UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA

UNAD

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

ESCUELA CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ECEDU

Análisis histórico Epistemológico del concepto de la Elipse como objeto matemático

Autor:

Mónica Angulo Cruz

66980759

Pereira, octubre de 2018

UNIVERSIDAD NACIONAL ABIERTA Y A DISTANCIA

UNAD

LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

Análisis histórico Epistemológico del concepto de la Elipse como objeto matemático

Modalidad: Monografía de compilación

Autor:

Mónica Angulo Cruz

66980759

Director 1:

Lic. Jenny Patricia Cárdenas Acevedo

Director 2:

Lic. Diego Fernando Aranda Lozano

Pereira, octubre de 2018

Índice General

Índice de Figuras

Introducción

La presente monografía se realiza con el fin de realizar un análisis histórico epistemológico sobre el concepto de la elipse como objeto matemático. Las cónicas constituyen un conjunto de curvas muy importantes en el estudio de la geometría, entre ellas se encuentra la elipse que se describe como un lugar geométrico de puntos, cuya suma de distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es una cantidad constante; se debe resaltar que aquella constante tiene que ser mayor que la distancia entre los focos.

El término epistemología viene del griego episteme que quiere decir conocimiento y cuando se refiere a logos infiere a el estudio de la teoría. Es por esta razón, que cuando se describe en el presente trabajo que se realizará un análisis histórico epistemológico del concepto de la Elipse como objeto matemático; se refiere al estudio del devenir histórico (logos) del concepto de la elipse (episteme). Resaltando diferentes momentos en la historia donde se realizó un aporte al concepto de la elipse.

En el presente trabajo se encontrará un análisis de los diferentes aportes realizados por Apolonio, Kepler, y Descartes; quienes brindaron en un momento histórico un aporte relacionado con el concepto de la elipse, también se encuentra una descripción de los diferentes movimientos de traslación y rotación en el plano cartesiano y las implicaciones o factores que determinan existan dichos movimientos. No se puede ignorar la existencia de diferentes coordenadas que pueden ser útiles a la hora de analizar los movimientos de la elipse en el plano cartesiano, por un cambio en la variable se puede trazar la gráfica vertical, horizontal o por el contrario media elipse. Todo depende del planteamiento del ejercicio.

Finalmente se analiza la teoría formal sobre la elipse a partir de algunos textos reconocidos, concluyendo con algunas ideas principales.

Justificación

La matemática es "el estudio de las relaciones que forman estructuras a partir de los entes conceptuales de tipo abstractos a los que llamamos números." (Alarcón, 2008, p. 5) Ciencia que ha generado rechazo por algunos estudiantes debido a su dificultad. Es por esta razón de vital importancia que el docente de matemáticas tenga en cuenta el gran compromiso y responsabilidad que tiene en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los educandos; pero este compromiso va de la mano con la creatividad que pueda tener para hacer de sus clases momentos agradables y provechosos para la comprensión del conocimiento. El aula de clase es el mejor espacio para detectar los posibles problemas que se están presentando y para implementar soluciones que den cuenta que puede existir una continuidad en el proceso de enseñanza.

Dentro de las estrategias pedagógicas para la enseñanza de las matemáticas se puede encontrar la implementación de: aprendizaje basado en problemas, uso de las tecnologías informáticas para la comunicación tic, proyectos pedagógicos, entre otros. En el caso particular de la presente monografía se pretende realizar un aporte epistemológico sobre algunos antecedentes históricos sobre el concepto de la elipse y el devenir histórico que ha tenido el concepto para lograr un mejor desarrollo y explicación del tema a sus estudiantes.

Es un compromiso como docente no solo conocer el concepto de algunos términos matemáticos sino también reconocer que siglos atrás ese mismo concepto ha tenido un devenir histórico que amerita tenerlo en cuenta para ser de la clase un espacio de reconocimientos y puesta en común de hechos que marcaron la historia de las matemáticas.

Definición del problema

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es un tema muy cercano para el colectivo docente donde busca permanentemente mejorar las estrategias de enseñanza – aprendizaje para que los estudiantes alcancen los objetivos esperados. Es por esta razón que el presente trabajo se enmarca en el estudio de la geometría analítica, mediante el análisis histórico y epistemológico que ha tenido el concepto de la elipse. Es de anotar que el abordaje de este tema no se observa generalmente por parte de los estudiantes ya que la enseñanza del mismo se puede ver afectada por una situación mecánica y repetitiva donde no causa motivación alguna al estudiante.

Observando esta realidad, se ve la necesidad de investigar una posibilidad de tener en cuenta a la hora de enseñar dicho tema y es mediante el conocimiento por parte del docente sobre aspectos históricos del tema secciones cónicas, específicamente la elipse. Además, como docente es fundamental un dominio histórico y epistemológico del tema a enseñar ya que puede generar motivación para que se genere el proceso de aprendizaje. “El concepto formal es, en sí mismo, lo existente. Puede ser calificado de objeto formal, creado por la mente. Cuando este concepto formal es muy avanzado se pierde – si es que existe- totalmente su conexión con el basamento de experiencia.” (Alarcon, 2008, pág. 5). La idea es que no se pierda el formalismo sino por el contrario continúe una motivación por conocer antecedentes que hicieron de ese concepto formal un gran aporte para las matemáticas.

Por lo anterior, desde el contexto científico el tema que se aborda hace referencia a la exploración, indagación y búsqueda de las fuentes que brindan un acercamiento de lo que son los fundamentos históricos y epistemológicos del concepto de la elipse, reconociendo hechos que marcaron la historia y fueron contundentes para la formalización de dicho concepto.

Objetivos

Objetivo General:

Indagar aspectos relacionados con el devenir histórico Epistemológico del concepto de la Elipse como objeto matemático; mediante una revisión bibliográfica logrando así una contextualización y recorrido histórico sobre el concepto de la Elipse

Objetivos Específicos:

Indagar diferentes reseñas bibliográficas referente al tema de la elipse, reconociendo el avance conceptual a través de la historia.

Explorar los aportes que realizados al concepto de la elipse por grandes matemáticos de la historia como lo son Apolonio, Copérnico, Kepler, Descartes, entre otros.

Reconocer la evolución histórica de la elipse, correspondiente a la ecuación general y la ecuación canónica, reconociendo su estructura y los elementos que la componen.

Marco Teórico

Para lograr un acercamiento sobre el desarrollo histórico-epistemológico del concepto de la elipse como objeto matemático, se tuvo en cuenta tres momentos que marcaron la historia de la humanidad y en ellos se logró encontrar evidencias donde existieron algunos personajes que ayudaron a consolidar dicho objeto matemático. Los tres momentos son:

a. Periodo 1: 190 a.c – 380 a.c
b. Periodo 2: El Renacimiento
c. Periodo 3: La Modernidad

En este primer periodo, se originó durante los años 380 a.J.C. - 190 a.J.C. se pudo conocer los aportes que realizó Apolonio de Perga al concepto de elipse, quien fue él, a propósito, quien le dio este nombre a la elipse. Posteriormente se tendrá en cuenta como segundo momento de la historia el renacimiento que abarca el periodo denominado entre los siglos XV y XVI y finalmente el periodo de la modernidad que inicia en el siglo XVII y termina en el XVIII.

Finalmente se tendrá en cuenta el periodo comprendido como la modernidad, que inicia en el siglo XVII hasta el siglo XVIII y se caracteriza por que se provocan cambios sustanciales a nivel mundial, entre ellos el descubrimiento de América, el renacimiento, la revolución científica, la imprenta, entre otros. En el contexto matemático se puede encontrar los aportes de Rene Descartes, al respecto Ramírez (2017):

> Con el principio que adoptó de dudar y demostrar, es el precursor de una nueva geometría (posteriormente llamada geometría analítica). Gracias a sus trabajos, las representaciones simbólicas de los objetos matemáticos tomaron fuerza sin precedentes, llegando incluso a desplazar otras representaciones que primaban hasta ese momento como la gráfica o el lenguaje natural. (Martinez, 2017, pág. 137)

Es así como en este periodo de la historia surgen varios aportes al concepto de la elipse donde sobresalen Franz Von Schooten, Proclo y Leonardo da Vinci. Los aportes que se realizan en este periodo se refieren al uso de algunos instrumentos que ayudarán a construir la elipse. Mediante este aporte se puede apreciar la precisión y las características de la elipse al realizar su trazo.

Periodo 190 a.c – 380 a.c

Menecmo. (380 a.c.–320 a.c.)

Existen varios autores que han trabajo poco a poco con él tema de las cónicas, brindando elementos donde se ha fortalecido poco a poco el concepto. Es importante realizar una descripción de aquellos personajes y el aporte que realizaron en determinada época, ya que gracias a ellos Apolonio de Perga y otros, llegaron a ciertas conclusiones sobre la elipse.

Se iniciará con los aportes de Menecmo (380 a.c.–320 a.c.) fue discípulo de Platón y Eudoxo, el estudio que realizó de las cónicos fue valioso, no se puede afirmar que fue el primero en investigar sobre las curvas, pero si fue el primero donde se encontraron registros sobre el tema. Por esta razón el estudio que realizó se le atribuye como: “Las curvas de Menecmo”. Fue famoso también porque trato de resolver el problema de la duplicación del cubo haciendo uso de la parábola y de la hipérbola.

El aporte de Menecmo fue el trampolín para seguir explorando sobre el tema de las curvas y profundizar por parte de algunos matemáticos para llegar a conclusiones exactas sobre las cónicas. Como se puede apreciar en Aristeo, Apolonio, Descartes, entre otros.

Aristeo (finales del siglo IV)

Según documentos encontrados, fue Aristeo quien siguió el trabajo de las curvas, específicamente las secciones cónicas, en un trabajo titulado Solid Loci (lugares sólidos) en él se puede observar el interés que tenía Aristeo a este tema que lo llevó a realizar una clasificación de las misma. Al respecto Lugo (2014):

> En ellos se refería a la elipse, la parábola y la hipérbola como sección del cono de ángulo agudo, sección del cono de ángulo recto y sección del cono de ángulo obtuso respectivamente (Pappus,1993, citado en Coolidge, 1968). Heath (1896) y Boyer (1968) señalan que los geómetras griegos realizaron una categorización de las curvas conocidas hasta el momento. El primer grupo, llamado plane loci estaba conformado por las rectas y circunferencias; el segundo grupo, nombrado solid loci comprendia todas las secciones cónicas; y el tercer grupo, llamado linear loci, que comprendía todos los tipos de curvas que no fuesen rectas, circunferencias o secciones cónicas (p. 9).

Es interesante analizar que durante el periodo comprendido antes de Cristo existía un interés por las curvas, tema inicial para poder profundizar en cada una de las cónicas, las curvas son la razón de ser de las cónicas, pues las cónicas son curvas; ellas se encuentran de forma que pueden tener variaciones o por el contrario pueden ser continuas. Estas son las características de la elipse, la parábola y la elipse. Menecmo contribuyó con sus aportes iniciales, dentro de los aportes Guzmán menciona (2017): “La resolución se reduce a hallar la intersección de la curva $x^2 = ay$ *con* $xy = ab$ y es así como aparecen lo que nosotros llamamos parábola e hipérbola equilátera.” (Guzman, 2018). Gracias a estos aportes se fue estructurando información sobre la elipse, hasta ser considerada en su totalidad por sus dos ramas; ya que hasta antes de Apolonio solo era considerada una sola rama de ella.

Apolonio de Perga (262 Perga - 190 A.C Egipto)

Entre los matemáticos más destacados en el periodo helenista se encuentra Euclides, Arquímedes y Apolonio, el trabajo realizado por ellos ha hecho que se denomine este periodo como la edad de Oro de las matemáticas griegas período que abarca desde el 300 a.C. al 200 a.C. Apolonio es una alta representación en el tema de las secciones cónicas como lo dice (Fuller, Geometrìa Analitica, 1988): “El matemático griego Apolonio (262 a.c -200AC) escribió el tratado definitivo Secciones cónicas sobre este tema. Superó los trabajos de los geómetras griegos anteriores y formó la piedra angular del pensamiento acerca del tema por más de mil años” (Fuller, Geometrìa Analitica, 1988, pág. 94). Los aportes de Apolonio han contribuido a fortalecer la geometría, escribió el tratado sobre las cónicas que está compuesto por 8 libros de los cuales se conserva la mitad de sus escritos y la otra mitad se encuentra escrito en árabe. Sobre Apolonio de Perga se puede mencionar lo siguiente Duran (2018):

> Matemático griego. Conocido con el sobrenombre de el Gran Geómetra, sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Acuñó los términos elipse, hipérbola y parábola, que responden a las respectivas propiedades matemáticas de estas tres funciones. También explicó el movimiento de los planetas según la teoría de los epiciclos. (p.23)

Apolonio tenía claridad sobre la teoría de las curvas y por esta razón los primeros cuatro libros que escribió fue una fundamentación elemental de las teorías que ya otros matemáticos habían aportado, lo hizo, pero de una forma organizada, se puede apreciar que posteriormente después en su libro VI, realiza aportes propios. (Moreno, 2018, pág. 23). El resto de sus libros se pueden observar aportes propios de temas como: Igualdad y semejanza de las secciones cónicas, relaciones métricas, diámetros y algunos teoremas; pero el libro más importante del tema de las cónicas fue el libro V.

> La historia cuenta que Apolonio fue el primero en basar la teoría de las tres secciones cónicas en secciones de un mismo cono circular, recto u oblicuo y, posiblemente siguiendo una sugerencia de Arquímedes, fue el primer matemático que introdujo los nombres de elipse, parábola e hipérbola, en conexión con las secciones de un cono cortado por un plano . (Gualdrón, 2013, pág. 13)

En el libro V se describe varias proposiciones donde se explica cómo obtener la curvatura de las cónicas "mediante la determinación del número de normales distintas desde cada punto. Esto equivale a describir sintéticamente las curvas que en el lenguaje de nuestra geometría analítica tendrían por ecuación" (Moreno, 2018), estos aportes han sido cruciales para lograr definir la ecuación general y canónica de la elipse, ya que brinda herramientas y procesos formales para llegar a las conclusiones de la misma. Para Collette (2006) aunque Apolonio fue astrónomo de talento y escribió sobre una gran variedad de temas matemáticos, su fama procede esencialmente de sus secciones cónicas en donde el método utilizado está mucho más próximo a los métodos de la geometría analítica actual que a los puramente geométricos. (p.142)

> Los griegos de la antigüedad ya habían investigado con detalle las curvas obtenidas por intersección de un cono circular recto con un plano. Si el plano forma con el eje del cono un angulo de 90°, es decir, si es perpendicular a él, la sección obtenida es una circunferencia. Es fácil demostrar que si el ángulo es menor de 90°, pero mayor que el ángulo α, resulta una parábola, y si es menor que α, la sección obtenida es una hipérbola. (Alexandrov, Kolmogorov, & Laurentiev, 1973, pág. 9)

Para Apolonio Elipse significa deficiencia, en el sentido que el plano no es paralelo a ninguna de las generatrices del cono al que corta; Newman (1964) se refiere a Apolonio al respecto:

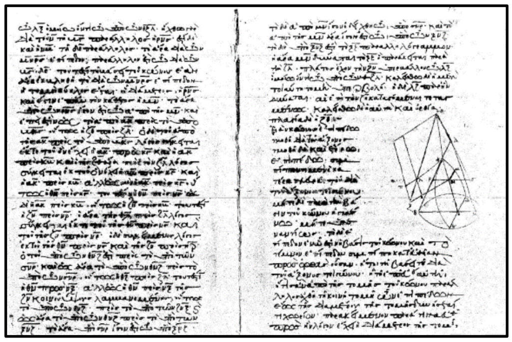
> Si se corta un cono con un plano a través del eje, y si se corta también con otro plano que corte el plano en el cual está la base del cono según una línea recta perpendicular a la base del triángulo axial o a la base formada, el plano que corta formará una sección en la superficie del cono, y las líneas rectas trazadas en él paralelas a la línea recta perpendicular a la base del triángulo axial, encontrarán la sección común del plano que corta y el triángulo axial, y prolongándolas hasta la otra parte de la sección, serán bisecadas por este; si el cono es recto, la línea recta en la base será perpendicular a la sección común del plano que corta y el triángulo axial; pero si es escaleno no será siempre perpendicular, sino sólo cuando el plano a través del eje sea perpendicular a la base del cono (p. 129).

Newman brinda una explicación más profunda de lo que es el concepto de elipse, bajo los parámetros de Apolonio, pero también se puede entender como el conjunto de puntos P en el plano, tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F y F' llamados focos, es igual a una constante 2a. Los elementos de la elipse son: radio focal, vértice, eje mayor, centro, eje menor y lado recto. La obra de las Cónicas de Apolonio fue expuesta por él mismo en el libro I, y le escribe a Eudemo de la siguiente manera, al respecto Díaz (2018):

> Creo que no habrás olvidado, porque ya te lo he contado antes, que fue a instancias de Naucrates el geómetra, que fue mi huésped durante su estancia en Alejandría, por lo que me introduje en este campo y que, cuando él estaba a punto de embarcarse, me apresuré a ponerle al corriente de lo que yo había ya elaborado, en ocho libros, sin poner demasiado cuidado en su perfección, sino anotando todo lo que se me ocurría, con la intención de hacer una ulterior

revisión. Ahora que he tenido la ocasión de establecer las cosas por sus pasos de una manera adecuada, las publico. Y puesto que sucede que algunos de los que han tratado conmigo han recibido los libros primero y segundo antes de que hubiesen sido revisados, no te extrañes de encontrar en ellos cuestiones tratadas de una manera diferente...".(p.3)

Fig. 1: Manuscrito de Apolonio sobre la Cónicas



Fuente: Historias de Matemáticas. Apolonio de Perga.
http://historiasdematematicas.blogspot.com/2017/09/las-conicas-de-apolonio-de-perga.html

Cabe resaltar que cada uno de los aportes que realizó Apolonio sobre las Cónicas nunca se imaginó que algún día brindarían aportes a otras ciencias como son la mecánica celeste, la dinámica terrestre o porque no, la física. En el estudio de la elipse, Apolonio tuvo aspectos que no le daba importancia; uno de ellos fueron los focos, no se refería a ellos de forma explícita sino por el contrario lo hacía de una forma indirecta.

Durante este primer periodo se puede observar como desde el concepto de curva que inicio Menecmo se desglosan una serie de aportes que se fueron fortaleciendo posteriormente con Aristeo, gracias a los antecedentes, Aristeo logró escribir su escrito titulado Solid Loci que quiere decir lugares sólidos y hace referencia a las secciones cónicas, realiza una descripción de la parábola, la hipérbola y la elipse. Más adelante Apolonio de Perga presenta su libro sobre las cónicas y se puede observar avances en el tema, ya que relaciona las tres cónicas en un mismo cono circular, recto u oblicuo y, posiblemente siguiendo una sugerencia de Arquímedes, también en su libro realiza una descripción de varias proposiciones donde se explica cómo obtener la curvatura de las cónicas. Para Apolonio de Perga Elipse significa deficiencia, o sea es una circunferencia defectuosa.

A pesar de los grandes aportes que dejó este Matemático, la humanidad no pensaba que el tema de las cónicas fuera a tener un impacto en las ciencias; solo al pasar de los años; maestros como Galileo, Kepler y Newton se dieron cuentan que podían hacer uso de estos conocimientos para temas como la mecánica celeste o en algunas ramas de la física.

Periodo 2: El Renacimiento

Cuando se hace alusión al periodo del renacimiento se debe resaltar que este periodo se caracteriza por ser de ajustes y cambio en el saber, se dá una reacomodación en las estructuras del saber y los matemáticos inician un proceso de solucionar problemas y brindar aportes a las ciencias. Al respecto Martínez (2017) dice:

> En esta época de renovación del pensamiento, la civilización occidental siguió buscando maneras de solucionar sus problemas y de teorizar y demostrar las teorías emergentes. Es así como científicos de la época dejan de lado sus concepciones teocéntricas y empiezan a buscar las soluciones en la naturaleza, como referente conceptual que luego intentarían imitar mediante máquinas. El mayor desarrollo de estos artilugios se logró mediante la incorporación de la mecánica y los sistemas de máquinas simples al conocimiento de la humanidad; es por esto, que en este siglo es de suma importancia garantizar cualquier conocimiento mediante un instrumento que demostrara de manera exacta el concepto. (p.135)

En esta época afloran nuevas ideas, se dá paso a una zona donde se analiza lo que se ha venido trabajando y se reconoce las ideas pasadas, pero también es importante un renacimiento e innovación de nuevas ideas; y es así como se le da relevancia a nuevos aportes que harán del periodo una caracterización de esplendor en las artes y las ciencias. Algunos de los personajes que brindaron aportes al concepto de la elipse son: Tycho Brahe, Johannes Kepler, Leonardo da Vinci, Rene Descartes, Pierre de Fermat y Pascal.

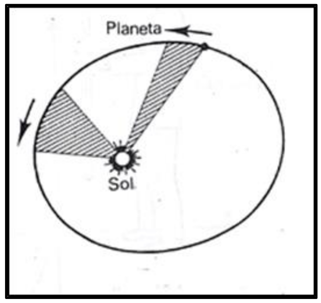
Tycho Brahe y Johannes Keppler

Un personaje que se caracterizó por ser un gran observador de los fenómenos celestes, fue Tycho Brahe un Astrónomo danés (1546-1601) que viajó durante su larga vida y durante sus viajes se caracterizó por realizar observaciones al espacio celeste. En sus apuntes se encuentra el registro detallado de la trayectoria de marte en el domo celeste. Uno de sus grandes colaborares fue Kepler quien al morir Tycho, su esposa le entregó a Kepler los escritos para que continuará con sus investigaciones de los fenómenos celestes. Dentro de las interpretaciones que realizó Kepler a estas anotaciones dice Kolmogorov (1973):

> Estudiando las observaciones hechas durante mucho tiempo por Tycho Brahe sobre el movimiento del planeta Marte, Kepler descubrió que los planetas giran alrededor del Sol en elipses y de modo tal que el Sol ocupa uno de sus focos (el otro foco permanece vacío y no juega ningún papel en el movimiento de los planetas alrededor del Sol) Kepler observó que el radio focal de un planeta dado barre siempre la misma área por unidad de tiempo[1], y Newton demostró que la existencia de un movimiento de este tipo se deduce matemáticamente de la ley de la inercia (proporcionalidad entre la aceleración y la fuerza) y la ley de la gravitación universal (p.242).

[1] Las excentricidades de las órbitas planetarias no son muy grandes, por lo que las órbitas de los planetas son aproximadamente circulares.

Fig. 2:Movimiento del Planeta en forma elíptica



Fuente: (Alexandrov A. K., 1973, p. 243)

Pero no solo Kepler tenía su propia teoría sobre el movimiento de los planetas, entre este periodo de la historia se puede encontrar como a nivel histórico se pudo tener una idea acerca de la forma que tenía los planetas en el sistema solar y que en estas teorías no se puede descartar la forma elíptica. Al respecto en Mankiewicz (2000):

> Para entender la confusión que reinaba en aquel momento hay que tener en cuenta que todavía existían dos ciencias mecánicas: la terrestre y la celeste. Para Kepler, los planetas se movían en orbitas elípticas, conducidas por una misteriosa fuerza magnética que emanaba del sol, con la inercia de los planetas ralentizándolos con respecto a la velocidad de rotación del propio Sol. Para Galileo los planetas se movían en círculos porque dicho movimiento es inherente y perfecto, y la inercia era lo que mantenía en movimiento a los planetas. La escena se hizo aún más confusa cuando Descartes anunció, siguiendo una elaboración del modelo de Kepler, que la inercia hacía que los cuerpos se desplazaran en línea recta, y la trayectoria de los planetas era curva debido a un sistema de vértices en el sistema solar. El trabajo pionero de Galileo sobre la aceleración y la mecánica terrestre parecía no tener nada que ver con la mecánica celeste. No había acuerdo respecto a las definiciones sobre ideas físicas clave como la masa y peso, inercia y

> momentum, fuerza y energía, magnetismo y gravedad. (Mankiewicz, 2000, págs. 95,96).

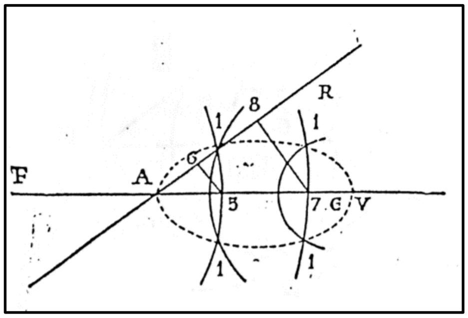
Rene Descartes

Rene Descartes fue crucial para este momento de la historia, gracias a sus aportes se logró consolidar en el plano cartesiano la teoría de las cónicas e involucrar la ecuación de la misma brindándole coordenadas. La geometría de Rene Descartes proporcionó a la humanidad un aporte a la geometría moderna, ya que presenta de una forma detallada y amplia diferentes procedimientos y demostraciones donde vincula el álgebra y la geometría, llegando así a una síntesis de conceptos que favorecieron al estudio de la matemática logrando un avance de esta ciencia.

Es así, como la elipse no fue ignorada por Descartes sino por el contrario brindó aportes sobre: "Explicaciones de cuatro nuevos géneros de óvalos que sirven en la óptica" y entre estos óvalos se encuentra la Elipse. A continuación, en palabras de Descartes:

> Por último, a fin de mostrar que la consideración de las líneas curvas aquí propuestas no carece de aplicación, y que ellas poseen diversas propiedades que no ceden en nada a las de las secciones cónicas, quiero agregar aquí la explicación de ciertos óvalos que son muy útiles para la teoría de la catóptrica y de la dióptrica; he aquí la manera cómo los trazo: Primeramente, habiendo trazado las líneas rectas FA y AP que se cortan en A, sin importar con que ángulos, tomo en una el punto F, arbitrariamente, es decir más o menos alejado del punto A, según que quiera hacer esos óvalos más o menos grandes; y desde este punto F como centro, describo un círculo que pase algo más allá del punto A, sea por el punto 5.

Fig. 3: Elipse para Descartes



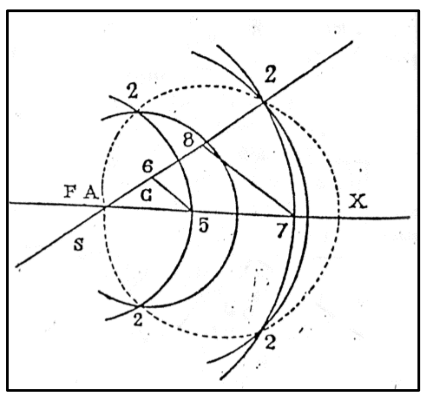
Fuente: (Descartes., 1947, p. 120)

> Luego, de este punto 5 tiro la línea recta *5 6* que corta la otra en el punto *6* de modo que *A 6* sea menor que *A 5* en una proposición dada, según sea la que mide las refracciones, si se quiere aplicar a la dióptrica. Después de eso, tomo el punto *G* en la línea *FA* del lado, tengan entre sí la proporción que se quiera. Luego hago *RA* igual a *GA* en la línea *A6* y con el centro *G* describiendo un círculo cuyo radio sea igual a *R6*, cortará al otro círculo de un lado y otro en el punto *1* que es uno de aquellos por donde debe pasar el primero de los óvalos buscados. Luego, análogamente, con centro *F*, describo un círculo que pase más acá o más allá del punto *5*, sea por el punto *7* y trazando la línea recta *7 8* paralela a *5 6*, del centro *G* describo otro circulo cuyo radio sea igual a la línea que *R B* y este círculo corta al que pasa por el punto *7*, en el punto *1* que es otro del mismo óvalo. Y así se pueden encontrar tantos otros como se quieran, trazando otras líneas paralelas a *7 8* y otros círculos de centros *F* y *G*. (Descartes, 1947, pág. 125).

Se puede apreciar que mediante las diferentes descripciones que hace Descartes para construir la elipse son fundamentales cada uno de sus elementos, proporcionando una armonía en cada una de sus curvas y coherencia entre la medida de sus trazos. Es así como Descartes explica (1947):

Aunque estos óvalos parezcan ser casi de la misma naturaleza, ellos son sin embargo de 4 géneros diversos, cada uno de los cuales contiene en sí una infinidad de otros géneros que a su vez comprenden tantas diversas especies como tiene el género de las elipses o el de las hipérbolas; según que las diferentes proporciones que haya entre las líneas *A5*, *A6* o semejantes, el género subalterno de estos óvalos será diferente. Luego, según que la proporción que hay entre las líneas *AF* y *AG* o *AH* se cambie, los óvalos de cada género subalterno cambian las especies. Y según que *AG* o AH sea más o menos grande, ellos son diferentes en tamaño. Y si las líneas *A5* y *A6* son iguales en lugar de los óvalos del primer género o del tercero, no se describen más que líneas rectas; pero en lugar de los del segundo se tienen todas las hipérbolas posibles, y en lugar de los del último, todas las elipses (p.125).

Fig. 4: Explicación de cuatro nuevos géneros de óvalos que sirven en la óptica



Fuente: (Descartes., 1947, p. 121)

El periodo del renacimiento comprendido entre los siglos XV y XVI fue un trampolín para el conocimiento de las matemáticas, ya que fue un periodo de ajustes y cambios en el saber propio. Este periodo se caracterizó por una renovación del pensamiento; la civilización occidental le inquietaba algunas formas por resolver problemas y encontrar soluciones propias, fue así como lo manual, lo práctico tuvo mayor relevancia en este periodo para encontrar soluciones al saber de la matemática. Al respecto Ramírez (2013) dice:

> El mayor desarrollo de estos artilugios se logró mediante la incorporación de la mecánica y los sistemas de máquinas simples al conocimiento de la humanidad; es por esto, que en este siglo es de suma importancia garantizar cualquier conocimiento mediante un instrumento que demostrara de manera exacta el concepto. (p.135)

En cuanto a la ecuación de la elipse, Descartes tiene en cuenta los aportes de los anteriores matemáticos para fortalecer el desarrollo de la misma e involucrar lo que es la geometría con el álgebra; obteniendo así la ecuación canónica de la elipse. No se puede dejar de mencionar que más adelante Ramanujan propuso una ecuación más simple: “que se aproximara zonablemente a la longitud de la elipse, pero en grado menor que la obtenida mediante integrales elípticas. Hace uso del semieje mayor´ y el semieje menor. Ecuación de la longitud de una elipse” (Historia de la Elipse, 2018). La ecuación es la siguiente:

$$P \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right]$$

A continuación, se realiza una descripción y análisis de la ecuación canónica de la elipse: Tomemos en el plano un punto arbitrario M y designemos sus coordenadas por x e y. Designemos por r_1 y r_2 las distancias del punto M a los focos ($r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$). El punto M estará situado en la elipse dada cuando, y solo cuando, $r_1 + r_2 = 2a$, para obtener la ecuación buscada es necesario sustituir las variables r_1 y r_2 en la igualdad por sus expresiones mediante las coordenadas x, y.

Obsérvese que, siendo F_1 F_2 y como los focos F_1 y F_2 están situados en el eje Ox y son simétricos con respecto al origen de coordenadas, sus correspondientes coordenadas serán (-c, 0) y (+c, 0) teniendo esto en cuenta y aplicando la formula $2a > 2c$ es decir, $a > c$ hallamos:

$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, Sustituyendo en la igualdad: $r_1 + r_2 = 2a$ y r_2 por las expresiones obtenidas hallamos: $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$.

Esta es la ecuación de la elipse considerada en el sistema de coordenadas elegido, puesto que la satisfacen las coordenadas del punto M (x;y) cuando, y solo cuando, el punto M está situado en esta elipse. Todos los cálculos anteriores tienen el objeto de hallar una forma más simple de la ecuación de la elipse. Despejemos el primer radical de la ecuación y elevemos al cuadrado los dos miembros de la igualdad; entonces se tiene:

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$ o sea, a $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 - cx$, elevando al cuadrado los dos miembros de esta igualdad hallamos:

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$, de donde, $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$ aquí consideraremos una nueva cantidad: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Más adelante se verá el sentido geométrico de b; ahora observaremos solamente que $a > c$, y por lo tanto, $a^2 - c^2 > 0$, o sea, que b es real de la igualdad $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ se tiene que:

$b^2 = a^2 - c^2$, y por consecuencia, la ecuación $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)$ se puede escribir de la forma:

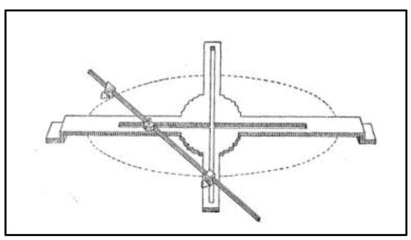
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, o sea $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Leonardo da Vinci, Pierre de Fermat y Pascal

Otro personaje importante en el presente tema fue Leonardo da Vinci. “fue un inventor, artista, escultor, pintor, filósofo, entre otras muchas cosas. Normalmente se le considera como el más claro ejemplo del proyecto científico-humanístico del Renacimiento” (Martinez, 2017, pág. 136) dentro de cada una de sus producciones se encontró un instrumento que traza elipses y cuyo nombre es el elipsógrafo; aquel instrumento trazaba un movimiento lineal en una curva.

> El elipsógrafo da Vinci es una máquina que no busca analizar las propiedades de una elipse pero que, sin embargo, busca trazar una elipse de la manera más exacta posible. Está compuesto por un rombo articulado y un punto de traza sobre uno de los lados. (Martinez, 2017, pág. 136)

Fig. 5 Elipsógrafo atribuido a Leonardo da Vinci y a Proclo



Fuente: Tesis doctoral Mecanismos articulados para trazar curvas como recurso educativo digital para la Didáctica de las Matemáticas en Secundaria y Bachillerato. (2017, p.30)

Atribuido a Proclo (y posteriormente a Leonardo da Vinci) consistente en dos barras rígidamente unidas con dos ranuras por las que se deslizan dos pivotes de una tercera barra. Cualquier punto rígidamente unido a esta tercera barra describe una elipse. (Mozo, 2017, pág. 30). Mediante la fabricación de estos instrumentos se quería validar algunas teorías en la práctica matemática logrando fortalecer dicho saber y avanzar en el funcionamiento y las teorías de las curvas. Posteriormente en el periodo comprendido en torno al año 1630 se realizó una notable conexión entre el álgebra y la geometría, es más, dos grandes matemáticos demostraron que cada una de estas áreas se puede transformar en la otra haciendo uso de las coordenadas al respecto Stewart (2007) afirma:

> Alrededor de 1620, Fermat estaba tratando de entender la geometría de las curvas, y empezó a reconstruir, a partir de la poca información de que disponía, un libro perdido de Apolonio llamado *Sobre los loci en el plano*. Hecho esto, Fermat se embarcó en sus propias investigaciones, que escribió en 1629 pero no publicó hasta cincuenta años más tarde, como Introducción *a los locis planos y sólidos.* Al hacerlo descubrió las ventajas de reformular conceptos geométricos en términos algebraicos. (Stewart, Historia de las Matemáticas., 2007, pág. 90)

“Ni descartes ni Fermat inventaron el uso de coordenadas o de métodos analíticos, y ni uno ni otro fueron los primeros en aplicar el álgebra de la geometría o en representar gráficamente las variables. (Collette J. , Historia de las matemáticas II, 1985, pág. 27) se menciona en Collette que la contribución que hicieron explícitamente fue que el reconocimiento de que una ecuación dada con dos incógnitas puede considerarse como la determinación de una curva plana, con respecto a un sistema de coordenadas (p.27) Para Pascal tampoco fue indiferente el tema de las Cónicas y escribió un ensayo que se publicó estando vivo, Collette (1985) afirma:

> Introduce la noción de haz de rectas (ordenación de líneas) que Pascal extrae de los trabajos de Déscartes y que asocia el caso de las rectas concurrentes al de las rectas

> paralelas. La segunda definición se refiere a la noción de sección de cono y enumera los tres casos generales (elipse, hipérbola y parábola) y dos casos particulares. Una tercera definición se limita a enunciar el empleo de la palabra recta en lugar de línea recta. (Collette J. , Historia de las matemáticas II, 1985)

Durante el desarrollo de este periodo se observan diferentes aportes de matemáticos que lograron consolidar más la teoría de las cónicas. No se pueden desconocer las observaciones de Tycho Brahe que fueron cruciales para que más adelante Johannes Keppler llegará a ciertas conclusiones sobre los fenómenos celestes y sobre todo llegará a la conclusión que los planetas giran alrededor del Sol en elipses y de modo tal que el Sol ocupa uno de sus focos. Keppler fue el que introdujo el concepto de "focus" y lo hizo público en 1609, estos y muchos hallazgos más fueron posibles gracias a los aportes de personajes como Aristeo, Menecmo y Tycho Brahe; pero no fueron los únicos ya que posteriormente Rene Descartes pudo hacer uso de esta teoría para lograr vincular el sistema de coordenadas con las secciones cónicas, logrando relacionar la teoría de la geometría con el algebra en el plano cartesiano, es así como dentro de sus grandes aportes se puede entender que lo que hizo Descartes fue usar las ecuaciones para realizar una clasificación de las curvas.

Descartes era mayor que Fermat 5 años y trabajaron juntos durante muchos años, a los dos les inquietaba el tema de las curvas y esa era la razón de ser de sus análisis y conclusiones; cuando Descartes analizaba una curva posteriormente llegaba a su ecuación; mientras que Fermat partía de la ecuación y luego podía dibujar la curva.

No se puede dejar atrás la relación que tiene el aporte de Leonardo da Vinci en el concepto de la elipse. Leonardo construyo el elipsógrafo buscaba trazar una elipse de la manera más exacta posible. Mediante este invento se puede observar los elementos exactos de la elipse y permite tener una manipulación exacta al realizar cada uno de los respectivos trazos.

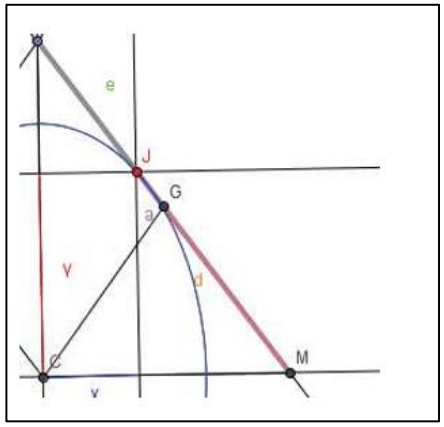
Periodo 3: La Modernidad

Cuando se habla de modernidad es el periodo histórico que aparece en el norte de Europa a finales del siglo XVII y se culmina en el siglo XVIII. Durante este periodo se puede hacer énfasis en dos momentos específicos: Primero la autorreflexidad de Giddens y Habermas, que quiere decir: "La modernidad es ese primer momento en la historia donde el conocimiento teórico, el conocimiento experto se retroalimenta sobre la sociedad para transformar, tanto a la sociedad como al conocimiento". (Escobar, 2012, pág. 2) La segunda característica de la modernidad es la descontextualización, lo sugiere Giddens que significa que es el despegar, arrancar la vida local de su contexto y que la vida local cada vez es más producida por lo translocal (Escobar, 2012, pág. 2).

El elipsógrafo de Von Schooten

Como aportes a la elipse se encuentra el elipsógrafo de Von Schooten, que consta de dos ejes ortogonales y un segmento de longitud fina, los cuales cada uno se encuentra en un extremo de los ejes. "El objetivo del instrumento es asegurar ciertas propiedades del punto de traza, para así demostrar que la figura dibujada es una elipse" (Martinez, 2017, pág. 137)

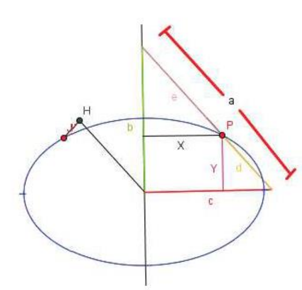
Fig. 6 El elipsógrafo de Von Schooten



Fuente: Artículo La elipse a través de la historia: concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes (2017, p. 138)

En el momento histórico en el que se encontraba Schooten le permitió demostrar dichas propiedades y por tanto demostrar que su instrumento nombra con símbolos las magnitudes de los segmentos, “Para asegurar que el punto a trazar pertenece a una elipse inscribe el instrumento en un sistema de referencia y llega a la ecuación general de la elipse” (Martinez, 2017, pág. 138) Por otra parte (Taylor, 1881) menciona que Quetelet (1796-1874) demostró, entre otros resultados, que la suma de las distancias del vértice del cono a los vértices de la elipse es igual a la distancia entre los focos.

Fig. 7 Demostración geométrica elipsógrafo de Schooten



$$\frac{x}{e} = \frac{c-x}{d}$$
$$\frac{y}{d} = \frac{b-y}{e}$$
$$dx = ec - ex$$
$$dx + ex = ec$$
$$ax = ec$$
$$c = \frac{ax}{e}$$

$$ey = db - dy$$
$$dy + ey = db$$
$$ay = db$$
$$b = \frac{ay}{d}$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$
$$\frac{a^2x^2}{e^2} + \frac{a^2y^2}{d^2} = a^2$$
$$\frac{x^2}{e^2} + \frac{y^2}{d^2} = 1$$

Fuente: Martínez (2017, p.138)

Francisco Maurolico

Francisco Maurolico (1494-1575) también fue un matemático interesado en el tema de las secciones cónicas nació en Messina, Sicilia. Toda su vida permaneció en su ciudad natal hasta que falleció (1575), tenía talento por la geometría y sabía que sus traducciones latinas de Euclides, Arquímedes, Apolonio, entre otros llamaban la atención entre la comunidad. En cuanto algún aporte al tema de la elipse, “tradujo los cuatro libros de las secciones cónicas de Apolonio y trato de reconstruir el libro V utilizando según parece, comentarios de Pappus.” (Collette J. , Historia de las matemáticas I, 2006). Mediante esta traducción logró despertar la comprensión del tema reconociendo cada uno de los aportes que hizo Apolonio.

En este último periodo donde sobresalen los trabajos del elipsógrafo de Von Schooten y las traducciones de los cuatro primeros libros de las secciones Cónicas de Apolonio de Perga, realizado por Francisco Maurolico; se hace un reconocimiento de estos aportes ya que inicialmente se ve la importancia didáctica que tiene el emplear un instrumento como el elipsógrafo de Von Schooten para lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes; en este punto de la historia se reflexiona sobre las bondades que tiene su uso y los beneficios didácticos que trae en el aula de clase.

Así mismo no se puede desconocer que las traducciones que realizó Francisco Maurolico ha brindado una luz para los estudiosos de las matemáticas ya que se ha convertido en un documento obligatorio para la comprensión del tema, ya que es una fuente confiable porque viene de los escritos originales de su escritor original Apolonio de Perga.

Conclusiones

Ser docente constituye un reto en el sentido que se debe reflexionar constantemente sobre la forma indicada de hacer posible una comprensión del objeto de estudio. Específicamente en la enseñanza de la matemática no solo influye el dominio del saber o las estrategias que se implementen en la clase, sino que también el conocimiento histórico-epistemológico hace parte de un proceso de enseñanza que permite reconocer el surgimiento y desarrollo de dicho objeto de conocimiento.

Dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas es importante contextualizar al estudiante en cierta época de la historia teniendo en cuenta el objeto matemático de estudio logrando reconocer como surgió, como fue el desarrollo y como se encuentra hasta nuestros días ese objeto matemático. Encontrando así, un sentido epistemológico en la construcción y apropiación del saber. Al respecto los lineamientos curriculares para la enseñanza de la matemática mencionan lo siguiente (Diez, 1998)

> Su papel será el de propiciar una atmósfera cooperativa que conduzca a una mayor autonomía de los alumnos frente al conocimiento. Es así, como enriqueciendo el contexto deberá crear situaciones problemáticas que permitan al alumno explorar problemas, construir estructuras, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos; estimular representaciones informales y múltiples y, al mismo tiempo, propiciar gradualmente la adquisición de niveles superiores de formalización y abstracción; diseñar además situaciones que generen conflicto cognitivo teniendo en cuenta el diagnóstico de dificultades y los posibles errores. (Diez, 1998, pág. 16).

La atmosfera de cooperación debe ser un común denominador que prevalezca en la clase y se alimentarán de la creatividad al involucrar en el desarrollo de sus clases, apuntes históricos del objeto matemático (en esta ocasión la elipse), logrando propiciar reflexiones y representaciones formales en el estudiante.

Aunque Apolonio fue astrónomo de talento y escribió sobre una gran variedad de temas matemáticos, su fama procede esencialmente de sus secciones cónicas en donde el método utilizado está mucho más próximo a los métodos de la geometría analítica actual que a los puramente geométricos. (Collette J. , 2006, pág. 142) Apolonio puede considerarse una base teórica para el estudio de la geometría analítica ya muchos matemáticos en la etapa del renacimiento y la modernidad lograron fortalecer sus teorías gracias a las bases proporcionadas por Apolonio.

En cuanto a los aportes brindados por Rene Descartes se considera fundamental para el renacimiento. Ya que gracias a sus aportes se logró consolidar en el plano cartesiano la teoría de las cónicas e involucrar la ecuación de las mismas brindándole coordenadas a las mismas. La geometría de Rene Descartes proporcionó a la humanidad un aporte a la geometría moderna, ya que presenta de una forma detallada y amplia diferentes procedimientos y demostraciones donde vincula el álgebra y la geometría llegando así a una síntesis de conceptos que favorecieron al estudio de la matemática llevándola a un avance de esta ciencia.

El elipsógrafo de Von Schooten también resultó ser un aporte a la teoría de la elipse, constaba de dos ejes ortogonales y un segmento de longitud fina, los cuales cada uno se encuentra en un extremo de los ejes. “El objetivo del instrumento es asegurar ciertas propiedades del punto de traza, para así demostrar que la figura dibujada es una elipse” (Martinez, 2017, pág. 137). Mediante este instrumento se podía graficar perfectamente la elipse logrando identificar las partes que la componen. El aporte realizado inicialmente por Leonardo da Vinci y posteriormente por Von Schooten referente a la construcción del elipsógrafo, marcan la pauta en la escuela para reflexionar acerca del método empleado para la enseñanza de este tema.

No solo se puede tener en cuenta el discurso formal acerca de la elipse, sino que la invitación se hace para que, como docentes se empleen otros mecanismos de manipulación de material didáctico para que los estudiantes logren percibir los diferentes elementos que componen la elipse y sean ellos los actores principales en la construcción de su propio conocimiento; ya que empleando dicho instrumentos lograrán observar la secuencia lógica que tiene el diseño de la elipse en cada uno de sus trazos.

Resulta de gran motivación para el docente observar el grado de pertenencia que poco a poco va construyendo el estudiante cuando avanza en los temas que se trabajan en clase y una mayor satisfacción cuando los conocimientos pueden ser aplicados a herramientas didácticas que llegan hacer instrumentos de modelación para la enseñanza de la matemática.

Discusión

Para lograr con éxito el desarrollo del trabajo, se tuvo en cuenta tres objetivos que permitieron mantener una directriz en el trabajo, tratando de darle sentido y coherencia en cada una de las investigaciones y lecturas realizadas, aquellos objetivos hacen referencia a:

Indagar diferentes reseñas bibliográficas referente al tema de la elipse, reconociendo el avance conceptual a través de la historia, explorar los aportes que realizados al concepto de la Elipse por grandes matemáticos de la historia como lo son Apolonio, Copérnico, Kepler, Descartes, entre otros y reconocer la evolución histórica de la elipse, correspondiente a la ecuación canónica, reconociendo su estructura y los elementos que la componen.

Fue crucial realizar la indagación de las diferentes reseñas bibliográficas ya que permitieron contrastar datos que en algunas otras referencias aparecían cortos en argumentos. Fuentes antiguas como fuentes recientes permitieron conocer diferentes puntos de vista y corroborar las aplicaciones que pudo tener el concepto de la elipse para el desarrollo científico de las ciencias y del mismo hombre.

Fueron muchos personajes que de una u otra manera tuvieron un acercamiento y brindaron aportes al concepto de la elipse; posiblemente muchos de ellos no se mencionan en el presente trabajo, pero la idea fue tratar de recoger la mayor cantidad de datos cruciales y sobresalientes sobre el tema para exponerlo y contrastarlo con otros datos; logrando hilar ideas con sentido verificando así un recorrido histórico del concepto.

Desde la misma palabra elipse tiene su historia ya que sus antepasados mencionaban que era un circulo imperfecto, Kepler dio el nombre de focos, pero para descartes era fácil ignorar los focos, no le prestaba mayor atención y así poco a poco se fueron acomodando cada uno de estos conceptos que hacen parte de la elipse para lograr darle sentido a estas curvas y quien Fermat y Descartes brindaron aportes contundentes.

Referente al tema del desarrollo histórico – epistemológico del concepto de la elipse se puede apreciar como diferentes autores han podido realizar aportes dependiendo un momento de la historia. Se inicia con los aportes relacionados con las curvas y coordenadas al respecto se tiene evidencia de Pierre Fermat realizó su escrito en el documento titulado: *Introducción a los locis planos y sólidos* donde realizó aportes a la geometría en términos algebraicos. Al respecto Stewart (2007) menciona:

> Locus, en plural loci, es hoy un término obsoleto, pero era común incluso en 1960. En castellano se traduce como lugar geométrico. Aparece cuando buscamos todos los puntos en el plano o en el espacio que satisfacen unas condiciones geométricas concretas. Por ejemplo, podríamos preguntar por el lugar geométrico de todos los puntos del plano tales que la suma de sus distancias a dos puntos dados es la misma. Este lugar geométrico resulta ser una elipse con los dos puntos como focos. (Stewart, Historia de las matemáticas, 2007)

Posteriormente se encuentran los aportes de Rene Descartes donde involucra las coordenadas cartesianas retomando las curvas que los griegos habían construido como secciones de un cono doble. “*Desde el punto de vista algebraico resulta que las secciones cónicas son las curvas más simples después de las líneas rectas*” (Stewart, Historia de las matemáticas, 2007, pág. 94). No se pueden desconocer los aportes de Menecmo, Aristeo, Euclides y Arquímedes. Aristeo quien siguió el trabajo de las curvas, específicamente las secciones cónicas, en el trabajo titulado Solid Loci, ayudó para que el trabajo de Euclides, Arquímedes y Apolonio se pudiera consolidar y ser considerado como la edad de Oro de las matemáticas griegas período que abarca desde el 300 a.C. al 200 a.C.

> La historia cuenta que Apolonio fue el primero en basar la teoría de las tres secciones cónicas. Secciones de un mismo cono circular, recto u oblicuo y, posiblemente siguiendo una sugerencia de Arquímedes, fue el primer matemático que introdujo los nombres de elipse, parábola e hipérbola, en conexión con las secciones de un cono cortado por un plano. Por otro lado, se puede destacar más adelante que las anotaciones de Tycho Brahe fueron cruciales para el trabajo de Johannes Kepler, cuando murió Brahe sus escritos fueron heredados por Kepler quien pasó muchos años analizándolos buscando relaciones, concordancias y pautas para llegar a conclusiones al respecto. Kepler descartaba el círculo clásico (supuestamente la forma más perfecta posible) en favor de la elipse" (Stewart, Historia de las matemáticas, 2007, pág. 121).

Un instrumento que hace parte de la evolución del concepto de Elipse, es aquel instrumento que fabricó Leonardo da Vinci (1452 – 1519) quien fue inventor, artista, escultor, pintor, filósofo, entre otras muchas cosas. Normalmente se le considera como el más claro ejemplo del proyecto científico-humanístico del Renacimiento" (Martinez, 2017, pág. 136) el instrumento que fabricó, traza elipses; su nombre es el elipsógrafo y sus movimientos son lineales en forma de una curva. "*El elipsógrafo da Vinci es una máquina que no busca analizar las propiedades de una elipse pero que, sin embargo, busca trazar una elipse de la manera más exacta posible. Está compuesto por un rombo articulado y un punto de traza sobre uno de los lados*". (Martinez, 2017, pág. 136). Este fue un aporte que más adelante Von Schooten pudo mejorar. El elipsógrafo de Von Schooten, consta de dos ejes ortogonales y un segmento de longitud fina, los cuales cada uno se encuentra en un extremo de los ejes. “El objetivo del instrumento es asegurar ciertas propiedades del punto de traza, para así demostrar que la figura dibujada es una elipse” (Martinez, 2017, pág. 137).

Es así como el concepto de elipse ha ido evolucionado y se puede apreciar como el aporte de un matemático ha servido para fortalecer la teoría que la prosigue. Como docentes aquella historia es la que debemos llevar a las aulas para hacer de la enseñanza un espacio de retroalimentación resaltando los personajes que han hecho historia para hacer de la matemática una ciencia sólida.

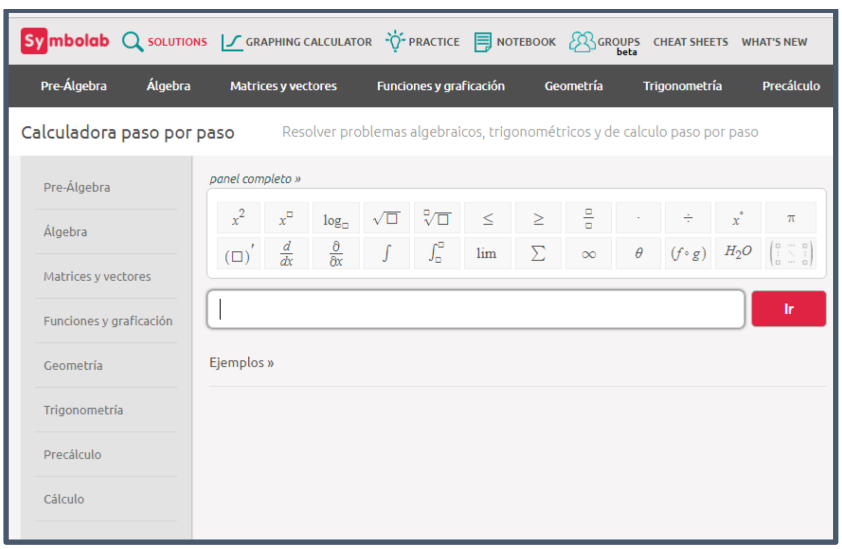
En cuanto al uso de implementos o instrumentos didácticos en el aula de clase no se puede desconocer los aportes de Leonardo da Vinci y de Von Schooten, el uso de estos instrumentos puede motivar al estudiante a una historia de las matemáticas, como dice Martínez (2007): “Si esperamos llegar a la geometría analítica con nuestros estudiantes partiendo del uso de instrumentos (ya sean digitales o mecánicos) debemos tener en cuenta una reflexión histórica de la existencia de diferentes matemáticas a lo largo de la historia; sin embargo, creo que es una estrategia válida y útil como recurso didáctico”. (Martinez, 2017, pág. 140).

Es así, como no se puede desconocer la trascendencia que tiene hoy en día la teoría descrita anteriormente relacionada con las tecnologías informáticas de la comunicación. Se puede observar que existe un uso relevante en las instituciones educativas ya que se debe comprender los importantes alcances que su uso conlleva propiciando dinamismo en las clases y permitiendo mayor optimización del tiempo para construir conceptos en el aula.

Es de hacer notar que la labor pedagógica del profesor de matemáticas debe ir más allá de las herramientas TICs, para que el rol del estudiante no se limite a manipular teclas automática y memorísticamente, algo que puede hacer un inexperto; sino más bien hacia la comprensión de los algoritmos que ejecuta la máquina y la posibilidad de relacionar, construir, modificar, profundizar, solucionar e investigar teoría matemática.

Entre algunos programas para graficar la elipse se cuenta con la calculadora graficadora que se encuentra disponible en la red llamada **Simbolad**; la calculadora permite graficar la elipse explicando paso a paso que debe realizar el estudiante para lograr cada una de las gráficas, además realiza las comprobaciones si el grafico es el correcto; es muy útil, clara y tiene la fortaleza que su uso es gratuito y funciona para cualquier navegador.

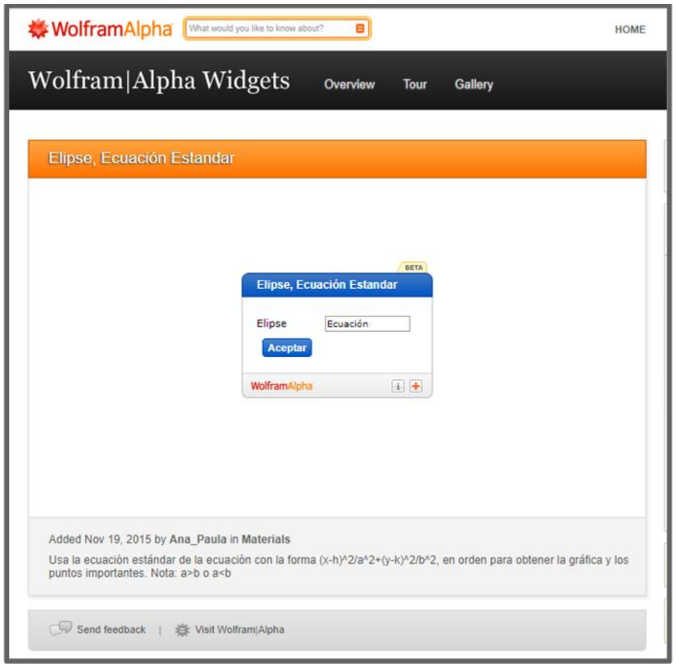
Fig. 8 Calculadora Simbolad



Fuente: Página Internet. Tomado en agosto del 2018. https://es.symbolab.com/solver/indefinite-integral-calculator

Otra herramienta Tecnológica muy útil es la Calculadora WolframAlpha que también ofrece las herramientas para lograr una perfecta graficación de la elipse, además se de realizar operaciones matemáticas también estudiar un problema y se puede observar su solución paso a paso.

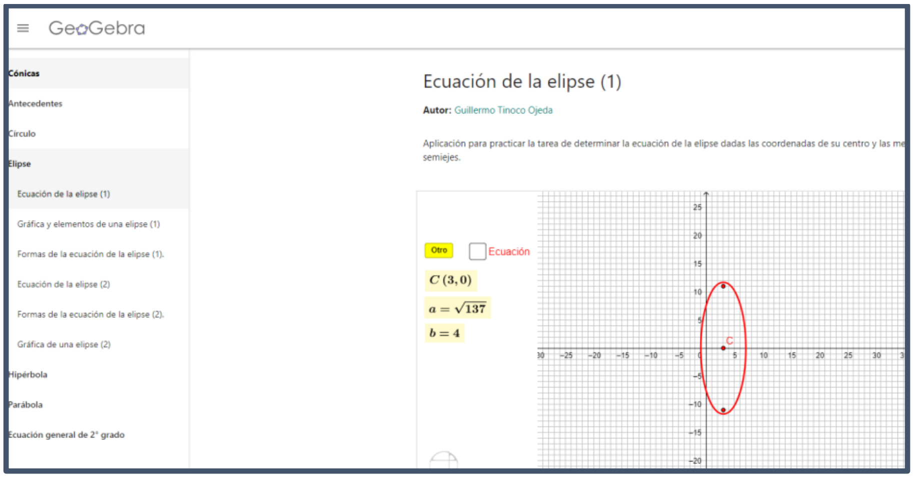
Fig. 9 Calculadora WolframAlpha



Fuente: Página Internet. Tomado en agosto del 2018. https://www.wolframalpha.com/

Otra herramienta que se encuentra en la red y es muy útil como las anteriores, es la denominada: **Geogebra**, esta herramienta se ha mantenido en internet durante varios años y ofrece una disponibilidad en su plataforma donde se puede abrir una cuenta e ir guardando cada una de las construcciones realizadas. Maneja varios campos de la matemática entre ellos la geometría.

Fig. 10 Programa Geogebra



Fuente: Página Internet. Tomado en agosto del 2018. https://www.geogebra.org/?lang=es

Y así mismo varias páginas en internet que ofrecen diferentes graficadora gratuitas que el estudiante puede acceder fácilmente a ellas.

Es de aclarar que esta herramienta tecnológica es útil siempre y cuando el estudiante ha pasado por un proceso donde reconoce manualmente cada una de las partes de la elipse y puede llegar a conclusiones posteriormente al respecto. Lo importante es afianzar los conceptos de la elipse, por medio de una herramienta muy asequible y además muy divertida para el estudiante.

Referencias Bibliográficas

Alarcon. (2008). Antropologia Cultural y Creación Matemática. *A parte Rei. Revista de Filosofia*, 3.

Alexandrov, A. K. (1973). *La matemática, su contenido, métodos y significado.* Madrid: Alianza Editorial.

Alexandrov, A., Kolmogorov, A., & Laurentiev, M. (1973). *La Matemática su contenido, métodos y significado.* Madrid: Alianza Editorial.

C.H, L. (1978). *Geometría Análitica.* México: Unión Tipográfica Editorial Hispano-América.

Collette, J. (1985). *Historia de las matemáticas II.* España: Siglo ventiuno.

Collette, J. (2006). *Historia de las Matemáticas.* Madrid: Siglo XXI.

Collette, J. (2006). *Historia de las Matemàticas.* Madrid: Siglo XXI.

Collette, J. (2006). *Historia de las matemáticas I.* España: Siglo XXI.

Descartes, R. (1947). *La Geometría.* Buenos Aires: Copyright by compañia Editora Espasa.Calpe.

Diaz, N. (2018). *Las cònicas de Apolonio de Perga*. Recuperado el Junio de 2018, de http://historiasdematematicas.blogspot.com/2017/09/las-conicas-de-apolonio-de-perga.html

Diez, J. N. (1998). *Lineamientos curriculares para la enseñanza de la Matemática.* Bogota: Ministerio de Educación Nacional.

E., F. (1999). Para que enseñar Historia. *Nexos*.

Eder Landro Sanchez Quiceno, C. f. (2015). *Diseño de material didactico para el fortalecimiento del pensamiento matemático en la enseñanza de la eduación básica y media.* Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Escobar, A. (2012). Globalización, Desarrollo y Modernidad. *Organizacion de estados Iberoamericanos*, 2.

Fuller, G. (1988). *Geometría Analítica.* México: Sistemas Tecnicos de edición, S:A de C.V.

Fuller, G. (1988). *Geometrìa Analitica.* Mexico: Sistemas Tecnicos de ediciòn S.A deC.V.

G-M, B. (1963). *Geometría. Curso Superior.* Moscu: Bedout.

Gualdrón, W. E. (2013). *Propuesta Metodológica para la enseñanza de las secciones Tesis: cónicas en el grado décimo de la Institución Educativa Villas de san Ignacio de Bucaramanga.* Medellín: Universidad Nacional de Colombia.

Guzman, M. d. (29 de junio de 2018). *Facultad Ciencias Matemàticas UCM*. Obtenido de http://blogs.mat.ucm.es/catedramdeguzman/conicas-precedentes-menecmo-aristeo-euclides-arquimedes/

Historia de la Elipse. (1 de julio de 2018). Obtenido de https://es.scribd.com/doc/39620241/Historia-de-La-Elipse

Internet, P. (2018). *Wolframalpha.* https://www.wolframalpha.com/.

Internet., P. (2018). *Wolframalpha.* https://www.wolframalpha.com/.

Lugo, J. I. (19 de Junio de 2014). *Secciones cónicas: Un estudio epistemólogico y el analisis de su tratamiento en Libros de texto.* Obtenido de Secciones cónicas: Un estudio epistemólogico y el analisis de su tratamiento en Libros de texto.: http://www.ungs.edu.ar/ms_idh/wp-content/uploads/2014/10/SECCIONES-C%C3%93NICAS.-Un-estudio-epistemol%C3%B3gico-y-el-an%C3%A1lisis-de-su-tratamiento-en-los-libros-de-textos.pdf

Mankiewicz, R. (2000). *Historia de las matemáticas.* Buenos Aires: Paidos.

Markushévich, A. (1977). *Lecciones populares de matemáticas. Curvas maravillosas, Números complejos y representaciones conformes, funciones maravillosas.* Moscú: MIR.

Martinez, D. (2017). La Elipse a través de la historia: Concepciones epistemológicas de la elipse en tres momentos históricos diferentes. *Funes,* 135.

Matematicas en el Renacimiento. (s.f.). Obtenido de https://matematicasconmuchotruco.wordpress.com/2015/08/25/matematicas-en-el-renacimiento/

Moreno, F. J. (30 de Enero de 2018). *APOLONIO, EL GEÓMETRA DE LA ANTIGÜEDAD*. Obtenido de Apuntes de historia de las matemáticas: http://www.mat.uson.mx/depto/publicaciones/apuntes/pdf/1-1-3-apolonio.pdf

Mozo, J. M. (18 de Junio de 2017). *Tesis doctoral. Mecanismos articulados para trazar curvas como recurso educativo digital para la Didáctica de las Matemáticas en Secundaria y Bachillerato*. Obtenido de file:///C:/Users/Usuario%20UTP/Downloads/manzano_mozo_francisco_javier.pdf

Newman, J. (1994). *SIGMA.El mundo de las Matemàticas 1.* Barcelona: Grijalbo.

Newman, J. R. (1994). *SIGMA El mundo de las matematicas 1.* Barcelona: Grijalbo.

Piaget, J. (1961). *La formación del símbolo en el niño.* México: Fondo de Cultura Economica.

Ramirez, R. (2013). *Las secciones cónicas en la escuela secundaria. Un analisis matemático y didáctico.* Argentina: Universidad Nacional de General Sarmiento.

Ruiza, M., Fernandez, T., Tamaro, E., & Duran, M. (14 de Junio de 2018). *Biografias y Vidas*. Obtenido de Enciclopedia Biografias y Vidas: https://www.biografiasyvidas.com/biografia/a/apolonio_de_pergamo.htm

Sampieri, R. F. (2006). *Metodología de la Investigación.* Mexico: McGraw-Hill.

Stewart, I. (2007). *Historia de las matemáticas.* Barcelona: Crítica.

Stewart, I. (2007). *Historia de las Matemáticas.* Barcelona: Critica.

Strauss, A. &. (2012). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada.* Medellín: Universidad de Antioquia.

Taylor, C. (1881). *An Introduction to the ancient and modern geometry of conics.* London: Deighton: Bell & Co.

TESIS DOCTORAL. (s.f.).