ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO: EPISÓDIO DE SALA DE AULA VIA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Combinatorial analysis in high school: classroom episode via problem exploration, solving and posing

Adriano Alves da Silveira

Silvanio de Andrade

Resumo

O presente estudo discute um episódio de sala de aula, no qual analisamos como uma abordagem em sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode contribuir com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. A pesquisa se situa numa abordagem qualitativa e na modalidade pedagógica, na qual o professor é o pesquisador em sua própria sala de aula. Os resultados evidenciam que, via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, foi possível acompanhar o crescimento dos alunos, uma vez que eles criaram suas próprias ideias para resolver problemas de Análise Combinatória e, consequentemente, encontraram múltiplos procedimentos/processos de resolução dos problemas; posteriormente, justificaram suas resoluções, participando, efetivamente, da construção do seu conhecimento. Concluímos enfatizando que a resolução de um problema gerava novos problemas, de modo que exigia do aluno a responsabilidade de contribuir com novos trabalhos, novas reflexões, novas sínteses, promovendo uma aprendizagem com compreensão das ideias essenciais de Análise Combinatória.

Palavras-chave: Análise Combinatória; Ensino-Aprendizagem; Sala de Aula; Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

Abstract

The present study discuss a classroom episode, in which we analyze how a classroom approach via Problem Exploration, Solving and Posing can contribute to the Combinatorial Analysis Teaching-Learning. The situation is in a qualitative approach and in the pedagogical modality, in which the teacher is the researcher of his own classroom. The results, via Problem Exploration, Solving and Posing, show that it was possible to follow the students improviment, since they criated their own ideas to solve combinatory problems, and, consequently find multiple procedures/processes of solutions for solving students' problems; their decisions, participating, justifying, in the construction of their knowledge. We concluded by emphasizing the solving problem generated new ones, in a way that demanded from the student the responsibility to contribute with new works, new ideas, new syntheses, promoting learning with an understanding of the ideas of Combinatorial Analysis.

Keywords: Combinatorial Analysis; Teaching-Learning; Classroom; Problem Exploration, Solving and Posing.

Introdução

Recentemente, pesquisadores em Educação Matemática têm evidenciado sua preocupação com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, sobretudo pelo fato de algumas pesquisas pontuarem que, na maioria das vezes, esse tópico é trabalhado apenas a partir do 2º ano do ensino médio.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que são uma proposta que tem como objetivo nortear o trabalho do professor brasileiro em sala de aula, destacam a necessidade de o ensino da Análise Combinatória começar desde os primeiros anos de escolaridade do ensino fundamental (BRASIL, 1997).

Nesse sentido, os PCN (BRASIL, 1997) apontam que, no decorrer do 1º e 2 º ciclos do ensino fundamental, os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los, enquanto, para o 3º e para o 4º ciclo, ressaltam a relevância dos problemas de contagem, cujo objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.

Nessa direção, Pessoa (2009) explica que, mesmo sem um trabalho sistemático com o raciocínio combinatório, acredita-se que é possível desenvolver compreensões sobre esses tipos de problemas antes de sua introdução formal na escola e que os alunos são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos. Para ela, os problemas de Combinatória podem ser explorados desde cedo. A autora argumenta, ainda, que algumas situações extraescolares (expectativas de um acontecimento, regras de um jogo, arrumação de objetos, determinação de grupos, formação de casais para danças, escolha de vestimentas, combinações de sucos e sanduíches em uma lanchonete ou de sabores de um sorvete) são ricas situações que podem ser exploradas nos primeiros ciclos de escolaridade sobre Combinatória e Probabilidade.

Assim, o interesse pelo ensino-aprendizagem de Análise Combinatória partiu, primeiramente, de algumas lacunas deixadas quando o autor principal ainda era aluno da Educação Básica, época em que não houve qualquer contato com o estudo deste tópico. Desse modo, questionávamos a respeito de como contribuir para que os alunos tenham um aprendizado com compreensão no estudo da Análise Combinatória, o que levou a buscar alternativas metodológicas para este conteúdo, na perspectiva da Resolução de problema.

Nesse contexto, elegemos o seguinte problema de pesquisa: Como uma abordagem em sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode contribuir com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória?

Discutiremos, aqui, um episódio em sala de aula que evidencia o trabalho dos alunos na formalização do conceito do Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Além disso, diante das diferentes perspectivas do uso da metodologia de Resolução de problemas em sala de aula, adotamos, neste trabalho a proposta de Andrade (1998; 2017), intitulada, "Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas (ERPCDP)".

Portanto, a nossa proposta em trabalhar com a Resolução de problemas em sala de aula compreende ir além da resolução do problema e da sua solução, ao trabalhar com a Exploração e a Proposição de Problemas.

Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas

Algumas pesquisas, como a de Vargas (2009), Almeida (2010), Souza (2010), Silva (2013), Silveira (2016); Silveira e Andrade (2020) e Silveira e Andrade (2021) destacam que o ensino da Análise Combinatória pode ocorrer respectivamente, através de Atividades Investigativas, Comunicação Matemática, Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, Resolução/Exploração de Problemas, via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas e via Proposição de Problemas.

Nota-se que essas propostas metodológicas valorizam a aquisição e a compreensão das ideias essenciais de Análise Combinatória, deixando de lado o uso excessivo de fórmulas, como também o ensino voltado para exercícios repetitivos, que não fazem o aluno pensar.

> No ensino-aprendizagem de combinatória, percebe-se que no ambiente escolar, é dada ênfase conferida ao modelo fórmula-aplicação, assim é ensinado um conjunto de fórmulas e depois cabe ao aluno escolher a fórmula correta para resolver o problema proposto. Nesse sentido, os alunos não desenvolvem a compreensão dos problemas discutidos, visto que são valorizados certos mecanismos que pouco contribuem para a compreensão dos significados dos problemas de contagem, e tampouco permitem que eles desenvolvam o raciocínio combinatório (SILVEIRA; ANDRADE, 2020, p. 4).

Assim, defendemos que as novas pesquisas devem valorizar a compreensão e a formalização das ideias essenciais de Análise Combinatória. Isso pode acontecer quando colocamos o aluno em um ambiente que leve à reflexão, permita que ele tome decisões adequadas e organize as informações diante do problema proposto, desenvolvendo uma forma de pensar matemático: o raciocínio combinatório.

Silveira e Andrade (2020) pontuam que a Análise Combinatória apresenta dificuldade de natureza conceitual. Sobre isso, eles argumentam que é necessário realizar um trabalho em sala de aula que valorize a compreensão dos conceitos referente a esse tópico, já que o conhecimento das fórmulas garante muito pouco sobre como proceder em determinados problemas. Além disso, os autores percebem que os problemas de Combinatória não mantêm o padrão em suas resoluções. “Por isso, quando estamos diante de um problema referente a este tópico, é necessário pensar, em seguida fazer anotações, com o intuito de conhecer sua natureza, e como se procede, por exemplo, diante de uma enumeração sistemática” (SILVEIRA; ANDRADE, 2020, p. 4).

Nesse contexto, a principal dificuldade que emerge no estudo de Análise Combinatória é a distinção do tipo de agrupamento; dessa forma, podemos destacar alguns questionamentos que estão bem presentes na sala de aula, tais como: é arranjo, combinação ou permutação? Quais fórmulas utilizar?

Assim, precisamos ter cuidado nas escolhas dos primeiros problemas de Análise Combinatória, é preciso que eles possuam uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos, para que o aluno possa listar todos os agrupamentos possíveis. No caso de o problema possuir um grande número de agrupamentos, tornando uma atividade exaustiva para o estudante, vem a importância do PFC e utilização das fórmulas de modo adequado. Na verdade, a exploração de um problema em que podemos fazer todos os agrupamentos possíveis, tomando casos particulares, pode nos ajudar a entender e ampliar para uma situação geral, chegando a uma generalização do problema.

Pessoa (2009, p. 72) acrescenta que “a partir de determinadas estratégias ou fórmulas que envolvem conceitos combinatórios, podemos saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um”. A pesquisadora enfatiza o *raciocínio combinatório* como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Além disso, tem-se como estratégias de contagem: o raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, por meio de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem. Para Borba (2010), o *raciocínio combinatório* é,

> Entendido como um modo de pensar presente na análise de situações nas quais, dados determinados conjuntos, deve-se agrupar os elementos dos mesmos, de modo a atender critérios específicos (de escolha e/ou ordenação dos elementos) e determinar-se – direta ou indiretamente – o número total de agrupamentos possíveis (BORBA, 2010, p. 3).

Em contrapartida, os PCN+ (BRASIL, 2002) dizem que o raciocínio combinatório é uma forma de pensamento matemático que consiste em decidir sobre o modo mais adequado de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis. Para esse documento, essa nova forma de pensar em Matemática não deve ser aprendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

Defendemos, aqui, que, via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, o aluno consegue fazer conexão com os conceitos abordados e formaliza novas ideias. No entanto, na sala de aula, muitos alunos, ao se deparem com situações-problema envolvendo Análise Combinatória, recorrem, imediatamente, às fórmulas, tornando, assim, um aprendizado mecânico e sem significado. Nesse momento, é importante a mediação do professor e o incentivo na elaboração de procedimentos/processos que possam resolver os problemas sem precisar utilizar as fórmulas de imediato. Com isso, há uma necessidade de sair do modelo tradicional, ao possibilitarmos a construção de novos modelos que vislumbrem um ensino numa perspectiva construtivista. Sobre isso, Morgado et al. (1991, p. 2) enfatizam que,

> Se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

Nós sabemos que o ensino desse tópico está além disso, já que podemos propor problemas que levam o aluno a refletir, a tomar decisões e a formalizar novas ideias matemáticas, fazendo com que as fórmulas tenham sentido. É preciso, a cada dia, incentivar sua criatividade, envolvê-lo em situações que levem ao aprendizado e discutir problemas que desenvolvem habilidades necessárias para formação do indivíduo.

Os PCN+ indicam que o trabalho em sala de aula acerca de Análise Combinatória pode ocorrer pela resolução de problemas, ao afirmar que "esse conteúdo deve ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril" (BRASIL, 2002, p. 127).

Ao trabalhar com a Resolução de Problemas, podemos dar ênfase à Exploração de Problemas que nos permitem ter uma melhor compreensão dos conteúdos que estão sendo discutidos. Sobre isso, Andrade (2017) ressalta que as abordagens iniciais de resolução de problemas, principalmente as da década de 1980, limitavam-se apenas à busca da solução do problema. Portanto, o processo se limitava apenas à solução do problema, nunca ia além do problema inicialmente dado. A partir daí, o pesquisador apresenta uma proposta de exploração de problema em que, entre outros pontos, tem-se como orientação teórica/prática ir além da resolução do problema.

Andrade (2017) destaca que o ensino de Matemática nessa proposta começa sempre com um problema ou situação-problema. Nela, os estudantes aprendem e entendem aspectos importantes de um conceito ou ideia matemática, explorando a situação-problema.

Silveira e Andrade (2020) pontuam que a resolução de um problema não deve ser vista apenas como uma busca de resposta, mas, sim, interessada na compreensão do aluno. Na exploração de um problema, o ponto de partida é o aluno, que está diante de um problema aberto, no qual ele desenvolve sua autonomia, levantando hipóteses, tomando decisões, refletindo sobre o seu fazer e investigando novos problemas que vão aparecendo durante a resolução do problema inicial.

O pesquisador Andrade (2017) enfatiza um novo modelo em que a exploração e a resolução de um problema são desenvolvidas a partir de um movimento aberto, não fechado, embora não solto, denominado de Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (P-T-RS-R). Numa aplicação prática desse modelo, inicialmente, é dado ou proposto um problema ou situação-problema, que pode partir tanto do professor quanto dos próprios alunos, esses mesmos alunos realizam um trabalho sobre ele e, juntos, professor e alunos, discutem o trabalho feito num processo de reflexões e sínteses, chegando, desse modo, possivelmente, à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses. Nesse novo modelo, Andrade (2017) enfatiza a necessidade de inclusão do termo Resultado, enquanto, na proposta original, era apenas Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses. Em meio às experiências vivenciadas pelo autor, ele enfatiza que o acréscimo da palavra resultado define melhor o processo como um todo, entendendo, aqui, o resultado como um refinamento das diversas sínteses desenvolvidas ao longo do processo de uma experiência de exploração de problemas, bem como destaca a solução do problema como um tipo de resultado. Andrade (2017) destaca ainda que:

> A proposta de Exploração-Resolução-Proposição de Problemas precisa ser sempre percebida como uma proposta aberta, não fechada, embora não solta, para que possamos escutar/ver/olhar o que acontece nas tramas, nos encantos e desencantos, na transfiguração poética, no espaço-tempo, que o cotidiano da sala de aula nos proporciona. O final de uma

> experiência de Exploração de Problemas em sala de aula nunca é o final de uma história, mas o começo de muitas outras histórias. Trabalhar com Exploração de Problemas é colocar-se sempre em movimento, em aventura, é um sair sempre para mergulhar reflexivamente e criticamente em si mesmo e além de si mesmo (ANDRADE, 2017, p. 367).

Silveira e Andrade (2020) enfatizam que, nessa abordagem, quando o aluno compreende o problema e suas soluções, cabe ao professor incentivar a exploração de novos problemas a partir do problema inicial, visando uma melhor compreensão dos conceitos. Ademais, quando o professor está explorando variações do problema que foi apresentado inicialmente, está propondo meios valorosos que levam os alunos a refletir sobre os significados das diversas ideias matemáticas que estão implícitas no problema apresentado. Diante da experiência vivenciada com o tema Resolução e Exploração de Problemas, Andrade (2017) enfatiza o caminhar para uma experiência ligeiramente modificada que hoje denomina de Exploração, *Resoluçãoexploração, Proposiçãoexploração* e Codificação - Descodificação de Problemas (ERPCDP).

Conforme o mesmo pesquisador, a nova denominação permite uma melhor compreensão e tomada de consciência do processo como um todo. Ele também destaca que colocar o termo *Resoluçãoexploração* implica numa tomada de consciência, percebendo a resolução como parte integrante e resultante de um caminhar feito num processo de exploração de problemas. Já o termo *Proposiçãoexploração* implica numa tomada de consciência de perceber a proposição também como parte impactante, integrante e resultante de um caminhar realizado ao longo de um processo de exploração de problemas.

Andrade (2017) ressalta que, na proposta anterior, a proposição de problemas estava implícita ao processo, como fazendo parte de movimentos da problematização do processo. Nesse novo modelo, ligeiramente modificado, ela aparece de forma explícita. Assim, o pesquisador pontua que isso é um forte avanço na proposta no sentido de uma tomada de consciência da importância da proposição de problemas tanto no processo de resolução como no de exploração de problemas. O pesquisador acrescenta que ela pode ocorrer tanto antes como durante e depois ao processo de resolução e exploração de problema. Nessa pesquisa, a proposição de problemas ocorreu durante e depois ao processo de resolução e exploração de problema.

Metodologia

A pesquisa se situa numa abordagem qualitativa, visando a buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. A pesquisa qualitativa é o caminho que leva a escapar da mesmice. Lida e dá atenção às pessoas e às suas ideias, procura atribuir sentido a discursos e narrativas que estariam silenciosas (D'AMBRÓSIO, 2006).

A modalidade de pesquisa pode ser caracterizada como uma pesquisa pedagógica, na qual o professor é o pesquisador em sua própria sala de aula. De acordo com Lankshear e Knobel (2008, p.13), "a pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula e o principal pesquisador em qualquer trabalho de pesquisa pedagógica é o professor cuja sala de aula está sob investigação".

A metodologia de ensino-aprendizagem escolhida para trabalhar em sala de aula foi a de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ANDRADE, 1998; 2017), e o público-alvo foi uma turma do 2º ano do ensino médio da Escola Estadual do Ensino Fundamental e Médio Agenor Clemente dos Santos, localizada na cidade de Alagoinha-PB.

A sala foi organizada em grupos de três alunos e, em alguns casos, em duplas, com o intuito de um trabalho cooperativo e colaborativo. Destacamos, neste artigo, que um encontro corresponde ao total de duas aulas, cada uma com duração de, no máximo, 45 minutos.

Os dados foram levantados por meio de observações e registros dos materiais utilizados pelos alunos. Também fizemos uso de gravação sonora com a finalidade de coletar o máximo de evidências possíveis para obter mais clareza diante do que se propôs a investigar.

Na intervenção, o presente pesquisador agiu como professor-pesquisador, mas também com o papel de mediador e incentivador, trabalhando em sala de aula como professor regente e dando autonomia aos alunos na construção das ideias essenciais de Análise Combinatória.

Episódio de sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas

Aqui, trazemos um episódio de sala de aula sobre o tópico de Análise Combinatória que evidencia como ocorre uma aula na perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ANDRADE, 1998; 2017). Inicialmente, entregamos um problema para cada aluno, e eles iriam realizar um trabalho sobre ele. Os alunos reuniram-se em oito grupos, com três alunos e duas duplas. Durante a transcrição e análise dos dados, vamos denotar professor-pesquisador por PP e os grupos ou duplas por: G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9 e G10. Para a formalização do conceito do PFC, trabalhamos o seguinte problema:

Quadro 1: Problema dos códigos

Gerlane dispõe dos algarismos 1, 2, 3 e 4 e de uma moeda. Pretende fazer códigos compostos, inicialmente, por um número de dois algarismos, seguido por uma das faces da moeda. Quantos códigos diferentes ela pode criar?
a) Se os códigos fossem criados com algarismos distintos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?
b) Se os códigos fossem criados com números pares de dois algarismos seguidos de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?
c) Se os códigos fossem criados com números de quatro algarismos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?

Fonte: Silveira (2016, p. 84-85)

O problema tinha como objetivo trabalhar com procedimentos/processos que levam ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, como a construção da árvore de possibilidades, enumeração sistemática de todas as possibilidades, construção de tabelas, além da pretensão de formalizar a ideia essencial do PFC. Com o intuito de facilitar a visualização de todas as possibilidades, foi entregue aos alunos fichas enumeradas de 1 a 4 e uma moeda. O grupo G8 solicitou a ajuda do professor e questionou:

> *G8 (Aluno 1): Uma face da moeda... Como assim, professor?*
> *PP: Quais são as faces de uma moeda?*
> *G8 (Aluno 1): Cara ou coroa.*
> *PP: Correto.*

Com a questão levantada pelo grupo G8, o professor-pesquisador foi à lousa, explanou aos alunos que eles podiam denotar as faces da moeda da seguinte forma: C = cara e K = coroa. O grupo G10 questionou o professor-pesquisador:

> *G10: Como assim um número de dois algarismos?*

Desse modo, o professor-pesquisador sentiu a necessidade de ir novamente à lousa, pelo fato de perceber que alguns alunos não estavam entendendo o problema.

> *PP: Se um desses códigos fosse a senha da Wifi de internet, como vocês fariam para descobrir?*
>
> *Turma: Professor, a gente teria que saber quais são todas as senhas para ir testando até achar a correta.*
>
> *Turma: Professor, poderia ser 11 C, 12 C, 13 C e 14 C, 21 C...*
>
> *Turma: No caso, professor, basta trocar as posições dos números?*
>
> *PP: Isso!*

Na mediação, conseguimos expor situações cotidianas, como no diálogo anterior em que enfatizamos a necessidade de descobrir uma senha de internet. Percebemos, assim, que os alunos têm facilidade em fazer conexão da Matemática que está aprendendo com seus afazeres cotidianos. Esta atividade possibilita aos alunos perceberem que, quando os elementos são trocados, obtém-se um novo agrupamento. Essa ideia permite-lhes organizar os dados levando em consideração a ordem dos elementos, preparando para o estudo de outro conceito matemático. O grupo G8 dirigiu-se ao professor e afirmou:

> *G8 (Aluno 2): Professor,*

encontramos a resposta.

PP: E qual é?

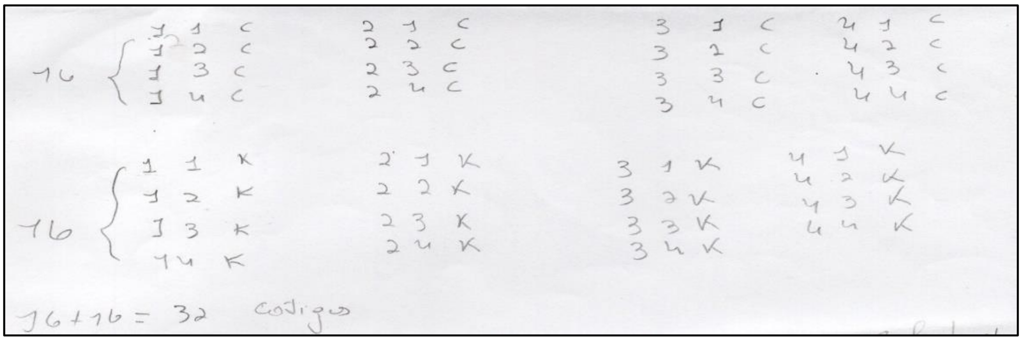
G8 (Aluno 1): 32 possibilidades.

PP: E como vocês fizeram?

G8: Fizemos todas as possibilidades.

O grupo G8 apresentou como procedimento/processo uma lista organizada de todas as possibilidades.

Figura 1 – Resolução do grupo G8 ao problema inicial



Fonte: Dados da pesquisa

Por meio do diálogo com o professor-pesquisador, o grupo G4 também chegou à resolução do problema.

G4: Professor, a resposta é 16.

PP: Como vocês fizeram?

G4 (Aluno 1): Fizemos todos os códigos que contém a face cara.

PP: E a face coroa?

G4 (Aluno 2): Coroa é um número?

PP: Não. Coroa é uma das faces da moeda.

G4 (Aluno 2): Então é duas vezes dezesseis.

PP: Por quê?

G4 (Aluno 2): Porque vai ter mais dezesseis coroas.

PP: Isso!

Notamos que a metodologia de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas colocou os alunos em um ambiente em que foi necessário refletir sobre o seu fazer ou sobre o seu pensar. Dessa forma, as atividades trabalhadas possibilitaram a evolução do processo metacognitivo. Isso ficou evidenciado durante os questionamentos do professor-pesquisador que exigia do aluno uma tomada de decisão, levando-o a refletir sobre o que fez ou estava fazendo. Percebemos que, ao explorar a capacidade do aluno de refletir sobre o processo de resolução do problema, permitiu-lhe obter resultados satisfatórios, como também uma aprendizagem com compreensão.

Apenas o grupo G3 não conseguiu resolver o problema inicial, apresentando a resolução parcialmente correta, já que o grupo listou algumas possibilidades. Os procedimentos/processos utilizados foram: enumeração sistemática de todas as possibilidades, utilização de tabelas e árvore de possibilidades. Estávamos interessados em evidenciar a utilidade do PFC na resolução desses problemas e, consequentemente, formalizar esse conceito matemático e, quando possível, retornar ao problema anterior. No entanto, percebemos que alguns alunos estavam com dificuldades no item (a), pelo fato de não terem compreendido o termo “distinto”, daí fomos à lousa e questionamos:

PP: O que é algo distinto?

Turma: Diferente. Nesse caso, algarismos diferentes.

PP: Isso!

O grupo G8 explanou o seguinte procedimento/processo para resolução do item (a), veja o diálogo a seguir:

G8 (Aluno 2): Professor, a resposta é 24.

PP: Como vocês resolveram?

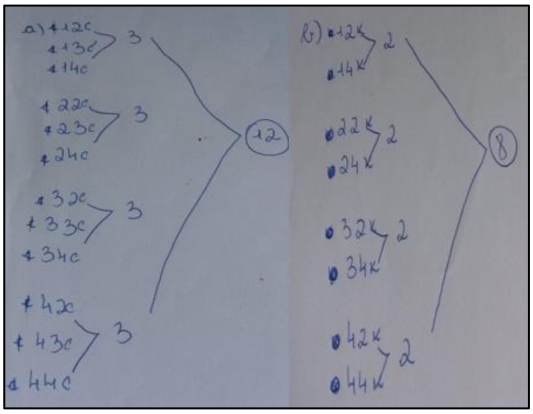
G8 (Aluno 2): No problema inicial, a resposta foi 32, mas tem 8 códigos que não são distintos, aí eu fiz: 32 – 8 = 24 possibilidades.

PP: Correto.

Percebemos que, aos poucos, os alunos foram se engajando nas discussões das atividades, já que lhes agradava a proposta de Exploração, Resolução e Proposição Problemas. Eles puderam refletir sobre o que estavam fazendo, retomando um problema anterior para chegar à resolução de um novo problema.

Apenas os grupos G3 e G9 não conseguiram resolver o item (a), apresentando a resolução parcialmente correta. Na verdade, utilizaram como procedimento/processo a enumeração sistemática de todas as possibilidades, mas listaram apenas 12 possibilidades. No item (b), apenas o grupo G3 não foi bem-sucedido na resolução do problema, propondo uma resolução parcialmente correta, utilizaram como procedimento a enumeração sistemática, obtendo 8 possibilidades. Na verdade, eles apresentaram apenas os códigos que contêm a face coroa (K).

Figura 2 – Resolução do grupo G3 aos itens (a) e (b)



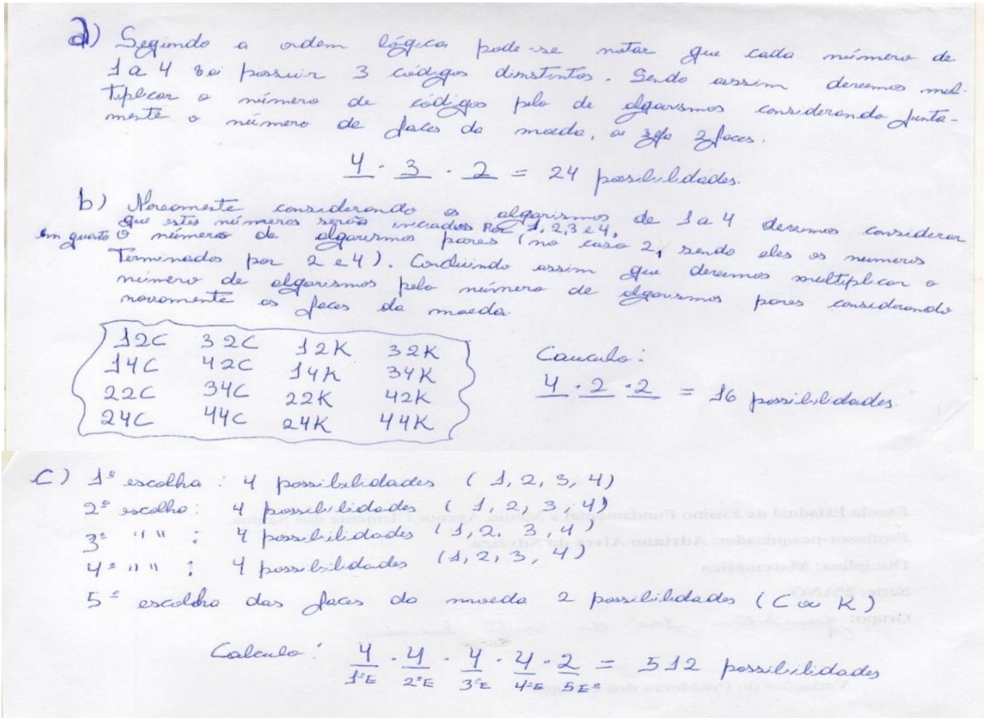
Fonte: Dados da pesquisa

Acreditamos que o erro decorreu da resolução do item (a), na qual o grupo colocou apenas os códigos terminados pela face cara (C). Nesse sentido, no item (b), eles apresentaram apenas os códigos terminados com a face coroa (K). Almeida (2010) observou, em sua pesquisa, o desenvolvimento do raciocínio combinatório no que se refere à enumeração sistemática de todos os agrupamentos. Esse procedimento/processo está sendo recorrente entre os alunos, principalmente quando temos uma quantidade pequena de agrupamentos.

No entanto, propusemos alguns problemas, nos quais esse procedimento/processo se tornaria uma atividade cansativa. Nosso interesse era implementar um novo conceito, fazendo com que os alunos conseguissem avançar no estudo da Combinatória. Além disso, acreditamos que problemas que possuem uma grande quantidade de agrupamentos podem ser importantes para que os alunos possam fazer generalizações, fazendo uma lista de alguns agrupamentos e observando padrões em sua formação.

Percebemos que o grupo G1 conseguiu observar padrões na formação dos códigos nos itens (a) e (b) e generalizou para uma quantidade maior de possibilidades, fazendo uso do PFC, resolveram o item (c) sem precisar recorrer a uma lista organizada de todas as possibilidades:

Figura 3 – Resolução do grupo G1 referente aos itens (a), (b) e (c)



Fonte: Dados da pesquisa

De modo geral, os procedimentos/processos utilizados levaram à enumeração de todas as possibilidades, fazendo relação com o problema inicial, a árvore de possibilidade e utilização de tabelas e o uso do PFC. Os grupos sentiram dificuldades na resolução do item (c), a maioria estava buscando enumerar todas as possibilidades. Aproveitando o raciocínio dos alunos, interviemos:

> PP: Pessoal, como está sendo o processo de resolução do item (c)?
>
> Turma: Professor, estamos fazendo, mas são muitas possibilidades.
>
> PP: Então, tente buscar algum padrão na formação de cada código.

O grupo G6 também conseguiu resolver o item (c), utilizando o PFC. Observe o diálogo:

> G6 (Aluno 2): Professor, a resposta da letra (b) é 16 possibilidades.
>
> PP: Certo. E do item (c)?
>
> G6 (Aluno 1): Aí, seriam muitas possibilidades.
>
> PP: Você vai ter que identificar o número de possibilidades para cada escolha.
>
> G6 (Aluno 1): E tem como?
>
> PP: Tem. O código é composto por cinco escolhas. Para a escolha do primeiro algarismo, existem quantas possibilidades?
>
> G6 (Aluno 2): 4 possibilidades.
>
> PP: E para escolha do segundo?
>
> G6 (Aluno 1): 4 possibilidades, e para escolha do terceiro e quarto também temos 4 possibilidades.
>
> PP: E para as faces da moeda?
>
> G6 (Aluno 1): 2 possibilidades.
>
> PP: Muito bem! E no que isso pode ajudar vocês?

Fomos atender aos outros grupos, depois o grupo G6 solicitou-nos:

G6 (Aluno 1): Professor, conseguimos resolver a letra (c).

PP: Como vocês resolveram?

G6 (Aluno 1): De acordo com aquele raciocínio que fizemos na letra (c), entendemos por que a resposta da letra (a) é 24 possibilidades. No caso, são 4 possibilidades para escolha do primeiro número, 3 possibilidades para escolha do segundo, já que o código é formado por números distintos e são duas faces da moeda, daí basta fazer $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades. Assim, para letra (c), temos: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 512$ possibilidades.

PP: Correto.

Ao fim da aula, fomos à lousa fazer uma discussão dos diversos procedimentos/processos utilizados pelos grupos na resolução dos problemas, questionamos os alunos sobre a sua validade, a fim de que eles entrassem em um consenso sobre sua resolução e as dos outros colegas. No entanto, como os grupos G1 e G6 já estavam explorando a ideia essencial do PFC em suas resoluções, evidenciamos, para a turma, o trabalho realizado por esses grupos, principalmente no item (c). Daí, retornamos para uma discussão sobre o problema inicial e os itens (a) e (b).

PP: Vamos verificar a validade das estratégias utilizada pelos G1 e G6. Voltando ao problema inicial, existem quantas possibilidades para escolha do primeiro número?

Turma: 4 possibilidades.

PP: E para escolha do segundo?

Turma: 4 possibilidades.

PP: E para escolha da moeda?

Turma: 2 possibilidades cara ou coroa.

PP: Então, são quantas possibilidades?

Turma: No caso, vai ser $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ possibilidades, que foi a resposta encontrada nas outras soluções.

PP: E para o item (a)? Para a escolha do primeiro algarismo, temos quantas possibilidades?

Turma: 4 possibilidades.

PP: E para escolha do segundo?

Turma: 4 possibilidades. Não, é 3 possibilidades.

PP: Por que é 4? Por que 3?

Turma: é 3, porque não podemos repetir o número utilizado na primeira escolha.

PP: E em relação à face da moeda?

Turma: São 2 possibilidades. Assim, temos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades.

PP: E para o item (b)? Quantas possibilidades para escolha do primeiro algarismo?

Turma: 4 possibilidades.

PP: E para escolha do segundo?

Turma: 2 possibilidades.

PP: Por quê?

Turma: Porque os números pares serão terminados em 2 ou 4.

PP: E para faces da moeda?

Turma: 2 possibilidades.

PP: Então, são quantas possibilidades?

Turma: No caso, vai ser $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ possibilidades.

Portanto, ao fim, ressaltamos o trabalho realizado pelos grupos, enfatizando as descobertas do grupo G1, que, ao observar padrões na formação dos códigos, fez uso do PFC, o que possibilitou, ao professor-pesquisador, formalizar esse conceito para a turma.

Conclusões

Percebemos que, durante a exploração dos problemas, as ideias essenciais de Análise Combinatória foram tomando forma e fazendo sentido para o aluno diante do processo de resolução dos problemas, chegando a uma resolução bem-sucedida ou não. O fato é que o surgimento de novos problemas levou à discussão de diversas ideias, ampliando uma gama de procedimentos/processos que foram utilizados no problema inicial, que deu suporte para a solução dos problemas seguintes. Nesse sentido, a resolução do problema inicial possibilitou, aos alunos, validar suas soluções via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Nota-se que os alunos fizeram relações, buscando dar significado às suas próprias ideias, desenvolvendo sua compreensão a partir do momento que refletiram sobre o que fizeram.

Durante a resolução dos problemas, notamos que os grupos foram criando identidade com alguns procedimentos/processos, implementando-os sempre que percebiam que era conveniente. Deste modo, notou-se o desenvolvimento do raciocínio combinatório, em que os alunos decidiam sobre a melhor forma de iniciar a resolução de um problema, listando todas as possibilidades de forma organizada. Além disso, o trabalho em sala de aula na perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas abriu possibilidades para que os alunos recorressem a um procedimento/processo diferente daquelas que citam as pesquisas, tal como retomar o problema anterior para chegar à resolução de um novo problema.

A mediação professor-grupo, professor-aluno e professor-turma subsidiaram diversas discussões e reflexões em sala de aula, o que fomentou novas compreensões acerca das ideias essenciais envolvidas no problema. É preciso ressaltar que o trabalho colaborativo entre os alunos dos grupos gerou diversas descobertas, pois, em alguns diálogos, viu-se esse trabalho promoveu avanços no raciocínio dos colegas de grupo que, posteriormente, apresentavam uma nova reflexão, possibilitando, ao fim, condições de chegar à resolução bem-sucedida do problema.

Os resultados evidenciam que, via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, foi possível acompanhar o crescimento dos alunos, uma vez que eles criaram suas próprias ideias para resolver um problema, e, consequentemente, encontraram múltiplos procedimentos/processos de resolução do problema; posteriormente, justificaram suas resoluções, participando, efetivamente, da construção do seu conhecimento. Concluímos enfatizando que a resolução de um problema gerava novos problemas, de modo que se exigia do aluno a responsabilidade de contribuir com novos trabalhos, novas reflexões, novas sínteses, como também com a proposição de outros problemas matemáticos, promovendo uma aprendizagem com compreensão das ideias essenciais de Análise Combinatória.

Referências

ALMEIDA, A. L. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática:** um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio. 2010. 166f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto/MG, 2010.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 1998.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemático no Cotidiano da Sala de Aula. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Orgs). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. 1. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-395.

BORBA, R. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais** [...]. Salvador - BA, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática: 1º e 2º ciclos. Brasília, DF: MEC, 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2002.

D'AMBRÓSIO, U. Prefácio In: BORBA, M.; ARAÚJO, J.L. (orgs.). 2. ed. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica**: do projeto à implementação. 1. ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FENANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

PESSOA, C. **Quem dança com quem**: o

desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º anodo Ensino Fundamental ao 3º anodo Ensino Médio. 2009. 267 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, 2009.

SILVA, A. P. **Ensino e Aprendizagem de Análise Combinatória Através da Resolução de Problemas:** um olhar para a sala de aula. 2013. 92f. (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande/PB, 2013.

SILVEIRA, A. A. **Análise em sala de aula:** uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas. 2016. 234f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande/PB, 2016.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. **Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio.** Revista de Educação Matemática, São Paulo, v. 17, p. 01-21, 01 de maio de 2020.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Problem posing and combinatory analysis: classroom vignettes. In: ICME 14 (TSG 17) THE 14TH INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION., 14, 2021, Shanghai, **Actas**... Shanghai, China, 2021. p. 1-4. Disponível em: <https://www.icme14.org/static/en/news/37.html?v=1646813795650>.

SOUZA, A. C. P. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**. 2010. 343f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 2010.

VARGAS, A. F. **O Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas.** 2009. 110f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Minas Gerais, 2009.

Adriano Alves da Silveira: Mestre em Educação Matemática. Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Alagoinha, Paraíba, Brasil. Endereço para correspondência: Sítio Mumbuca, Alagoinha, Paraíba, Brasil. E-mail: adriano.exatas@hotmail.com.

Silvanio de Andrade Doutor em Educação (Ensino de Ciências e Matemática) pela Universidade de São Paulo (USP), com Doutorado Sanduíche na University of Georgia, EUA. Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, Paraíba, Brasil. Endereço para correspondência: Rua Desembargador Trindade, 332, apto. 603, Centro, Campina Grande, Paraíba, Brasil. E-mail: silvanio@alumni.usp.br.