro lado, Santos e Freitas (2017) defendem que, em dado momento ou instituição, uma determinada técnica pode ser uma tecnologia e, uma tecnologia que justifica a técnica utilizada pode, em outra etapa da aula ou em outro ano escolar, passar a ser uma técnica.

Toda tecnologia precisa também de uma justificação já que suas afirmações, mais ou menos explícitas, podem carecer de uma explicação. Passa-se, então, a um nível superior de justificação-explicação-produção, que se chama *teoria* Θ, que tem para a tecnologia o mesmo papel que esta tem para a técnica, ou seja, uma tecnologia da tecnologia. No entanto, como considera Almeida (2016), os caminhos trilhados para tornar efetiva essa função não tem sido tão "transparentes", pois a prática educacional tem mostrado uma grande quantidade de abstração na apresentação da teoria por parte dos professores e na disposição dela nos livros didáticos.

Até aqui, concentramos esforços em explicitar o significado e as componentes de uma praxeologia. Todavia, no desenvolvimento e análise da atividade matemática, dois aspectos inseparáveis aparecem: por um lado, o trabalho matemático que pode ser construído a partir do estudo de situações-problema e, por outro lado, a forma como o trabalho matemático pode ser construído, isto é, a forma como o processo de estudo dos problemas pode ser organizado. O primeiro aspecto é, de fato, resultado da construção, isto é, a OM. O segundo aspecto é o processo de estudo e construção, denominado de *Organização Didática* (OD).

Para Chevallard (1999), esses dois aspectos, de fato, são inseparáveis porque não há OM sem um processo de estudo que as criem, da mesma forma que não existe um processo de estudo sem OM em construção. Almeida (2016) ainda assinala que essas organizações apresentadas se formam em pares (OM, OD), corroborando com a ideia de indissociabilidade existente entre essas organizações.

Dessa forma, uma OD surge a partir do momento em que existe uma OM a ser posta em prática. Assim, o processo de estudo se situa num espaço determinado denominado por Chevallard (1999) *momentos didáticos* ou *momentos de estudos*, sem a intenção de se propor uma estrutura linear dos processos de estudo. Isso implica dizer que cada momento poder ser vivido com diferentes intensidades, em tempos diversos, quantas vezes se necessite, inclusive é possível que alguns deles apareçam simultaneamente. É importante destacar que cada um dos seis momentos de estudos tem uma função específica necessária para realizar o processo corretamente.

Chevallard (1999) descreve os seis momentos de estudo de uma OM nos seguintes termos: o *primeiro momento* de estudo é o do primeiro encontro com a OM que está em jogo que pode ocorrer de várias maneiras diferentes, sendo que uma dessas maneiras será a partir de pelo menos um tipo de tarefa; o *segundo momento* é o da exploração do tipo de tarefas e da elaboração de uma técnica relativa a este tipo de tarefas; o *terceiro momento* de estudo é o da constituição do entorno tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ que tem uma estreita relação com cada um dos outros momentos; o *quarto momento* é do trabalho com a técnica, que deve simultaneamente melhorar a técnica, tornando-a mais eficiente e mais confiável; o *quinto momento* é o da institucionalização, que delimita e especifica os elementos constituintes da OM construída; e o *sexto momento* é o da avaliação, que se articula com o elemento da institucionalização.

Para Chevallard (1999), o modelo dos momentos do estudo tem, para o professor, duas grandes finalidades. Em primeiro lugar, constitui uma grade para a análise dos processos didáticos. Posteriormente, permite colocar claramente o problema da realização dos diferentes momentos do estudo.

Combinatória

Na Combinatória, dois princípios podem ser considerados a pedra de fundação: os princípios aditivo e multiplicativo. O primeiro está associado a situações em que se pode realizar uma decisão de maneiras m e a outra, de n e não há como realizar as duas simultaneamente, o total é $m+n$ (PINTO, 2014; RIFO, 2017).

A respeito do princípio multiplicativo, Pinto (2014) considera que

> Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$ (PINTO, 2014, p. 12).

Benítez e Brañas (2001) trazem à reflexão o fato de que, embora a Combinatória tenha emergido das bases da aritmética, não é qualquer contagem que envolve a enumeração ou mesmo a simples aplicação das regras da soma ou do produto que caracteriza um problema desse campo.

Dessa forma, Borba, Rocha e Azevedo (2015, p. 1350) definem Combinatória como sendo o campo matemático que “[...] estuda técnicas de contagem – direta e indireta – de agrupamentos possíveis, a partir de elementos dados, que satisfaçam a determinadas condições.”. As autoras ainda reforçam a ideia de que a contagem de problemas combinatórios vai além de uma mera enumeração de objetos expostos, pois as contagens realizadas nesse campo devem atender a certos critérios.

No que diz respeito à natureza dos problemas que compõem esse aludido campo matemático, conforme assinalam Santos *et al*. (2008) e Morgado (2006), são basicamente subdivididas em dois tipos de problemas: os problemas de contagem e os problemas de existência. Os problemas de contagem contam ou classificam os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas enquanto estes últimos buscam demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.

Como o foco de interesse deste trabalho está centrado nos problemas de contagem, mais especificamente naqueles em que os objetos da contagem correspondem a subconjuntos ou agrupamentos binários, ternários..., dependendo do número de elementos que vai se tomar do conjunto gerador, nesses casos o Princípio Multiplicativo (PM) é uma ferramenta básica que fornece um bom instrumento de resolução.

Entretanto, a aplicação direta do PM nos casos acima citados pode às vezes tornar-se trabalhosa. Além disso, com a necessidade de não apenas contar, mas, também de classificar esses tipos de agrupamentos é preciso analisar as diferentes disposições que se podem adotar os elementos as quais se constituem basicamente em duas formas distintas a serem consideradas: a natureza e a ordem dos elementos na formação dos subconjuntos, chegando aos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação, os quais são os objetos de interesse desse estudo.

Sendo assim, a partir de agora todos os esforços serão voltados para se fazer uma apresentação que consiga melhor demarcar os problemas de contagem do tipo Arranjo, Permutação e Combinação. No entanto, vale a pena registrar que nesse momento tais conceitos serão definidos para os agrupamentos em que não se admite a repetição de elementos no mesmo subconjunto, caracterizando assim os agrupamentos do tipo simples.

Para Merayo (2011, p. 236) os Arranjos Simples podem ser apresentados da seguinte forma:

> Seja um conjunto de **m** elementos distintos. Recebem o nome de arranjo de ordem **n** desses **m** elementos, a todo grupo ordenado formado por **n** elementos tomados dos **m,** de tal maneira que dois grupos são considerados distintos se diferem em algum de seus elementos ou bem, se tendo os mesmos elementos, diferem pela ordem em que estão colocados. (grifo do autor).

Nessa definição o autor chama atenção para o fato de que os conjuntos formados por **n** elementos, gerados a partir dos **m** elementos distintos de outro conjunto finito dado, são chamados Arranjos quando se distinguem por dois tipos de características: grupos distintos por natureza, pois diferem pelo menos por um de seus elementos e grupos distintos por ordem, pois ainda que possuam os mesmos elementos, ou seja, possuam a mesma natureza, diferem pela ordem em que estão dispostos os elementos.

Para demarcação das Permutações Simples, Merayo (2001, p. 241) propõe a seguinte definição:

> Recebe o nome de **permutação simples** de m elementos, cada um dos distintos grupos que pode formasse de maneira que cada um deles contenha os m elementos dados, diferindo um grupo do outro unicamente pela ordem de colocação de seus elementos (grifo do autor).

Isso significa dizer que se nos Arranjos Simples ocorrer de $m = n$ nos agrupamentos formados se tomará todos os elementos que compõem o conjunto gerador.

Até então se definiram os agrupamentos em que a ordem dos elementos nos grupos é essencial os quais são denominamos de arranjos simples ou de permutações simples. Surge agora a necessidade de se contar outro tipo de agrupamento, denominado de **combinação**, no qual a ordem é indiferente, isso significa que o que importa, ou que está sendo contado, são os agrupamentos que diferem por algum de seus elementos, ou seja, a distinção é por natureza.

Para esse tipo de agrupamento Merayo (2001, p. 269) apresenta como definição o seguinte argumento:

> Seja um conjunto formado por **m** elementos distintos. Recebe o nome de combinação de ordem **n** desses **m** elementos, cada grupo formado por **n** elementos tomado dos **m**, tal que duas combinações se consideram distintas se diferem em algum de seus elementos. Nesta ordenação não influi a ordem de colocação, isto quer dizer que, dois agrupamentos são iguais se contêm os mesmos elementos, ainda que colocados em distinta ordem.

O Quadro 1 busca sintetizar as principais informações que caracterizam os tipos de problema combinatórios apresentados até aqui, buscando relacioná-los com exemplos e a formatação algébrica para casos gerais, comumente encontrados no âmbito do Ensino Médio.

Quadro 1: Problemas combinatórios de contagem

Tipo de problema combinatório	**Configuração dos elementos dos agrupamentos**	**Exemplo de tipo de problema**	**Formatação algébrica para casos gerais**
Arranjo	Ordem e Natureza são relevantes	Em uma empresa, três funcionários se candidataram para as vagas de diretor e vice-diretor financeiro. Eles serão escolhidos através do voto individual dos membros do conselho dessa empresa. De quantas maneiras distintas essa escolha poderá ser feita?	$A_{m,n} = \dfrac{m!}{(m-n)!}$
Permutação	Ordem é relevante	Quantos números de quatro algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 5 e 7?	$P_m = m!$
Combinação	Natureza é relevante	Considere o conjunto dos principais times pernambucanos T = {Sport, Náutico, Santa Cruz}. De quantas maneiras diferentes esses times podem disputar um campeonato no qual cada time joga contra os demais uma única vez?	$C_{m,n} = \dfrac{m!}{n!\,(m-n)!}$

Fonte: Elaborado pelos autores

É importante observar que os exemplos de tipos problemas de contagem, apresentados no quadro anterior, estão relacionados à sua configuração mais simples, o que pode ser um facilitador na escolha da técnica utilizada.

Percurso Metodológico

Trata-se de uma pesquisa qualitativa com opção pelo método de estudo de caso descritivo (MOREIRA, 2011). Pode, ainda, ser classificada como um estudo de caso educativo no qual André (2008) chama a atenção para o fato de que os estudos desse tipo são extremamente úteis para conhecer os problemas e ajudar a entender a dinâmica da prática educativa, pois retrata um problema educacional em toda sua complexidade individual e social se transformando em uma descoberta preciosa.

Assim sendo, pode-se dizer que o estudo em pauta situa-se no âmbito das chamadas pesquisas qualitativas, em particular do tipo Estudo de Caso Educativo Descritivo no qual se pretende caracterizar e analisar as OM do professor referentes ao ensino de Combinatória.

Elegemos, como sujeito participante desta investigação, uma professora de matemática do 2º ano do Ensino Médio, a quem chamamos pelo pseudônimo de Ana, para resguardar a identidade original da professora, de uma escola pública do interior do Estado de Pernambuco. A escolha de apenas um sujeito se justifica pelo fato de acreditarmos que as OM que emergem em torno da atividade do professor são fenômenos didáticos e, por assim serem, se manifestam de diferentes formas. Também não temos a intenção de estabelecer comparação entre práticas distintas, mas de apenas caracterizá-la. Vale ressaltar que, apesar do foco deste estudo está no ensino e não na aprendizagem, os estudantes dessa turma investigada participaram indiretamente desta pesquisa.

Como nossa pesquisa centra-se na análise da prática docente relativa ao ensino de Combinatória, do ponto de vista das praxeologias, algumas ações (etapas) foram realizadas.

Na **primeira etapa,** produzimos os dados do professor através de uma videografia, ou seja, as aulas referentes ao ensino de combinatória foram filmadas. Utilizamos uma câmera de vídeo e áudio como instrumento de coleta. A escolha pela videografia justifica-se porque ela permite uma análise mais detalhada das OM mobilizadas pelo professor. Nessa etapa da pesquisa também nos dedicamos à transcrição dos recortes das aulas. Os recortes nos ajudaram a identificar os momentos de surgimentos dos fenômenos e como se relacionam.

Na **Segunda etapa** da pesquisa nos propusemos a identificar, nas transcrições, a OM proposta pelo professor – as tarefas (tipos e subtipos), as técnicas e os elementos tecnológicos-teóricos.

Com o cumprimento dessas etapas, acreditamos que pudemos contemplar os questionamentos e objetivos elencados na parte introdutória deste estudo.

Todas as etapas descritas anteriormente foram analisadas de acordo com critérios estabelecidos, embasados no referencial teórico, que trataremos de apresentar a seguir.

A categorização adotada diz respeito à OM, ou seja, os tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e a teoria. Os elementos da praxeologia matemática serviram de norte para a análise das OM mobilizadas pelo professor nos momentos de estudo. Além disso, nos preocupamos, em última instância, em submeter as OM do professor aos critérios de avaliação *a priori* de uma OM, definidos por Chevallard (1999), sintetizados no Quadro 2.

Quadro 2: Critérios para avaliação *a priori* de uma organização matemática

Elementos da Praxeologia	Critérios adotados
Tarefa (T)	• Identificação • Razão de Ser • Pertinência
Técnica (τ)	• Elaboração • Facilidade • Alcance • Confiabilidade • Possibilidade de evolução
Tecnologia e Teoria [θ, Θ]	• Apresentação e justificativa do enunciado • Forma de justificativa: canônica ou não • Adaptação às condições de uso • Tipo de justificativa • Existência de elementos teóricos explícitos ou implícitos

Fonte: Elaborado a partir de Chevallard (1999).

Estudo da prática de ensino da professora do ponto de vista das praxeologias

Antes de procedermos com as análises, precisamos esclarecer que não temos a intenção de fazer nenhum juízo de valor sobre a atuação da professora, no sentido de depreciar ou enaltecer a sua forma de condução das aulas. Nossa análise será pautada estritamente do ponto de vista do referencial teórico e metodológico levantado neste estudo, ou seja, nossa análise, com vistas a responder às questões da pesquisa, estará submetida ao crivo das OM.

Convém ressaltar que realizamos a videografia de todas as aulas em que foram tratados conteúdos referentes à Combinatória. No entanto, é preciso reafirmar que nossa análise centrou-se apenas nos problemas de contagem do tipo arranjo, combinação e permutação, todos do tipo simples, ou seja, agrupamentos nos quais não se admite a repetição de elementos no mesmo subconjunto.

Do total de todas as tarefas apresentadas durante as aulas, 25 tarefas podem ser categorizadas como tipo de tarefas que envolvem os problemas de contagem dos tipos arranjo, combinação e permutação, sendo que 24 delas foram efetivamente trabalhadas (respondidas) ao longo das aulas e 01 delas, apenas enunciada. Comparando a quantidade de tarefas propostas relacionadas a esses problemas de contagem com o total de todas as tarefas, percebe-se uma quantidade muito aquém do que se esperava, uma vez que esses problemas são tratados exclusivamente no âmbito do Ensino Médio. Se fizermos a comparação com o número de tarefas que podem ser categorizadas em problemas que envolvem os PM e PA ou situações que tratam apenas do produto fatorial e suas operações básicas, por exemplo, percebemos uma discrepância ainda maior, já que encontramos um total de 13 tarefas que envolvem esses princípios e 37 que se relacionam ao produto fatorial. Na tabela, a seguir, apresentamos a distribuição de tarefas matemáticas apresentadas na aula da professora:

Tabela 01: Distribuição das tarefas apresentadas nas aulas da professora

Tarefas apresentadas nas aulas da professora	**Quantidade**	**Percentual (%)**
Tarefas relacionadas aos problemas de contagem dos tipos arranjo, permutação, combinação	25	28
Tarefas relacionadas aos problemas que envolvem os PA e PM	13	15
Tarefas envolvendo o produto fatorial e suas operações básicas	37	42
Outras tarefas matemáticas	14	15
TOTAL	89	100

Fonte: Elaborada pelos autores.

Nossas análises se concentraram nessas 25 tarefas apresentadas durante as aulas da professora, que correspondem aos problemas de contagem dos tipos permutação, arranjo e combinação, respectivamente, como se descrevem a seguir, adaptadas ao gênero calcular:

- T_1 – Calcular o número de agrupamentos formados a partir de *m* elementos, nos quais todos os *m* elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos;
- T_2 – Calcular o número de agrupamentos formados a partir de *m* elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , *n* elementos, com $0 < n < m$, nos quais esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos;
- T_3 – Calcular o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de *m* elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , *n* elementos, com $0 < n < m$, nos quais esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos, pois a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

No tipo de tarefa T_1, identificamos a apresentação de 13 tarefas durante as aulas da professora, as quais podem ser categorizadas nos seguintes subtipos de tarefas[3], dispostos na tabela a seguir.

Tabela 02: Categorização e distribuição das tarefas do tipo T_1 encontradas na aula da professora

Tipo de Tarefa T_x	Subtipos de Tarefa f_x	Total de Tarefas
T_1 – Calcular o número de agrupamentos formados a partir de m elementos, nos quais todos os m elementos serão usados, ou seja, esses agrupamentos serão distintos entre si apenas pela ordem dos seus elementos	f_{11} – Determinar o número de permutações P_m formadas a partir de m elementos	11
	f_{12} – Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$ devem estar fixados na sequência dos m elementos	01
	f_{13} – Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não.	01
	TOTAL	13

Fonte: Elaborada pelos autores.

Notamos uma predileção pelo trabalho com o subtipo de tarefas f_{11} em detrimento dos demais subtipos de tarefa. Esse subtipo pode ser percebido na seguinte tarefa proposta pela professora[4]:

> **P:** Agora eu vou distribuir aqui essas cédulas e você vai pegar 4 cédulas diferentes, certo? Porque agora a gente vai fazer permutação com essas cédulas... Escolha 4 cédulas diferentes... Vamos fazer a permutação!

Percebe-se que, quando a professora faz enunciação dessa tarefa, a mesma já explicita a técnica que vai ser utilizada, nesse caso, a fórmula de permutação, uma vez que, a aula inicia com a apresentação da fórmula para o cálculo das permutações simples. Podemos inferir que, a utilização de cédulas na aula para explorar esse subtipo de tarefas se justifica exclusivamente para fixar a ideia trazida pela professora de que permutar significa trocar a posição dos elementos, já que a utilização das cédulas se deu apenas para escrever agrupamentos formados por essas cédulas que se diferenciavam um do outro apenas pela posição dessas células. Essa ideia foi igualmente explorada em outras tarefas apresentadas pela professora como se pode perceber nos seguintes fragmentos das transcrições da Aula 6.

> **P:** 3 objetos diferentes. Pega aí. Pronto! Peguem aí 3 objetos. Vamos formar um anagrama com esses objetos. Pegue aí 3 objetos. Eu vou pegar aqui o apagador, o

[3] Subtipos de tarefa, nesta abordagem, nada mais é do que uma configuração de um determinado tipo de tarefa.
[4] Usaremos as siglas **P** e **Al** para referir-se à professora e aos seus alunos, respectivamente, durante os excertos de diálogo apresentados.

> brilho e piloto, certo? Pegue aí seus objetos também. Vamos formar anagramas com isso daqui.
> (...)
> **P:** Será que a gente pode fazer anagramas com moedas?
> **Al:** Pode.
> **P:** Sim ou não?
> **Al:** Pode.
> **P:** Será que a gente pode fazer com pessoas?
> **Al:** Pode.
> **P:** Vem cá! Quatro pessoas aqui na frente.
> **Al:** Eu vou, professora.
> **P:** Ana, Pedro, Tiago, João e Felipe. Vou colocar as iniciais A, P, T, J e F. Será que a gente pode formar anagramas com eles, minha gente? Vamos fazer uma permutação, não é, com eles aqui?

Notamos a intenção implícita da professora em fazer com que os estudantes compreendessem que nas tarefas do subtipo f_{11} os agrupamentos seriam formados a partir da troca da posição dos seus elementos, ou seja, um agrupamento diferencia um do outro apenas pela ordem dos seus elementos, o que pode nos conduzir a inferir que isso se trata de elementos do entorno tecnológico.

Um fato que nos chama a atenção, nessa porção da transcrição anterior, é o de que a professora atribui o mesmo significado de permutação à palavra “anagrama”, apesar da definição desta palavra ter sido apresentada de forma correta anteriormente. Isso pode ser justificado pelo fato de que é bastante comum encontrarmos, especialmente em livros didáticos, tarefas desse subtipo nas quais é preciso determinar o número de anagramas a partir de uma certa quantidade de letras, o que pode ter induzido a conclusão de que realizar permutações signifique escrever anagramas.

Como já informado anteriormente, a técnica utilizada pela professora na resolução do subtipo de tarefa f_{11} é explicitada desde o enunciado da tarefa e reforçada a todo instante do trabalho com a tarefa, como se pode observar no fragmento de transcrição abaixo:

> **P:** Qual é a fórmula agora? Nós vamos pegar isso aqui e aplicar na fórmula? Anote aí a fórmula agora. Aplique aí a fórmula! (...) Vamos lá!? Aplique aí fórmula do jeito que eu apliquei aqui *[fazendo referência à utilização da fórmula de permutação na resolução da tarefa anterior]*.

Fica evidente o uso da técnica, que é a aplicação do produto fatorial, na resolução do subtipo de tarefa f_{11}. A professora observa que um grupo de estudantes conseguiu resolver a tarefa a partir da técnica sugerida e, em seguida escreve a resolução no quadro:

> **P:** Ela fez aqui, ó. A equipe de Ana. P_n. P de que? P representa o que?
> (...)

P: Permutação. O P, permutação e n é o que? O número. E n!, esse n a gente coloca pelo número. Elas colocaram aqui 4 vezes 3 vezes 2 vezes 1 igual...

Quadro 3: Registro da professora no quadro

$$P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

Essa técnica é igualmente utilizada para resolver todas as tarefas desse mesmo subtipo. O Quadro 4 sintetiza a OM em torno do subtipo de tarefa f_{11}:

Quadro 4: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa f_{11} apresentada pela professora

Subtipo de Tarefa	Técnica	Entorno tecnológico-teórico
f_{11} – Determinar o número de permutações P_m formadas a partir de m elementos	(τ_1) Produto fatorial e suas operações	Utilização da definição e do conceito de Permutação simples para *m* objetos – Combinatória (θ_{PS}).

Fonte: Elaborado pelos autores.

Utilizando os critérios de avaliação das OM apresentados no marco teórico e metodológico deste trabalho, a partir das contribuições de Chevallard (1999) para a OM em torno do subtipo de tarefa f_{11}, podemos deduzir, a partir das transcrições que as tarefas desse subtipo trabalhadas durante as aulas são apresentadas de forma clara e bem identificadas e são representativas de situações matemáticas frequentemente encontradas, especialmente em livros didáticos destinados à etapa de escolarização do Ensino Médio, como se pode perceber nos estudos de Ferreira e Almeida (2019). No entanto, as razões de ser não são explicitadas. Em relação a técnica τ_1 empregada na resolução do subtipo de tarefa f_{11}, pode-se dizer que ela é apenas esboçada, no entanto é de fácil utilização. Além disso, essa técnica é eficaz e confiável na resolução desse tipo de tarefa. Todavia não se percebe possibilidade de evolução dessa técnica. A respeito do entorno tecnológico-teórico, as justificativas utilizadas, ainda que implícitas no discurso da professora, são do tipo explicativas e estão relativamente próximas daquelas matematicamente válidas, considerando a definição para esse tipo de problema proposta por Merayo (2001).

O subtipo de tarefa f_{13} que é "Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \dots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não." aparece na Aula 8 em uma tarefa proposta do livro didático, apresentada a seguir:

Figura 1: Tarefa do subtipo f_{13} apresentada na aula da professora

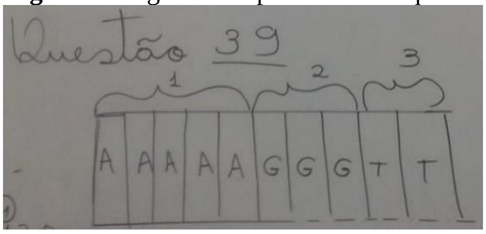
Em uma mesma prateleira de uma estante há 10 livros distintos, sendo cinco de Álgebra, três de Geometria e dois de Trigonometria.

a) De quantos modos distintos podemos arrumar esses livros nessa prateleira, se desejamos que os livros de um mesmo assunto permaneçam juntos?

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 238).

A professora divide a técnica na resolução dessa tarefa em algumas etapas. Inicialmente representa os livros no quadro, indicando cada um pela letra inicial do assunto a que pertence, conforme a Figura 2:

Figura 2: Registros da professora no quadro



Fonte: Acervo da Pesquisa

Em seguida, a professora continua a resolução, considerando cada grupo de livros como sendo apenas um, já que os livros de mesmo assunto devem permanecer juntos, segundo o que se pode observar na porção da transcrição abaixo:

> **P:** Um grupo de A, um grupo de G e um grupo de T. Então quantos grupos nós temos?
> **Al:** 3
> **P:** 3. Se nós temos 3 grupos então a gente vai fazer uma permutação de 3. Uma permutação de 3. Da seguinte forma: pensando nas matérias então eu posso arrumar de 3 modos. Então a permuta vai ser por 3 que é igual a quem? Quem é 3!? 3 fatorial é igual a 6. Nós temos 6.

Apesar dos 10 livros estarem organizados por assuntos, é preciso considerar que eles são distintos entres si, mesmo os de mesmo assunto. Daí a necessidade de se contar o número de permutações que cada grupo de livros pode gerar. Isso pode ser percebido na parte da transcrição a seguir:

> **P**: (...) E dentro de cada uma das matérias existe uma quantidade de possibilidades também, psiu, eu estou representando aqui só as 3 possibilidades. Mas dentro de cada uma aqui nós temos maneiras. Os de A são quantos?
> **Al:** 5
> **P:** Então eu vou fazer uma permutação por 5. $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.
> (...)
> **P:** Geometria agora. Permutação aqui pelos 3 livros agora. 3 livros de geometria então vai ser assim: $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Depois eu tenho aqui trigonometria que

> vai ser uma $P_2 = 2$. Então, nós fizemos aqui as permutações por disciplinas, agora. Quantas maneiras eu posso arrumar livros de álgebra? Eu tenho 120 possibilidades. Quantas maneiras eu posso arrumar livros de geometria? Permutação por 3. Eu tenho 6 possibilidades. Trigonometria eu tenho 2 possibilidades. Mas além dessas possibilidades eu também tenho aqui 6. Eu já encontrei 6. *[Fazendo referência a permutação entre os grupos de assuntos]* Eu vou multiplicar por $120 \cdot 6 \cdot 2$, certo? Ou seja, primeiro eu vou multiplicar o que há nos parênteses e depois vezes 6.

Os registros da professora, em seguida, complementam a resolução da tarefa proposta do subtipo de tarefa f_{13}.

Quadro 5: Registro da professora no quadro

$$6 \cdot (120 \cdot 6 \cdot 2) = 6 \cdot 1440 = 8640$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

Podemos inferir, então, que a técnica utilizada na resolução desse subtipo de tarefa é a do produto fatorial e suas operações básicas, pois ela pode ser resolvida na forma $x(P_m \cdot P_n \cdot \ldots \cdot P_o)$. Sobre o entorno tecnológico-teórico, não identificamos na transcrição da fala da professora elementos que possamos associar a esse bloco. Isso pode ser justificado pelo que argumentam Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015) ao firmar que, em determinada Instituição, uma técnica pode adquirir o papel de autotecnológica, ou seja, não necessitará de justificativa. Todavia, podemos inferir o entorno tecnológico-teórico, já que se trata de um subtipo de tarefa associada ao tipo de tarefa T_1. No Quadro 6, apresentamos a síntese da OM em torno do subtipo de tarefa f_{13} trabalhada na aula da professora, que coincide com a OM apresentada no livro didático utilizado.

Quadro 6: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa f_{13} apresentada pela professora

Subtipo de Tarefa	Técnica	Entorno tecnológico-teórico
f_{13} - Determinar o número de permutações formadas a partir de m elementos das quais $m_1, m_2, \ldots, m_{m-1} \in m$, devem aparecer na sequência juntos, nessa ordem ou não.	(τ_1) Produto fatorial e suas operações básicas.	Utilização da definição e do conceito de Permutação simples para *m* objetos – Combinatória (θ_{PS}).

Fonte: Elaborado pelos autores.

Avaliando a OM em torno do subtipo de tarefa f_{13}, podemos inferir, em relação a tarefa proposta na aula, que a mesma foi apresentada de forma clara e bem identificada. Todavia, não se explicita a razão de ser desse subtipo de tarefa, apesar de considerarmos como uma tarefa que pode ser encontrada facilmente. A técnica utilizada não foi elaborada, mas é de fácil utilização e tem um nível de alcance abrangente. Como o entorno tecnológico-teórico a esse subtipo de tarefa não foi suficientemente explícito nas aulas da professora, nos eximimos de submetê-lo aos critérios de análise da avaliação das OM.

A tarefa proposta do subtipo de tarefa f_{12} não foi respondida pela professora. Essa tarefa foi trabalhada através da exibição de um vídeo da internet no qual um professor aparece resolvendo tanto essa tarefa. Como o foco da nossa análise está direcionado às praxeologias da professora, nos isentaremos de fazermos uma análise dessa tarefa, já que ela não foi trabalhada pela professora.

No tipo de tarefa T_2, que se refere aos problemas de contagem do tipo arranjo simples, identificamos 6 tarefas que podem ser associadas a esse tipo de tarefa e categorizadas nos subtipos de tarefas, distribuídos na tabela a seguir:

Tabela 3: Categorização e distribuição das tarefas do tipo T_2 encontradas na aula da professora

Tipo de Tarefa T_x	**Subtipos de Tarefa f_x**	**Total de Tarefas**
T_2 – Calcular o número de agrupamentos formados a partir de *m* elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , *n* elementos, com $0 < n < m$, nos quais esses agrupamentos podem ser distintos um dos outros pela ordem ou natureza dos seus elementos	f_{21} – Dado m elementos distintos, determinar $A_{m,n}$ (número de arranjos desses m elementos, tomados n a n).	06

Fonte: Elaborada pelos autores

Como se pode observar, apenas um subtipo de tarefa, o f_{21}, foi encontrado na aula professora. Esse subtipo de tarefa aparece com a apresentação da seguinte tarefa, que pode ser percebida em sua fala:

> **P:** Agora eu tenho aqui números distintos. Agora com esses mesmos números 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7... Vamos aqui ver os números distintos que eu posso usar. Esse numeral aqui ó, os algarismos são distintos? *[apontando para o número 123 escrito no quadro]*
> **Al:** Não
> **P:** Distintos é diferente, minha gente. Aqui está distinto?
> **Al:** Anhan
> **P:** Então, se está distinto, presta atenção, eu estou pedindo aqui agora pra gente formar as possibilidades de números distintos.

Apesar da tarefa não estar suficientemente clara nesse trecho da transcrição, ela torna-se explícita pelo contexto no qual a professora a insere, pois a tarefa anterior apresentada nessa aula se referia a determinar números com três algarismos, com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, que pode ser categorizada como um tipo de tarefa de arranjo com repetição. Logo após a resolução dessa tarefa, a professora propõe determinar também números com três algarismos, sendo que dessa vez os algarismos tinham de ser distintos, utilizando os mesmos dígitos.

Para resolver essa tarefa, a professora conjuntamente com os estudantes utiliza a técnica τ_2, que trata da aplicação do PM ou PFC. O trabalho com a τ_2 pode ser percebido na conversa entre a professora e os estudantes no seguinte trecho da transcrição, complementado pelo Quadro 7 que traz os registros feitos no quadro pela professora:

> **P:** Então, se está distinto, presta atenção, eu estou pedindo aqui agora pra gente formar as possibilidades de números distintos. No primeiro tracinho, eu posso usar esses 7 algarismos?
> **Al:** Anhan
> **P:** Eles são distintos?
> **Al:** São
> **P:** São. Eu posso usar os 7?
> **Al:** Anhan
> **P:** Então eu tenho quantas possibilidades?... Mas agora se eu já usei o 1 e eu quero números distintos... Eu posso repetir o 1 aqui?
> **Al:** Não
> **P:** Não. Então eu usei 1 possibilidade e agora ficaram quantas possibilidades?
> **Al:** 6
> **P:** 6. E agora? Vamos dizer que eu usei o 2?
> **Al:** Aí fica 5.
> **P:** Eu vou poder repetir o 2 aqui?
> **Al:** Não
> **P:** Então restaram quantas possibilidades?
> **Al:** 5
> **P:** Agora ó, esse problema aqui ó, números distintos. Quando for para o próximo tracinho, considerar o elemento do tracinho anterior. Então no próximo tracinho a gente já considerou que já usamos o 1. Então a gente agora só tem 6 possibilidades. Já usamos as 2 possibilidades. Agora só nos restam?
> **Al:** 5
> **P:** Então a gente faz ó, aqui também eu tô dizendo que a gente tem 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Então se é "E" também vai ser o princípio multiplicativo. Aí eu resolvo: 7 vezes 6 dá quanto?
> **Al:** 42
> **P:** 42 vezes 5 vai dar 210, certo?

Quadro 7: Registros da professora no quadro

$$\underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{5} = 210$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

Percebemos que a professora nomeia a técnica τ_2 como sendo técnica do tracinho. Essa técnica é apresentada no início da aula como uma dica para resolver as tarefas envolvendo arranjo. No entanto, pode-se notar no final do trecho da transcrição apresentado anteriormente, a necessidade do uso do PM, já que os eventos são sucessivos e independentes entre si.

Logo após a resolução da tarefa utilizando τ_2, a professora anuncia que vai resolver o problema a partir de uma técnica mais fácil, que é a partir do uso da fórmula de arranjo simples, como se nota no diálogo entre ela e os estudantes na porção da transcrição a seguir, complementado pelo Quadro 8 contendo os registros da professora no quadro:

> **P:** Uma técnica mais fácil é essa aqui ó... A é de arranjo né? A é de arranjo. Aí eu vou colocar n, p... Veja bem "$A_{n,p}$". Arranjo de um número maior por um número menor, certo? *[o número maior faz referência ao "n" da fórmula de arranjo e o número menor, ao "p"].*
> **P:** Presta atenção! Essa técnica não funciona para esses números repetidos. Só para os distintos. Então essa técnica aqui a gente só utiliza quando o problema for pedir a questão distinta. Então $A_{n,p}$, n vai ser o número de possibilidades que nós temos. Que são quantos?
> **Al:** 7
> **P:** 7 né? São 7. E p eu vou descer o número de vezes que eu estou pedindo. Qual foi o número de vezes que eu pedi aqui? 3. Tô pedindo pra descer 3 vezes. Vai ficar assim, ó, $A_{7,3}$. Esse n representa o número de algarismos e esse p a quantidade de algarismos que está sendo pedido aqui. 4. Então 7 eu desço 3 vezes. 7 eu desço 3 vezes. 7 eu desço?
> **Als:** 3 vezes
> **P:** Então vai ficar assim ó: 7 eu desço 3 vezes em ordem consecutivas, né? Então vem qual? Pelo fatorial. 7 vezes 6 vezes 5... Veja que ficou igual aqui né? 7 desço 3 vezes, 7 desço 3 vezes. 7 vezes 6 vezes 5 que também é igual a 210.

Quadro 8: Registros da professora no quadro

$$A_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Fonte: Acervo da pesquisa

Quando se observa o trabalho com essa técnica, nesse trecho da transcrição, percebemos que na verdade não se trata da aplicação da fórmula de arranjo, como mencionado pela professora, mas da aplicação do princípio multiplicativo. O que se utiliza da fórmula de arranjo é apenas a referência do número de elementos *n* disponíveis (que a professora chama de número maior) para formar os agrupamentos com *p* elementos (chamado pela professora de número menor) tomados desses *n*.

Em relação ao entorno tecnológico-teórico, a justificativa para a técnica utilizada na resolução desse subtipo de tarefa apresentado pela professora é dada pelas distintas disposições que se podem adotar os elementos na constituição dos agrupamentos, que são a ordem e natureza. Nesse caso, a professora considera que a tarefa se trata de um problema do tipo arranjo quando a ordem dos elementos é capaz de gerar um novo agrupamento, desconsiderando que os agrupamentos também podem se distinguir uns dos outros pela natureza dos seus elementos, conforme explicita Merayo (2001). Isso pode ser percebido na sua fala alcunhada no trecho da transcrição a seguir:

> **P:** Pronto, gente, essa técnica aqui que a gente fez, ela é toda de arranjo. Isso aqui já é o arranjo, certo? É quando a ordem influi? Anhan. Arranjo.

No quadro que segue, apresentamos a síntese da OM em torno do subtipo de tarefa f_{21} apresentada pela professora:

Quadro 9: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa f_{21} apresentada pela professora

Subtipo de Tarefa	Técnica	Entorno tecnológico-teórico
f_{21} – Dado m elementos distintos, determinar $A_{m,n}$ (número de arranjos desses m elementos, tomados n a n).	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Arranjo Simples para m elementos, tomados n a n – Combinatória (θ_{AS}).

Fonte: Autoria Própria

Avaliando a OM em torno do subtipo de tarefa f_{21}, podemos concluir que as tarefas foram apresentadas de forma clara, bem identificadas e tratam-se de situações matemáticas comuns. A técnica proposta (τ_2) foi apenas esboçada, no entanto é de fácil utilização e é confiável e eficaz no cumprimento do tipo de tarefa proposto. Estudos como, por exemplo, os de Barbosa de Lima (2015) e Martins (2018) apontam para a importância do uso do PM como uma técnica capaz de resolver os problemas de contagem que aparecem nessa etapa da educação básica. A justificava é relativamente próxima daquela matematicamente aceita, já que considera apenas a ordem na formação dos agrupamentos.

A respeito do tipo de tarefa T_3, que se refere aos problemas de contagem do tipo combinação simples, percebeu-se, a partir da transcrição das aulas, que foram apresentadas 05 tarefas desse tipo. Essas tarefas estão categorizadas nos subtipos de tarefas, de acordo com a distribuição na tabela a seguir:

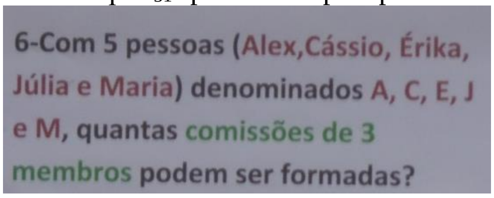
Tabela 4: Categorização e distribuição das tarefas do tipo T_2 encontradas na aula da professora

Tipo de Tarefa T_x	Subtipos de Tarefa f_x	Total de Tarefas
(T_3) Calcular o número de agrupamentos (subconjuntos) formados a partir de m elementos, nos quais poderão ser formados agrupamentos de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ... , n elementos, com $0 < n < m$. Esses agrupamentos são distintos uns dos outros apenas pela natureza dos seus elementos, pois a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.	f_{31} – Dado m elementos distintos, determinar $C_{m,n}$ (número de combinações desses m elementos, tomados n a n, com n elementos distintos, escolhidos entre os m).	05

Fonte: Elaborada pelos autores.

O subtipo de tarefa f_{31} é apresentado na Aula 4 a partir da tarefa apresentada pela professora que se percebe a seguir:

Figura 3: Tarefa do subtipo f_{31} apresentada pela professora na aula


6-Com 5 pessoas (Alex,Cássio, Érika, Júlia e Maria) denominados A, C, E, J e M, quantas comissões de 3 membros podem ser formadas?

Fonte: Acervo da Pesquisa.

A técnica utilizada na resolução desse tipo de tarefa é a τ_2, que se refere a aplicação do princípio multiplicativo. O trabalho com essa técnica pode ser percebido na fala da professora na porção da transcrição que segue e no quadro com os registros realizados por ela no quadro, posteriormente:

> **P:** E como é que eu resolvo essa técnica? Então é 1, 2, 3, 4, 5 eu tenho 5 pessoas aqui, certo? *[a professora conta a quantidade de elementos considerados na contagem]* A técnica de combinação. Combinação eu tenho 5 para formar grupos de 3. Grupos de 3. (...) Organizar comissões de 3 pessoas, certo? 3 em 3. Então, olha outra técnica de combinação que é mais fácil de resolver. 5 é o número de elementos. Psiu! Ó, 1, 2, 3, 4, 5. 5 para organizar 3. Então eu faço... Eu faço do mesmo jeito só que eu vou acrescentar um denominador fatorial. 5 aí eu desço 3.. (inaudível) 4... 5 vezes 4 vezes 3 (...)

Quadro 10: Registros da professora no quadro

$$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10$$

Fonte: Acervo da pesquisa.

No processo de resolução da tarefa, apesar do uso de elementos típicos do trabalho com a fórmula de combinação (τ_4) como, por exemplo, "$C_{5,3}$", fica claro a aplicação do PM. Pode-se perceber, no fragmento da transcrição apresentado anteriormente, que a professora entende que não se trata do uso da fórmula, mas de uma "técnica mais simples" que não foi nomeada devidamente. Esse fato é reforçado mais uma vez na fala da professora, como se apresenta na parte da transcrição a seguir:

> **P:** Então, com essa técnica *[referindo-se a última técnica apresentada]* a gente descarta essa *[referindo-se a fórmula de combinação simples]*. Mas se a gente aplicar aqui... Se eu pegar 5 e colocar no lugar de n. Se colocar o 3 aqui e o 5 aqui e o 3 aqui vai dar o mesmo resultado, vai dar 10 *[referindo-se ao termos da fórmula de combinação]*. Essa técnica aqui ela é mais rápida, certo? *[referindo-se a última*

técnica apresentada]

No tocante ao entorno tecnológico-teórico, o que se percebe é que a professora não o apresenta de maneira suficientemente clara. No entanto, percebe-se em alguns momentos da transcrição alguns indicativos ou tentativas de apresentar um discurso tecnológico, que trazemos no trecho a seguir:

> **P:** Quando a gente não modifica a situação, então continua sendo... é... será combinação, certo?
> (...)
> **P:** Combinação vai ser assim ó: pessoas, objetos... Quando for números é de arranjo... Combinação vai ser pessoas, professores, alunos... É assim envolvendo essas situações.

Como se pode notar, a professora não apresenta um discurso tecnológico-teórico que sustente a utilização da técnica. Isso pode, em certa medida, denotar o caráter autotecnológico da técnica escolhida, conforme defendem Câmara dos Santos e Bessa de Menezes (2015). No entanto, a ausência desse discurso pode comprometer a confiabilidade de uso da mesma já que, de acordo com Chevallard (1999), uma das funções da tecnologia consiste em explicar por que a técnica está correta. Abaixo, apresentamos a síntese da OM em torno do subtipo de tarefa f_{31}.

Quadro 11: Síntese da praxeologia matemática em torno do subtipo de tarefa f_{31} apresentada pela professora

Subtipo de Tarefa	Técnica	Entorno tecnológico-teórico
Dado m elementos distintos, determinar $C_{m,n}$ (número de combinações desses m elementos, tomados n a n, com n elementos distintos, escolhidos entre os m).	(τ_2) Princípio Fundamental da Contagem	Utilização da definição e do conceito de Combinação Simples para *m* elementos, tomados *n* a *n* – Combinatória (θ_{CS}).

Fonte: Autoria Própria.

Avaliando essa OM, podemos inferir que as tarefas são bem identificadas e facilmente encontradas em situações matemáticas, mas sem apresentar a razão de ser das mesmas. As técnicas são apenas esboçadas, mas apresentam um nível de alcance muito abrangente, são de fácil acesso e confiável, sendo capaz de cumprir o tipo de tarefa proposto. Como os elementos do entorno tecnológico-teórico não estão explicitamente claros, nos desobrigamos de submetê-las a essa avaliação.

Considerações Finais

Em relação as OM que emergiram na prática da professora, pudemos perceber o aparecimento dos tipos de tarefas T_1, T_2 e T_3. No que diz respeito aos subtipos de tarefas, as tarefas exploradas durante as aulas foram categorizadas nos subtipos t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{21} e t_{31}. Duas técnicas foram empregadas pela professora na solução dos subtipos de tarefas: Princípio Multiplicativo e Produto fatorial e suas operações básicas, sendo que esta última foi usada apenas na resolução de tarefas do subtipo t_{13}. O entorno tecnológico-teórico nem sempre esteve explicitamente claro. No entanto as utilizações das definições e dos conceitos dos problemas de contagem foram as justificativas mais aplicadas na escolha das técnicas.

Vale ressaltar que as tarefas apresentadas eram pouco problemáticas e, de certo modo, padronizadas, o que poderia facilitar a escolha da técnica e sua justificativa. Isso se tornou muito claro quando observamos o momento do trabalho com a técnica.

No tocante às técnicas utilizadas na resolução dos tipos de tarefas apresentadas pela professora nas aulas observadas, ratificamos a relevância do uso do Princípio Multiplicativo. Além de estar em consonância com as orientações curriculares e metodológicas para o ensino de Combinatória, muitos estudos apontam, como indicados anteriormente, para a importância do trabalho com essa técnica nos problemas de contagem, desprendendo-se do uso abusivo de fórmulas.

Todavia, quando se observa a formação do ambiente tecnológico-teórico, não se explora de forma suficientemente transparente as devidas justificativas e explicações para a escolha das técnicas. A justificativa a partir das distintas disposições que se podem adotar os elementos nos agrupamentos, ou seja, a ideia de ordem e natureza, não foi explorada de forma substancial.

O foco deste estudo esteve direcionado para a análise das OM. As escolhas, tanto matemáticas quanto didáticas, feitas pela professora para o ensino dos problemas de contagem analisados só podem ser melhor entendidas a partir do estudo das OD e do conjunto das condições e restrições institucionais às quais estão submetidas. Isso aponta para a importância de aprofundamento desta investigação em discussões futuras.

No entanto, é preciso considerarmos que, do ponto de vista das OM estudadas na prática docente analisada, o fato das tarefas apresentadas serem, de certa forma, padronizadas e isso facilitar na escolha da técnica, pode remeter ao estudo, segundo Chevallard (1999), em "sentido fraco", de uma questão ou tarefa. O autor complementa que, nesse tipo de situação, a resposta (ou a técnica) é conhecida ou se pode conhecer facilmente. Contrapondo-se a essa ideia, estudar uma questão no "sentido forte" implica na necessidade de se elaborar uma técnica para realizar uma determinada tarefa ou toda uma organização praxeológica que ainda não foi construída.

Dessa maneira, fica também evidente a carência de se haver um maior investimento em termos de formação, tanto inicial quanto continuada, que possa munir professores de recursos de natureza matemático-didática a fim de que possam atuar de forma efetiva e pertinente nos processos de estudo de conteúdos relacionados ao campo da Combinatória tanto para melhor escolherem as questões a serem estudadas e das OM construídas em torno das mesmas, como também dos processos de construção dessas OM.

Referências

ALMEIDA, F. E. L. de. **O contrato didático e as organizações matemáticas e didáticas**: analisando as relações no ensino de equação do segundo grau a uma incógnita. 2016. 305f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional**. 3ª ed. Brasília: Liber Livro Editora, 2008

ASSIS, A. M. R. B; PESSOA, C. A. S. Discutindo combinatória em um processo de formação continuada com professores dos anos iniciais. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v.96, n. 24, p. 666-682, 2015.

BARBOSA DE LIMA, A. P. **Princípio fundamental da contagem**: conhecimentos de professores de matemática sobre seu uso na resolução de situações combinatórias. 2015. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE.

BENÍTEZ, P. R. A; BRAÑAS, J. R. F. **Introducción a la matemática aplicada (matemática discreta)**. Colección Textos Universitarios. Canarias, Litografía A. Romero S, 2001.

BORBA, R. E. S. R. O; ROCHA, C. A.; AZEVEDO, C. Estudos em raciocínios combinatórios: investigações e práticas de ensino na educação básica. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro – SP, v. 29, n. 53, p. 1348-1368, 2015.

BOSCH, M. **Un punto de vista antropológico**: la evolución de los "instrumentos de representación" en la actividad matemática. In: IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva – Espanha. p.15-28, 2000.

CÂMARA DOS SANTOS, M; BESSA DE MENEZES, M. A teoria antropológica do didático: uma releitura sobre a teoria. **Perspectivas da educação matemática**, Mato Grosso do Sul, Volume 8, Número Temático – 2015

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **Conceitos Fundamentais da Didática:** as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: Didáctica das matemáticas / Jean Brun. Trad: Maria José

Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

COSTA, A. P. **As concepções dos professores de matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no ensino fundamental**. 2003. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

COUTINHO, E. G. **Raciocínio combinatório na resolução de problemas nos anos iniciais do ensino fundamental**: um estudo com professores. 2014. 225 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

CUNHA, M. J. G. **Elaboração de problemas combinatórios por professores de matemática do ensino médio**. 2015. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE.

FERREIRA, A. G; ALMEIDA, F. E. L. de. O estudo de Combinatória no ensino médio: uma análise das organizações matemáticas no livro didático. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 21, n. 1, p. 277-299, 2019.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática elementar**, v. 5: Combinatória, probabilidade, 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013.

IEZZI, G. et. al. **Matemática**: ciência e aplicações: ensino médio – volume 2. 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

LIMA, I. B. **Aula de combinatória no ensino médio**: como estão ocorrendo. 2016. 115 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

MARTINS, G. G. **Ensino de Análise Combinatória**: um estudo das representações de professores de matemática do Ensino Médio público de São Mateus. 2018. 149 f. Dissertação (Mestrado em Ensino na Educação Básica) – Universidade Federal do Espírito Santo, São Mateus – ES.

MERAYO, F. **Matemática Discreta**. Madrid: Paraninfo, 2001.

MOREIRA, M. A. **Metodologias de Pesquisa em Ensino**. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

MORGADO**,** ALGUSTO C ; OLIVEIRA. et *al.* **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro : Gráfica Wagner Ltda, 1991.

PINTO, R. C. **Introdução à Análise Combinatória.** 2014. 59 f. Dissertação (Metrado em Pós-graduação em Matemática) – Departamento de Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio. Rio de Janeiro – RJ**.**

RIFO, L. R. F. **Análise Combinatória, Probabilidade, Noções de Estatística**. Campinas, 2017. Disponível em: <<https://www.ime.unicamp.br/~laurarifo/apostila/apostila1.pdf>>

ROCHA, C. R. Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 192 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife – PE.

SABO, R. D. Saberes docentes: a análise combinatória no ensino médio. 2010. 210 f. **Dissertação** (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SANTOS, C. M.; FREITAS, J. L. M. Contribuições da teoria antropológica do didático na formação dos professores de matemática. **Amazônia Revista de Educação em Ciências e Matemática**. v. 13, n. 27, p. 51-66, 2017.

SANTOS, J. P. O. et al. **Introdução à Análise Combinatória**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.

SILVA, M. C.; PESSOA, C. A. S. A combinatória: estado da arte em anais de eventos científicos nacionais e internacionais ocorridos no Brasil de 2009 a 2013. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo – SP, v. 17, n. 4, p. 670-693, 2015.

Recebido em: 27 de fevereiro de 2022
Aprovado em: 27de julho de 2022