



Uma questão de média: reflexões sobre erros dos estudantes

Bruna Larissa Cecco¹
Instituto Federal Farroupilha – IFFar

RESUMO

Este trabalho parte da análise de uma experiência vivenciada pela autora como docente nas disciplinas de Estatística Aplicada e Bioestatística, a partir da correção de uma avaliação aplicada no segundo semestre de 2019, em cursos superiores de uma instituição federal. O estudo de abordagem qualitativa tem como objetivo apresentar uma reflexão sobre estratégias que auxiliem os estudantes na compreensão de média aritmética ponderada e os professores na abordagem desse conceito ou de outros conteúdos em momentos futuros, a partir da análise de erros (CURY, 2017). Dessa forma, utilizando-se da análise de conteúdo, as resoluções feitas pelos estudantes foram sistematizadas em seis categorias emergentes, exemplificadas e organizadas a partir do entendimento da pesquisadora sobre a compreensão e conceitos por eles utilizados. Os resultados evidenciam as dificuldades com o conceito de média e apontam para o papel da análise de erros como uma metodologia de ensino e de pesquisa a ser incorporada pelos professores de matemática. O trabalho também destaca a necessidade de observar a especificidade de cada estudante e as singularidades existentes no processo de ensino aprendizagem, qualificando a prática docente.

Palavras-chave: Análise de Erros; Estatística; Conceito de média; Metodologia de ensino de matemática.

A question of mean: student error reflections

ABSTRACT

This work starts from the analysis of an experience lived by the author as a teacher in the disciplines of Applied Statistics and Biostatistics, from the correction of an assessment applied in the second semester of 2019, in higher education courses at a federal institution. The qualitative approach study aims to present a reflection on strategies that assist students in understand weighted arithmetic mean and teachers to approach this concept or other content in future moments, based on error analysis (CURY, 2017). Thus, using content analysis, the resolutions made by the students were systematized into six emerging categories, exemplified, and organized based on the researcher's understanding of the comprehension and concepts used by them. The results show the difficulties with the concept of average and point to the role of error analysis as a teaching and research methodology to be incorporated by mathematics teachers. The work also highlights the need to observe the specificity of each student and the existing singularities in the teaching-learning process, qualifying the teaching practice.

Keywords: Error Analysis; Statistic; Mean concept; Mathematics teaching methodology.

Submetido em: 21/02/2022

Aceito em: 23/04/2023

Publicado em: 12/09/2023

¹ Mestra em Educação pela Universidade Comunitária da Região de Chapecó (UNOCHAPECÓ) e Doutoranda em Educação pela Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI/Frederico Westphalen). Professora do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico da área de Educação Matemática no Instituto Federal Farroupilha (IFFar), Frederico Westphalen, Rio Grande do Sul, Brasil. Endereço para correspondência: Linha 7 de setembro, s/n, BR 386 - KM 40, Cx. Postal: 169, Fone: (55) 3744-8900, Frederico Westphalen, RS, Brasil, CEP: 98400-000. ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3616-8898>. E-mail: bruna.cecco@gmail.com.

Una cuestión de medio: reflejos de errores del estudiante

RESUMEN

Este trabajo parte del análisis de una experiencia vivida por el autora como docente en las disciplinas de Estadística Aplicada y Bioestadística, a partir de la corrección de una evaluación aplicada en el segundo semestre de 2019, en cursos de educación superior en una institución federal. El estudio de enfoque cualitativo pretende presentar una reflexión sobre estrategias que ayuden a los estudiantes a comprender la media aritmética ponderada y a los docentes a abordar este concepto u otros contenidos en momentos futuros, a partir del análisis de errores (CURY, 2017). Así, mediante el análisis de contenido, las resoluciones realizadas por los estudiantes fueron sistematizadas en seis categorías emergentes, ejemplificadas y organizadas a partir de la comprensión del investigador sobre la comprensión y los conceptos utilizados por ellos. Los resultados muestran las dificultades con el concepto de promedio y apuntan al papel del análisis de errores como metodología de enseñanza e investigación a ser incorporada por los profesores de matemáticas. El trabajo también destaca la necesidad de observar la especificidad de cada estudiante y las singularidades existentes en los procesos de enseñanza e aprendizaje, cualificando la práctica docente.

Palabras clave: Análisis de errores; Estadística; Concepto médio; Metodología de la enseñanza de las matemáticas.

INTRODUÇÃO

A matemática, de longa data, é considerada como uma disciplina difícil, por vezes indicada como a responsável pelo desinteresse nos estudos e pelo fracasso de muitos estudantes. Dessa forma, as discussões sobre metodologias para o ensino de matemática têm se intensificado com o intuito de buscar alternativas para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem, potencializando o engajamento dos estudantes.

É importante enfatizar que os desafios que permeiam os momentos de ensinar e aprender matemática estão presentes tanto na educação básica, quanto na superior. Seja por falta de compreensão de conceitos simples ou complexos, por dificuldade de interpretação ou de raciocínio lógico, entre outros motivos, torna-se um desafio ensinar matemática, sobretudo se tomadas em conta às particularidades de cada estudante inserido numa determinada sala de aula, envolto por um contexto social, histórico e cultural.

Dessa forma, o presente estudo toma como ponto de partida o ensino de estatística, atentando para as questões matemáticas que se desenvolvem a partir desta ciência “que fornece métodos para a coleta, organização, descrição, análise e interpretação de dados e para a utilização dos mesmos na tomada de decisões” (CRESPO, 2009, p. 3). O trabalho parte da análise de uma atividade desenvolvida pela autora, mais especificamente, a partir da (não) resolução de uma questão que envolvia o conceito de média aritmética ponderada. A questão (com poucas alterações) fez parte das avaliações da disciplina de Estatística Aplicada, ministrada nos cursos de Zootecnia e Tecnologia em Grãos, e de Bioestatística, no

curso de Licenciatura em Ciências Biológicas, do Instituto Federal Farroupilha², *campus* Alegrete, no segundo semestre de 2019.

Na primeira avaliação das disciplinas, foram contemplados os conteúdos de estatística básica, incluindo a coleta de dados, organização tabular e gráfica e as medidas de posição. A questão aqui em análise consistia em determinar a nota obtida por um estudante, dada a média final e o peso de cada uma das avaliações, conforme exposto a seguir:

Durante o ano letivo, um professor de matemática aplicou cinco provas para seus alunos. A tabela apresenta as notas obtidas por um determinado aluno em quatro das cinco provas realizadas e os pesos estabelecidos pelo professor para cada prova.

Prova	I	II	III	IV	V
Nota	6,5	7,3	7,5	?	6,2
Peso	1	2	3	2	2

Se o aluno foi aprovado com média final igual a 6,8, calculada entre as cinco provas, qual a nota obtida por esse aluno na prova IV?

Como a questão foi abordada em diferentes cursos, ela sofreu adaptações e teve os valores da média final alterados para 6,4 e 7,3, modificando, assim, o valor da nota IV. A questão foi escolhida por tratar da média aritmética ponderada, conteúdo previsto nos componentes curriculares e, principalmente, por retratar uma situação que semestralmente é vivenciada pelos próprios estudantes, visto que a nota mínima para aprovação na instituição que frequentam é 7,0. E, caso o estudante não atinja a média 7,0, ele tem direito ao exame final, sendo que a nota para aprovação após essa avaliação é 5,0, considerando o peso 6,0 para a nota obtida antes do exame e peso 4,0 para a nota da prova do exame final (BRASIL, 2010). Além disso, muitos dos componentes curriculares organizam suas notas com base na média aritmética ponderada de diferentes tipos de avaliação.

Após a realização da prova e a correção, a resolução da questão deixou a professora bastante surpresa, pois ela considerava que seria respondida facilmente pelos estudantes. Ao contrário, a correção trouxe um desconforto diante da falta de compreensão dos estudantes sobre o conceito da média aritmética ponderada e, também, da diferenciação entre média

² Importante enfatizar que as disciplinas traziam ementas diferentes, porém todas englobavam conceitos básicos de estatística, incluindo a organização e apresentação em gráficos e tabelas, distribuição de frequência, medidas de posição e de dispersão.

aritmética simples e ponderada³. Mais do que simplesmente classificar as respostas como corretas ou incorretas, houve o anseio em compreender a forma de resolução utilizada pelos estudantes e o entendimento sobre o conceito de média aritmética ponderada, bem como a interpretação dada. Uma das formas encontradas foi analisar individualmente as provas, identificando, sobretudo os erros, organizando-as em categorias.

Considerando a análise desses dados, este trabalho tem como objetivo apresentar uma reflexão sobre estratégias que auxiliem os estudantes na compreensão e os professores nas técnicas de abordagem desse conteúdo ou de outros, através da análise das dificuldades diagnosticadas nesse grupo de estudantes. Nesse sentido, compreende-se a importância de considerar os erros dos estudantes como ponto de partida para pensar em estratégias para a revisão e a retomada do conceito de média aritmética ponderada, permitindo a efetiva compreensão desse conceito.

O texto está organizado com uma explicação sobre o que é e como utilizar a análise de erros como uma metodologia de pesquisa e de ensino. Na sequência, é apresentada metodologia e a categorização das resoluções, com a exemplificação das categorias, uma retomada sobre o emprego da análise de erros como uma possibilidade metodológica a ser adotada na prática e, por último, estão as considerações finais acerca do estudo.

ANÁLISE DE ERROS – UMA METODOLOGIA PARA REFLETIR SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA

Consideramos, na concepção adotada para este trabalho, a utilização do erro como aliado dos processos de ensino e de aprendizagem. Conforme De La Torre (2007), a postura a ser trabalhada pelo professor não é de evitar os erros, nem limpar o caminho de dificuldades, assim como, não pode haver o intuito de provocá-los, mas utilizá-los quando surgem. Da mesma forma, o autor sugere os pontos cardeais ou *as quatro direções semânticas* do erro que pode ter “efeito destrutivo, deturpativo, construtivo e criativo” (DE LA TORRE, 2007, p. 13), dependendo da forma como será tratado.

Neste sentido, Cury (1995) apresenta uma retrospectiva histórica, bem como as perspectivas atuais sobre a análise de erros na Educação Matemática, destacando, sobretudo, a influência do behaviorismo e do construtivismo. A autora aponta a ideia de Borasi, ao

³ Crespo (2009, p. 76) define a utilização da média aritmética simples quando desejamos obter a média dos dados não agrupados e a média aritmética ponderada quando há fatores de ponderação que indicam a “intensidade de cada valor da variável”.

considerar o erro como um instrumento didático, sintetizando que as pesquisas sobre análise de erros podem ser agrupadas em dois objetivos principais: “a superação do erro através de sua eliminação ou através da exploração de suas potencialidades” (CURY, 1995, p. 48).

Assim, a proposta que defendemos é a de pensar no erro e, mais especificamente, na resolução das questões explorando o erro, buscando compreender os equívocos e dificuldades dos estudantes. Nos processos de ensino e aprendizagem, a preocupação do professor com a aprendizagem dos estudantes é constante, porém, muitas vezes, apenas no momento de uma avaliação é que se revela de fato o que foi aprendido ou não, cabendo ao professor analisar as dificuldades evidenciadas e retomá-las.

Cury (2017) defende que são diversas as situações em que os erros podem ser usados como estratégia de ensino. A autora sugere três momentos em que se pode aproveitar as respostas dos alunos para se trabalhar a metodologia de análise de erros, podendo ser: i) a partir de “uma resposta incorreta dada por um aluno ao ser questionado em aula” (CURY, 2017, p. 82) e, nesse caso é necessário verificar se mais estudantes têm a mesma dificuldade e, inclusive, pensar em uma nova estratégia, sugerindo novos dados para o problema; ii) “quando há trabalhos escritos e se pode planejar, com base em um erro, uma atividade de exploração, a ser desenvolvida pelos próprios alunos ou por estudantes de nível superior” (CURY, 2017, p. 84); iii) trabalhar com “aquelas atividades que exploram os conteúdos nos quais os alunos têm maiores dificuldades de aprendizagem ou com os quais desenvolvem habilidades matemáticas, de maneira geral” (CURY, 2017, p. 87).

Nessa lógica, a partir da correção das avaliações que foi percebida a dificuldade em torno do conceito de média aritmética ponderada, mais especificamente, a partir da falta de respostas de uma questão que exigia interpretação, compreensão do conceito abordado e o uso de cálculos. Cury (2017, p. 65) afirma que, ao fazer a análise das respostas dos alunos, o importante não é a resposta estar certa ou errada, “mas [o professor observar] as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem”. Esse ponto é crucial ao fazer a análise das respostas dadas pelos estudantes na experiência aqui em foco, e foi o sentimento que emergiu na correção das provas: era necessário investigar o porquê daquelas respostas, qual compreensão sobre aquele determinado conteúdo o estudante havia adquirido.

Destarte, “ao procurar entender as formas como o aluno produziu a resposta, certa ou errada, o trabalho pode contribuir para a construção de novos patamares de conhecimento”

(CURY, 2017, p. 65). Além de uma simples contagem do número de erros ou acertos, esse tipo de prática pode nos indicar a compreensão dos estudantes sobre o conteúdo abordado e a forma de resolução, raciocínio utilizado. Ainda, pode possibilitar uma investigação, um aprofundamento na análise da forma como o estudante realizou sua atividade, aliás:

[...] quando um erro é usado como fonte de novas descobertas, está sendo considerada a possibilidade de que este erro se transforme em um problema para que os alunos (e o professor) se debruçam sobre ele e tentem inventar soluções que promovam o aprendizado. (CURY, 2017, p. 81-82).

A utilização do erro como um recurso nos processos de ensino e de aprendizagem pelo professor e pelos estudantes já foi enfatizada por De La Torre (2007). O autor também destaca que o erro é um conceito-chave, “como o das tarefas escolares, que pode ser a alavanca para a mudança. Não se trata de inventá-lo, mas de conceitualizá-lo novamente. [...] Precisamos apenas ter consciência de seu valor positivo como instrumento inovador” (DE LA TORRE, 2007, p. 27).

Com esse intuito é que foi feita a análise das resoluções da questão sobre média aritmética ponderada, entendendo que “o erro é fonte de saberes, é um saber, enquistado, resistente, apontando para algum problema que exige atenção” (CURY, 2017, p. 95) e que não foi diagnosticado na etapa anterior à avaliação. Destacamos a necessidade e importância de considerar os erros como possibilidade de aprendizagem, tanto para os estudantes quanto para o professor, já que “o erro é uma variável concomitante ao processo educativo, porque não é possível avançar em um longo e desconhecido caminho sem se equivocar.” (DE LA TORRE, 2007, p. 27).

METODOLOGIA

Inicialmente, a questão foco deste trabalho foi corrigida sem despertar um olhar mais atento. Porém, após a correção de algumas provas, percebeu-se que a mesma não tinha sido respondida por muitos estudantes e, além disso, várias resoluções apresentavam problemas ao utilizar conceitos de média aritmética simples. Então, diante desse fato, foi dedicada uma atenção maior por parte da docente na análise das resoluções feitas pelos estudantes nessa questão.

Assim, este estudo caracteriza-se como de abordagem qualitativa, que conforme Minayo (2013, p. 21) “trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das

aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes”. Desta forma, a pesquisa constituiu-se partir da análise das questões resolvidas ou não pelos estudantes das três turmas do Instituto Federal Farroupilha *campus* Alegrete. As resoluções foram categorizadas utilizando-se a análise de conteúdo, técnica que se volta para a descrição objetiva, sistemática e quantitativa do conteúdo que é manifestado na comunicação (GOMES, 2013), no caso a resolução das questões.

Considerando as três turmas, de um total de 83 avaliações respondidas pelos estudantes, a questão proposta não foi resolvida por 21 deles, ou seja, 25% sequer tentaram resolver a questão; 38 estudantes, ou 46% deles, colocaram um valor qualquer como resposta, sem nenhuma tentativa de resolução; e 24 estudantes apresentaram uma resolução para a questão.

Na análise da questão, a perspectiva utilizada inicialmente foi a conferência das respostas a partir do gabarito e, posteriormente, as categorias foram emergindo com base nas soluções propostas pelos estudantes. Dessa forma, optou-se por seguir a perspectiva da análise de conteúdo, por meio da qual “Bardin (1979) assinala três etapas básicas [...], que podem ser subdivididas de acordo com as necessidades: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados” (CURY, 2017, p. 65).

Nesse caso, inicialmente (pré-análise) as questões foram organizadas a partir de uma primeira leitura, feita com o objetivo de separá-las (as com resposta e as não resolvidas). Na sequência, temos a fase de exploração do material que de acordo com Bardin (2016, p. 131) “não é mais do que a aplicação sistemática das decisões tomadas” na pré-análise, na qual foram exploradas as questões com resolução, verificando quais estavam corretas e quais estavam incorretas, identificando o *corpus* de estudo e criando categorias emergentes.

A partir de 24 resoluções selecionadas, buscou-se analisar as soluções encontradas, de modo a compreender os conceitos matemáticos e estatísticos utilizados pelos estudantes. Essa etapa da pesquisa é permeada por dúvidas e escolhas que são realizadas pelo pesquisador a partir do seu entendimento e a partir das relações existentes entre as soluções propostas, “compreendendo o que têm em comum e como podem ser reagrupadas, formando, então, as categorias”. (CURY, 2017, p. 66).

Silva e Fossá (2015, p. 3) relembram a cautela que deve envolver a análise do conteúdo:

Quanto a interpretação, a análise de conteúdo transita entre dois polos: o rigor da objetividade e a fecundidade da subjetividade. É uma técnica refinada, que exige do pesquisador, disciplina, dedicação, paciência e tempo. Faz-se necessário também, certo grau de intuição, imaginação e criatividade, sobretudo na definição das categorias de análise.

Com esse panorama, das 24 resoluções que constituem o *corpus* de análise deste trabalho, seis apresentaram a resolução correta e 18 apresentaram equívocos. Essas respostas foram organizadas em seis categorias, considerando a interpretação e compreensão dos conceitos utilizados pelos estudantes no desenvolvimento da questão proposta, como pode ser observado no Quadro 1:

Quadro 1 – Categorias emergentes da análise das resoluções

Categorias	Modo de resolução	Quantidade de questões
Categoria 1	Resolução com o uso correto da fórmula	2
	Resolução correta sem o uso explícito da fórmula	4
Categoria 2	Resolução usando o conceito de média aritmética simples	10
Categoria 3	Resolução usando o conceito de média aritmética simples de forma errada	3
Categoria 4	Resolução usando o conceito de média aritmética ponderada de forma errada	1
Categoria 5	Uso das fórmulas de modo equivocado, trocando o somatório dos pesos pela média	2
Categoria 6	Incompreensível	2
	TOTAL	24

Fonte: Elaborado pela autora.

Para exemplificar a classificação das categorias emergentes, na sequência são apresentadas uma ou mais resoluções dos estudantes por categoria, evidenciando a interpretação, o raciocínio e o conceito por eles utilizados.

ANALISANDO AS RESPOSTAS DOS ESTUDANTES

Na Categoria 1, formada por seis resoluções corretas, duas delas utilizaram a fórmula $\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$ apresentada em sala para o cálculo da média aritmética ponderada, já que “como as frequências são números indicadores da intensidade de cada valor da variável, elas funcionam como fatores de ponderação” (CRESPO, 2009, p. 76). Assim, a média aritmética

ponderada é calculada multiplicando-se cada valor do conjunto de dados pelo seu fator de ponderação (peso), dividido pela soma dos fatores de ponderação⁴.

As outras quatro resoluções desenvolvidas pelos estudantes usaram os conceitos da média aritmética ponderada, considerando os pesos de cada uma das notas e o total da soma dos pesos 10 ou 1, ou seja, a média aritmética ponderada foi utilizada corretamente ao calcular o valor da nota e seu respectivo peso.

Figura 1⁵ - Exemplo de resolução da Categoria 1

Fonte: *Corpus* de análise.

Na Figura 1, observa-se que o estudante calculou o valor de cada uma das notas e seu respectivo fator de ponderação (usa como peso total 1), determinando, assim, a média ponderada 5,6 das quatro notas conhecidas. Como a média final do aluno é 7,3, ele subtraiu o resultado da média final do resultado da média das quatro notas conhecidas, fazendo a divisão pelo respectivo peso (0,2) da nota (IV) faltante, e encontrando o valor 8,5 que representa a nota IV com peso 2.

Figura 2 - Exemplo de resolução da Categoria 1

Fonte: *Corpus* de análise.

⁴ Importante enfatizar que o somatório foi trabalhado em todas as disciplinas, apontando sua representação e o significado como a soma dos fatores de ponderação (pesos).

⁵ Apesar de algumas resoluções não estarem tão claras, optamos por manter as figuras, considerando que é importante para a análise ver a forma de organização feita pelo estudante.

A resolução da Figura 2 mostra que o estudante também pensou de forma muito parecida ao anterior. Porém, para determinar qual a nota faltante (que tem peso 2), o mesmo utilizou uma proporção, considerando que, se a nota 1,7 corresponde ao peso 2, então 8,5 é a nota proporcional ao peso 10.

De qualquer forma, é importante identificar que ambos os estudantes utilizam o conceito de forma similar e conseguiram compreender o conceito da média ponderada sem a necessidade em utilizar a fórmula apresentada.

Uma segunda categoria que apareceu no decorrer da análise foi das resoluções em que não houve a compreensão do conceito da média aritmética ponderada. Nesse grupo, estão os 10 estudantes que resolveram a questão desconsiderando o peso de cada nota. Eles apenas consideraram que foram cinco notas no decorrer da disciplina e que todas teriam o mesmo fator de ponderação, trabalhando com o conceito de média aritmética simples.

Nas resoluções, mesmo que equivocadas, observamos a diversidade de ideias e de escritas que os estudantes propuseram na construção de uma resposta, alguns de forma mais direta, outros nem tanto. Na questão proposta para média final de 6,4, a resolução apresentada na Figura 3 mostra o pensamento do estudante de forma bem organizada e que estaria correta se a nota fosse calculada a partir de uma média aritmética simples. O estudante realizou a soma das notas e determinou que, se a média final é de 6,4, então o total da soma das notas deveria ser 32,0. Com uma subtração, indicou ser 4,5 a nota “faltante”.

Figura 3 - Exemplo de resolução da Categoria 2

Handwritten work showing the calculation of the missing grade. On the left, $6,4$ is multiplied by 5 to get $32,0$. On the right, the sum of other grades is calculated: $6,5 + 7,3 + 7,5 + 6,2 = 27,5$. Below this, 211 and $32,0$ are written, followed by a subtraction: $32,0 - 27,5 = 04,5$. A blue note says: "A nota obtida foi 4,5."

Fonte: *Corpus* de análise.

É preciso lembrar que a média aritmética de dados não agrupados, ou seja, a média aritmética simples “é o quociente da divisão da soma dos valores da variável pelo número deles” (CRESPO, 2009, p. 73). A Figura 4 apresenta uma estratégia de resolução muito similar à anterior, porém percebemos que o processo cognitivo desse estudante foi diferente.

Ele não usou a operação de “subtração” de forma tão clara quanto o outro. Analisou quanto faltava para que a soma fosse 32, sendo que esse valor, dividido pelo total de cinco notas, resulta na média final 6,4.

Figura 4 - Exemplo de resolução da Categoria 2

Se o aluno foi aprovado com **média final igual a 6,4**, calculada entre as cinco provas, qual a nota obtida por esse aluno na prova IV? **4,5**

$$\bar{x} = \boxed{6,4}$$

$$\bar{x} = \frac{6,2 + 6,5 + 7,3 + 7,5 + \boxed{4,5}}{5} = 32$$

$$\frac{32}{5} = 6,4 - \bar{x}$$

Fonte: *Corpus de análise.*

Também é notável a organização do pensamento do estudante e como a linguagem matemática, presente nas resoluções, apresenta-se de forma “desconexa” de um pensamento lógico e organizado como foi apresentado em sala de aula. No caso da Figura 4, se a média é 6,4, representada corretamente por $\bar{x} = 6,4$, é um equívoco escrever que $\frac{32}{5} = 6,4 - \bar{x}$, pois matematicamente tem-se que $\frac{32}{5} = 6,4 - 6,4 = 0$.

Nesse processo, percebemos que o estudante tem um pensamento lógico e correto, porém tem dificuldades ao colocar no papel suas ideias, podendo-se até mesmo afirmar que há um “erro de escrita” e explorar qual o significado da “igualdade”.

Figura 5 - Exemplo de resolução da Categoria 2

<p>6,5 foi a nota obtida</p> <p>média \times n =</p> <p>$6,8 \times 5 = 34$</p> <p>$6,5 + 7,3 + 7,5 + 6,2 = 27,5 - 34 =$</p> <p>$\underline{\underline{6,5}}$</p>	<p>6,5 → RESPOSTA</p> <p>SOMA DAS 4 NOTAS</p> <p>$27,5 + 6,5 = 34$</p> <p>\downarrow</p> <p>5ª NOTA</p> <p>$\frac{34}{5} = 6,8$</p> <p>\downarrow</p> <p><u>MÉDIA</u></p>
---	--

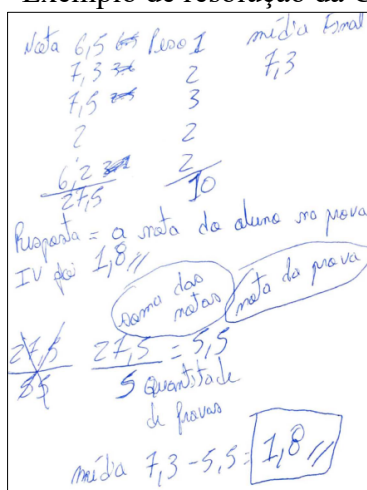
Fonte: *Corpus de análise.*

No geral, as questões classificadas nesta categoria (2) foram desenvolvidas com um pensamento muito similar, o de “encontrar” a nota pelo produto da média final e as cinco notas, subtraindo do total obtido dos valores das avaliações conhecidas. A Figura 5 apresenta

duas resoluções que também utilizaram o conceito de média aritmética simples. A diferença é que o enunciado da questão falava em uma média final igual a 6,8.

Numa terceira categoria, três estudantes seguiram o mesmo pensamento para resolver a questão proposta. A estratégia utilizada, também semelhante à anterior, usou a média aritmética simples, porém, de forma equivocada. Como se observa na Figura 6, os estudantes somaram as quatro notas conhecidas e, posteriormente, dividiram essa soma por cinco notas, chegando à conclusão de que a média das notas seria 5,5, logo após subtraindo da média final dada (7,3), concluindo que a nota do aluno na prova IV seria 1,8.

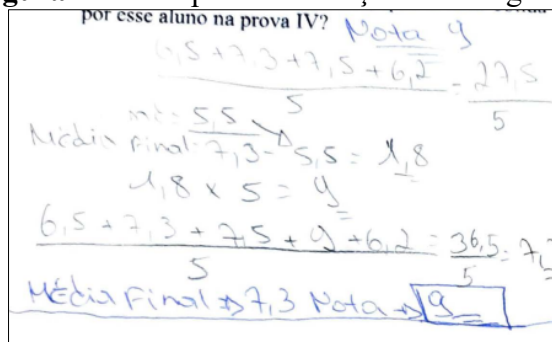
Figura 6 - Exemplo de resolução da Categoria 3



Fonte: Corpus de análise.

Um dos três estudantes, além de chegar ao resultado de 1,8, usando a mesma ideia, no final considerou multiplicar 1,8 por 5, entendendo ser necessário realizar uma proporção para a nota IV, como vemos na Figura 7:

Figura 7 - Exemplo de resolução da Categoria 3



Fonte: Corpus de análise.

Na Categoria 4, com somente uma resolução, apresentada na Figura 8, o estudante utilizou a fórmula da média ponderada para as quatro notas conhecidas e dividiu por 10, ou seja, não considerou a nota faltante e o seu peso, determinando a média de forma errônea para somente quatro notas.

Figura 8 - Exemplo de resolução da Categoria 4

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{6,5 \cdot 1 + 7,8 \cdot 2 + 7,5 \cdot 3 + 6,2 \cdot 2}{1 + 2 + 3 + 2}$$

$$\bar{x} = \frac{65 + 14,6 + 22,5 + 12,4}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{114,5}{10}$$

$$\bar{x} = 11,45$$

$$\bar{x} = 5,6$$

Fonte: *Corpus de análise.*

Na Categoria 5, com duas resoluções, temos a utilização incorreta da fórmula da média aritmética simples e da ponderada, sendo que os estudantes fizeram a divisão pela média dada na questão. Como se pode observar na Figura 9, foram multiplicadas as notas dadas pelos respectivos pesos. Ao final, foi realizada a soma, dividida pela média final, encontrando-se como nota faltante 8,7. Perceba que o estudante utilizou o conceito da média ponderada, mas de forma equivocada!

Figura 9 - Exemplo de resolução da Categoria 5

$$6,5 \cdot 1 + 7,8 \cdot 2 + 7,5 \cdot 3 + 6,2 \cdot 2 = 114,5$$

$$\frac{114,5}{6,4} = 17,89$$

A nota que esse aluno tirou no Bura IV foi 8,7

a) Qual é

Fonte: *Corpus de análise.*

Na Figura 10, apesar de se tratar de um erro mais “grave”, o estudante também pensou de forma análoga, porém, não considerou os pesos de cada uma das notas, realizando apenas a soma das quatro notas conhecidas e fazendo a divisão pela média dada pela questão.

Figura 10 - Exemplo de resolução da Categoria 5

4,5 pois a soma das notas é 27,8. Essa nota dividida pela média final obtida que foi 6,8, a nota da prova IV é 4,5.

$$6,5 + 7,3 + 7,5 + 6,2 = \frac{27,8}{6,8} = 4,5$$

Fonte: *Corpus* de análise.

Em ambos os casos (figuras 9 e 10), os estudantes propuseram a resolução usando as fórmulas de forma equivocada, trocando o somatório dos pesos pela média. Um fator que chama a atenção é que em nenhum momento os estudantes escrevem a fórmula, o que talvez seja um determinante para o equívoco, ao trocar os símbolos (representação) do somatório (Σ) com o da média (\bar{x}). Outro fator interessante é que, na resolução da Figura 10, o estudante justificou o seu raciocínio de forma escrita, além do uso do cálculo.

Na sexta categoria, apresentam-se duas resoluções em que não foi possível compreender o raciocínio utilizado pelos estudantes. Muito provável que haja uma mistura de conceitos tanto da média aritmética simples quanto da ponderada, o que não permite ter certeza sobre a interpretação e o cálculo realizados.

Figura 11 - Exemplo de resolução da Categoria 6

6,5	— 1	6,5
7,3	— 2	14,6
7,5	— 3	22,5
?	— 2	?
6,2	— 2	12,4
		<u>36,76</u>

$36,76 \div 100 = 36,76 \cdot 2 = 3,35$

Fonte: *Corpus* de análise.

Na Figura 11, tem-se o exemplo em que o estudante começou a calcular a nota pelo respectivo peso, considerando o total 10. Porém, ao multiplicar 6,2 por 2, “esqueceu” da

vírgula no resultado e, na soma que realizou, não é possível compreender o resultado obtido. Num segundo momento, mesmo com vários equívocos, o estudante dividiu o valor encontrado por 100 e, posteriormente, multiplicou por 2, possivelmente considerando o peso da nota faltante. Esse é um erro em que, particularmente, não é identificável qual o conceito ou momento em que foi cometido um equívoco, ficando difícil saber como sanar essa dificuldade. O erro do “esquecimento da vírgula” é perceptível e conseguimos resolvê-lo, mas observemos que o resultado 16,76 exige um aprofundamento, possivelmente ouvindo qual a interpretação e como foi a resolução desse estudante para chegar ao resultado.

Figura 12 - Exemplo de resolução da Categoria 6

$$\begin{array}{l}
 6,5 \cdot 1 + 7,3 \cdot 2 + 7,5 \cdot 3 + 6,2 \cdot 2 = \\
 \hline
 56 \\
 \hline
 56 \\
 \hline
 56 + 11,2 = 67,2 \\
 \hline
 56 + 5,6 = 61,6
 \end{array}$$

$6,5 + 14,6 + 22,5 + 12,4 = \frac{56}{5} = 11,2$
 $\frac{11,2}{2} = 5,6$
 $62,2 / 10$
 $56 + 11,2 = 67,2$
 $56 + 5,6 = 61,6$

Fonte: *Corpus* de análise.

Na Figura 12, a situação não é muito diferente. Na 1ª linha, o estudante utilizou de forma “mesclada” os conceitos de média aritmética e ponderada, multiplicando as notas conhecidas com seus respectivos pesos e dividindo pelo total de cinco notas (sendo que, na verdade, seriam quatro conhecidas). Na sequência, o estudante dividiu o valor encontrado por 2, possivelmente referente ao peso 2 da nota faltante, obtendo como resposta 5,6. Até esse momento da resolução, apesar dos erros, é possível compreender o raciocínio (equivocado) que o estudante realiza. Porém, a partir daí, não se tem uma “sequência” e muito menos o estudante assinala uma resposta como sendo correta para o exercício.

Esta breve categorização e análise realizada buscou evidenciar a diversidade de formas de resolução (corretas ou não), inclusive os erros que os estudantes utilizam e aplicam, lembrando que, para as três turmas, o conceito de média ponderada foi trabalhado utilizando a mesma fórmula e com uma metodologia muito similar. Inclusive, a Categoria 1, organizada propositalmente com as respostas corretas, seja com o uso da fórmula ou não, indica que a forma de resolver pode ser diferente e que um pensamento lógico e organizado que resulta numa resposta correta mostra o entendimento do estudante em relação ao

conceito/conteúdo trabalhado, desconsiderando o “decorar a fórmula”, algo tão presente nas aulas de matemática.

ANÁLISE DE ERROS COMO UMA POSSIBILIDADE METODOLÓGICA PARA O ENRIQUECIMENTO DA PRÁTICA DOCENTE

A metodologia de análise de erros, defendida neste trabalho, é descrita como uma metodologia de pesquisa e também de ensino (CURY, 2017). Ela oferece subsídios para nossa análise, bem como para pensar em estratégias para o ensino do conceito de média ponderada.

Percebe-se que, a partir da análise das resoluções ou ainda dos erros dos estudantes é que se diagnosticam os principais equívocos ou, ainda, as principais lacunas que ficaram nos processos de ensino e de aprendizagem. No caso específico deste trabalho, destacam-se a confusão entre média aritmética simples e ponderada, o uso incorreto das fórmulas, o significado do somatório ou, ainda, dos próprios fatores de ponderação. Muito além de equívocos de cálculo, capta-se que, no geral, o problema é com relação ao entendimento do conceito e a interpretação da questão, no caso, essenciais para a resolução, o que também fora identificado por Ferreira et al. (2016) ao analisar os erros em estatística num curso de administração, destacando os erros a partir da compreensão do problema, aplicação das fórmulas e a interpretação em relação aos resultados obtidos.

Pontes e Núñez (2019) assinalaram a utilização da multiplicação entre as grandezas ao invés das combinações e a confusão com o uso das médias como erros mais frequentes das questões de probabilidade e estatística do ENEM no período de 2013 a 2016. Além disso, Magina et al. (2010) também identificaram em seu estudo dificuldades e confusões com o uso de média entre crianças, alunos de graduação e inclusive professores primários, sobretudo ao confundir a média como soma de valores.

Os estudos de Mokros e Russell (1995), como também os de Huck (2008) e Estrella (2016), têm mostrado as dificuldades dos estudantes em resolver situações com as medidas de tendência central, especialmente a “média”. Segundo esses autores, a média aritmética é um objeto matemático complexo que se esconde atrás de um algoritmo de cálculo simples, e, muitas vezes, os estudantes colocam a média “no centro do caminho da distribuição”, podendo perder o significado de representatividade que “esse parâmetro implica”. As dificuldades relativas a essa medida da tendência central (média aritmética) são decorrentes do reconhecimento da média como valor “típico” ou “representativo dos dados” e, por isso, é colocada no centro do caminho de distribuição. Ao reconhecerem como valor representativo dos dados, os estudantes interpretam os dados numéricos e conhecem o cálculo da

média sem levar em consideração o contexto (ESTRELLA, 2008, 2016). (PONTES; NÚÑEZ, 2019, p. 100).

Desta forma, outros estudos já vêm sinalizando dificuldades e erros com o conceito da média, simples ou ponderada, o que indica a necessidade de uma atenção ao se trabalhar com médias, incluindo tanto a fórmula e aplicação da mesma, bem como, a importância em interpretar a questão e pensar acerca do resultado alcançado.

De La Torre pergunta: o que o erro indica ao professor e ao estudante? Segundo o autor, “devemos conceber o erro como um sintoma, e não como um mal [...] os erros na aprendizagem nos informam de estratégias inadequadas, de lacunas no conhecimento, de falhas na compreensão, de lapsos na execução, etc.” (DE LA TORRE, 2007, p. 28).

É nessa perspectiva que o erro precisa ser examinado, principalmente pelo professor, como um indicativo de onde houve a falha e qual a possibilidade de consertá-la na sequência, seja com uma discussão das resoluções da própria avaliação, uma revisão ou uma nova abordagem no próximo conteúdo a ser trabalhado. Enfim, a análise de erros deve ser vista como uma metodologia que proporciona ao professor refletir sobre a sua própria prática através dos erros e dificuldades dos estudantes. Erros que devem ser retomados em algum momento:

Destaco a ideia de que o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, e é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas. (CURY, 2017, p. 82).

A análise de erros fornece pistas de questões que poderiam ser abordadas durante a explicação do conteúdo, pensando na possibilidade de explorar essas resoluções como um instrumento didático em sala de aula, buscando ouvir o estudante e compreender a lógica e a proposição escrita por ele. A complexidade para desconstruir um erro é algo que deve ser considerado pelo professor, considerando toda a trajetória escolar do estudante e as possíveis dificuldades anteriores a este momento.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A escrita deste texto procurou, acima de tudo, elucidar a importância de analisar as resoluções de exercícios e o quanto a escrita matemática é permeada pelo raciocínio dos estudantes. É importante enfatizar que este texto emerge da experiência da correção de uma

prova, a partir de uma questão com um problema bastante presente no cotidiano dos estudantes, mas que faz com que eles pensem de forma diferente do usual⁶.

Foi o grande número de questões sem resposta ou com resposta errada que fizeram a professora investigar o que estava acontecendo. E, nesse processo de investigação e na busca por identificar quais os obstáculos existentes para a resolução correta dos exercícios pelos estudantes que se sentiu a necessidade de categorizar, de organizar quais eram as “formas” de resolução utilizadas.

Como foi enfatizado, foram encontradas respostas corretas com o uso da fórmula estudada para a média ponderada; respostas corretas utilizando o conceito correto, mas sem utilizar a fórmula, especificamente; resoluções feitas a partir do conceito de média aritmética simples; resoluções com os conceitos de média aritmética ou ponderada de forma equivocada; resoluções com troca de significados; e ainda, resoluções em que não conseguimos compreender o tipo de raciocínio utilizado.

Nessas categorias, emergentes a partir da análise de todas as resoluções, provavelmente, caso fossem escolhidos outros critérios, seriam classificadas de formas diferentes. Porém, a principal intenção foi identificar o raciocínio utilizado na construção da resposta. Lembramos, também, que a análise aconteceu a partir de uma avaliação escrita, sendo que há outras formas de identificar e trabalhar com os erros dos estudantes, como apontado por Cury (2017).

Um dos tópicos que chamaram atenção na análise foi a diversidade de formas de pensar apresentadas pelos estudantes, além do quanto isso impacta os processos de ensino e de aprendizagem. Isso porque os conteúdos foram trabalhados pela mesma professora e com a mesma metodologia, salvo algumas particularidades de cada turma, ou seja, de certa forma, o conteúdo foi abordado de maneira similar para todos os estudantes, das três turmas. Porém, pela análise, fica claro o quanto a compreensão de um assunto acontece de forma diferente para cada estudante, seja por motivos cognitivos, pelos conhecimentos prévios, dificuldades, etc.

É fundamental, nos processos de ensino e aprendizagem, observar a especificidade de cada estudante. Essa diversidade enriquece a prática docente e, a partir da análise de erros,

⁶ Quando menciono o termo usual nesse caso, é pensando que na maioria dos casos, obtém-se a média a partir das notas e não como o ocorrido na questão.

da observação de cada uma das resoluções apresentadas por eles aos exercícios propostos, o desenvolvimento profissional do professor se modifica, com base na sua própria prática.

REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. São Paulo: Edições 70, 2016.

BRASIL. Instituto Federal Farroupilha. Pró-Reitoria de Ensino. **Resolução nº 04/2010, de 22 de fevereiro de 2010**. Regulamento da Avaliação do Rendimento Escolar. Santa Maria, 2010.

CRESPO, Antônio A. **Estatística fácil**. 19. ed. atual. São Paulo: Saraiva, 2009.

CURY, Helena Noronha. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em Educação Matemática. **Zetetiké**, Campinas, ano 3, n. 4, p. 39-50, 1995.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. 2. ed. 2 reim. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

DE LA TORRE, S. **Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança**. Porto Alegre: Arte moderna, 2007. Parte I. Disponível em: <https://staticsubmarino.b2w.io/sherlock/books/firstChapter/5957131.pdf>. Acesso em 25 nov. 2020.

FERREIRA, Denise H. L.; JACOBINI, Otávio R.; CAMPOS, Celso R.; WODEWOTZKI, Maria Lúcia L. Reflexões sobre os erros em estatística: um estudo de caso em um curso de administração. **REnCiMa**, v.7, n.2, p. 13-24, 2016. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1091/817>

GOMES, Romeu. Análise e Interpretação de dados de pesquisa qualitativa. *In*: MINAYO, Maria C. de S; GOMES, Suely F. D. (Org). **Pesquisa Social: Teoria, método e criatividade**. 33. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013. p. 79-108.

MAGINA, Sandra; CAZORLA, Irene; GITIRANA, Verônica; GUIMARÃES, Gilda. Concepções e concepções alternativas de média: Um estudo comparativo entre professores e alunos do Ensino Fundamental. **Educar em Revista**, Curitiba, Brasil, n. especial 2, p. 59-72, 2010. Editora UFPR. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602010000500004>

MINAYO, Maria C. de S. O desafio da Pesquisa Social. *In*: MINAYO, Maria C. de S; GOMES, Suely F. D. (Org). **Pesquisa Social: Teoria, método e criatividade**. 33. ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013. p. 9-29.

PONTES; Jailson C.; NÚÑEZ, Isauro B.. Questões de Estatística e Probabilidade nas provas do ENEM: uma aproximação a erros e dificuldades de aprendizagem. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, Brasil, v. 3, n. 7, p. 87-110, jan./abr. 2019. <https://doi.org/10.24116/emd.v3n7a05>

SILVA, Andressa H; FOSSÁ, Maria I. T. Análise de conteúdo: exemplo de aplicação da técnica para análise de dados qualitativos. **Qualitas Revista Eletrônica**, Campina Grande, v. 17. n. 1, 2015.