UTILIZAÇÃO DOS ESQUEMAS DA INTEGRAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS QUE TRATAM DE DISSEMINAÇÃO DE DOENÇAS

Use of integral schemes in the resolution of problems dealing with the dissemination of diseases

Janice Rachelli

Vanilde Bisognin

Resumo

Este estudo tem por objetivo analisar a compreensão do conceito de integral na resolução de problemas que tratam da disseminação de doenças, tendo a teoria APOS como aporte teórico. A pesquisa, de cunho qualitativo, foi desenvolvida com dez estudantes brasileiros de um curso de Mestrado Profissional em Matemática de uma instituição federal de ensino superior do estado do Rio Grande do Sul. A análise dos dados foi realizada com base na produção escrita dos estudantes. Os resultados obtidos indicam que os estudantes fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética do conceito de integral para os problemas propostos e que, o uso de problemas contextualizados, como os de disseminação de doenças, tornou-se um fator determinante para o entendimento da importância do estudo de conceitos e técnicas associadas ao Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras-chave: Conceito de integral. Técnicas de integração. Teoria APOS. Ensino e aprendizagem de Cálculo.

Abstract

This study aims to analyze the understanding of the concept of integral in solving problems that deal with the spread of diseases, having the APOS theory as a theoretical contribution. The qualitative research was carried out with ten Brazilian students from a Professional Master's Degree in Mathematics at a federal institution of higher education in the state of Rio Grande do Sul. Data analysis was performed based on the students' written production. The results obtained indicate that the students made the mental constructions indicated by the genetic decomposition of the integral concept for the proposed problems and that the use of contextualized problems, such as the dissemination of diseases, became a determining factor for understanding the importance the study of concepts and techniques associated with Differential and Integral Calculus.

Keywords: Integral concept. Integration techniques. APOS theory. Teaching and learning of Calculus.

Introdução

A resolução de problemas é um fator impulsionador para o surgimento de conceitos, procedimentos e teorias matemáticas. Assim ocorreu com as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral, as quais foram elaboradas para resolver problemas, cujo aparecimento ocorreu no final do século XVII e no século XVIII. Muitos dos problemas, a partir dos quais os matemáticos elaboravam e testavam seus métodos, originavam-se da observação simples de processos mecânicos ou de situações do próprio ambiente em que viviam e, serviram para a elaboração de novas ferramentas matemáticas para o estudo da natureza e de controle dos processos naturais (BARON, 1985). Destes problemas, podemos citar os problemas da catenária, da braquistócrona e da corda vibrante; problemas da geometria, da astronomia e da mecânica.

Para o cálculo integral, uma das técnicas matemáticas para a resolução de problemas envolve os métodos de integração, como o da integração por substituição, integração por partes e da separação de variáveis, estudados por Johann Bernoulli (1667-1748) e Leonhard Euler (1707-1783), dentre outros (BARON, 1985).

Atualmente, estes métodos são estudados em disciplinas de Cálculo nas universidades e são úteis na resolução de diversos problemas associados as ciências exatas e tecnológicas. A determinação de áreas, volumes, centro de massa, posição de uma partícula, variação de uma população, são alguns exemplos em que os esquemas da integral podem ser utilizados.

Sendo assim, propomos, neste estudo, uma alternativa para o ensino e aprendizagem de Cálculo, por meio da resolução de problemas que tratam da disseminação de doenças, em que as técnicas do cálculo integral são necessárias para a resolução e a análise da solução. Utilizar esquemas sobre a integral, como por exemplo, as técnicas de integração, a integração de taxas e a interpretação dos dados, são de fundamental importância para o entendimento do comportamento de algumas doenças. Ao utilizar esses problemas, temos como questão de pesquisa: Quais são os esquemas utilizados pelos estudantes para a resolução de problemas que tratam da disseminação de doenças?

A partir daí estabelecemos como objetivo: analisar a construção de esquemas da integral na resolução de problemas que envolvem a disseminação de doenças por estudantes de um curso de Mestrado Profissional em Matemática. Os problemas propostos visam fornecer um processo consistente de aprendizagem, que facilite a construção de conceitos e a compreensão de procedimentos e que propicie o entendimento sobre as conexões entre a matemática e outras áreas do conhecimento.

Para avaliar a compreensão de conceitos do Cálculo Integral, tomamos como referencial, a teoria APOS de Ed Dubinsky e seus colaboradores (DUBINSKY, 1986, 1991; ARNON et al., 2014). Esta teoria vem sendo utilizada por pesquisadores, dos quais podemos citar: Asiala, et al. (2001); Boigues, Llinares e Estruch (2010); Sánchez-Matamoros, García e Llinares (2013); Maharaj (2014); Trigueros e Martinez-Planell (2015); Rachelli e Bisognin (2018, 2019, 2020), dentre outros, como forma de avaliar a compreensão de conceitos matemáticos do Cálculo pelos estudantes. Destes estudos, somente as pesquisas de Boigues, Llinares e Estruch (2010) e Maharaj (2014) tratam sobre a construção dos conceitos de integral tendo a teoria APOS como referencial teórico.

O ensino e a aprendizagem da integral também vêm sendo discutidos em pesquisas que tratam sobre as dificuldades de aprendizagem em nível universitário (RETANA, 2013) e que utilizam alternativas de ensino e aprendizagem, como por exemplo, o uso de tarefas matemáticas (PAULIN; RIBEIRO, 2021; TREVISAN; ARAMAN, 2021), aprendizagem baseada em problemas (SOUZA; FONSECA, 2017), a utilização de problemas interdisciplinares (RACHELLI; DENARDI; BISOGNIN, 2022) e, objetos de aprendizagem (MÜLLER; GONÇALVES; MÜLLER, 2013). Nesses estudos, os autores abordam dificuldades que são observadas no estudo da integral e identificam que os recursos utilizados, em que diferentes métodos foram explorados em sala de aula, facilitaram o entendimento dos conceitos, o que permitiu aos estudantes construir o conhecimento matemático, reflexionar sobre ele e gerar a compreensão.

Ademais, o estudo realizado por Lima, Bianchini e Gomes (2017) indica que nas investigações, realizadas pelos membros do Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior GT04 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, no que se refere ao ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral de funções de uma variável, há uma predominância de estudos sobre a derivada, enquanto há um número bastante reduzido a respeito do estudo de integrais, sendo necessário que mais pesquisas sobre o assunto sejam realizadas. Esta observação de que não há um número muito grande de trabalhos que tratem sobre o Cálculo Integral, também foi por nós evidenciada na medida em que buscamos, na literatura, pesquisas com esta temática.

Com a finalidade de dar resposta a questão da pesquisa, apresentamos, no que segue, os principais aspectos da teoria APOS e descrevemos os aspectos metodológicos empregados neste estudo. Após, apresentamos a análise dos dados e os resultados, em que, buscamos verificar se as construções mentais indicadas pela decomposição genética foram realizadas pelos estudantes na resolução dos problemas. Por fim, apresentamos as considerações finais.

Referencial teórico

O referencial teórico que serviu de base para a realização deste estudo foi pautado na teoria APOS de Ed Dubinsky e seus colaboradores. Com base nas ideias desenvolvidas por Piaget (1971, 1995) para a construção do conhecimento, a teoria APOS trata do estudo dos processos pelos quais o conhecimento matemático em nível universitário é construído e da descrição da natureza das entidades cognitivas construídas nestes processos.

Duas ideias são chaves nesse modelo teórico: a de construções mentais (ação, processo, objeto e esquema) e a de mecanismos mentais de abstração reflexiva (interiorização, coordenação, encapsulação, generalização e reversibilidade) no qual os indivíduos realizam essas construções (DUBINSKY, 1991).

Nesta perspectiva, a compreensão de uma noção matemática geralmente inicia com ações que envolvem construções cognitivas associadas a manipulações algébricas tomadas como algo externo ao indivíduo que as manipula e que podem ser realizadas passo a passo. Os processos são interiorizações dessas ações que exigem um maior nível de generalização já que, nesta transformação, o indivíduo pode executar a ação, refletir e compor os passos sem ter que os realizar, além de pular etapas, como também revertê-las. A interiorização é o mecanismo que possibilita fazer essa mudança mentalmente. Os processos também podem ser resultados da coordenação de dois ou mais processos. Quando o indivíduo se torna consciente do processo como um todo, ele encapsulou o processo em um objeto cognitivo. Uma vez que processos são encapsulados em objetos mentais, eles podem ser desencapsulados, e voltar ao processo que deu origem ao objeto.

Um esquema, para um determinado conceito matemático, é a coleção de ações, processos, objetos e outros esquemas que estão ligados na mente do indivíduo e que permitem a resolução de um problema a partir desse conceito. Um esquema não pode ser pensado de modo estático, mas sim, como uma atividade dinâmica feita pelo sujeito; consiste em uma estrutura matemática formada pelos elementos matemáticos e as relações que se estabelecem entre eles que podem ser evocados na resolução de um problema (SANCHES-MATAMOROS; GARCÍA; LLINARES, 2008). Além disso, a existência de um esquema é inseparável de sua contínua construção e reconstrução. Os esquemas devem ser coordenados para formar estruturas que serão utilizadas na resolução de problemas matemáticos. A generalização ocorre quando o indivíduo aplica um determinado esquema a outros contextos, e a reversibilidade, quando o indivíduo é capaz de reverter o mecanismo gerador de um objeto.

Por outro lado, o modelo teórico APOS permite conjecturar trajetórias hipotéticas de aprendizagem as quais consistem em uma descrição do tipo de construções cognitivas que se espera que os estudantes realizem a fim de aprender um conceito matemático específico. Essas trajetórias hipotéticas de aprendizagem se denominam decomposição genética de um conceito matemático. Geralmente começa como uma hipótese, tendo como base as experiências dos pesquisadores no ensino e aprendizagem, o conhecimento sobre a teoria APOS, os conhecimentos matemáticos, o desenvolvimento histórico do conceito e as pesquisas publicadas anteriormente (ARNON et al., 2014). A decomposição genética de um conceito matemático é particular de cada indivíduo e pode alterar-se de acordo com o momento. Apesar das diferenças individuais, as trajetórias de aprendizagem indicam uma trajetória possível de aprendizagem do estudante para a formação do conceito. Sendo assim, devem ser consideradas na elaboração de atividades de ensino que ao serem implementadas fornecem uma oportunidade para coleta de dados, geralmente sob a forma de instrumentos escritos e/ou entrevistas. É importante ressaltar que a decomposição genética de um conceito não é única, visto que depende das observações e experiências dos pesquisadores.

Cabe destacar, que em todo o processo de aprendizagem, é desejável que os estudantes atinjam a estrutura cognitiva de esquema, que, mediante ações, processos, objetos e outros esquemas, o estudante pode evocar para a resolução de um determinado problema. De acordo com Dubinsky (1991), a principal implicação para a educação que a teoria APOS pode proporcionar é que a preocupação deve ser com a construção de esquemas pelos alunos para que atinjam a compreensão dos conceitos. Assim, cabe ao professor motivar os alunos a fazer tais construções e ajudá-los nesse processo.

Aspectos Metodológicos

Do ponto de vista metodológico, a presente investigação segue os pressupostos de uma pesquisa qualitativa de caráter descritivo e interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 2013), que foca no estudo das estruturas mentais utilizadas pelos estudantes na resolução de problemas que envolvem os esquemas da integral.

Tal metodologia adequa-se ao propósito deste estudo uma vez que uma pesquisa qualitativa possui as seguintes características: a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; este tipo de investigação é descritivo, uma vez que os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e os resultados escritos contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação; os investigadores que utilizam este tipo de metodologia devem dar mais ênfase ao processo do que ao resultado; os dados recolhidos devem ser analisados de forma indutiva, ou seja, as abstrações são construídas à medida que os dados que foram recolhidos vão se agrupando; e, por último, o investigador interessa-se, essencialmente, por tentar perceber o significado que os participantes atribuem às suas experiências (BOGDAN; BIKLEN, 2013). Tais características estão presentes neste estudo, uma vez que os dados foram coletados em sala de aula, sendo um dos pesquisadores o responsável pela disciplina e, a análise foi realizada seguindo o modelo teórico APOS, buscando descrever e interpretar as construções mentais utilizadas pelos estudantes na resolução dos problemas.

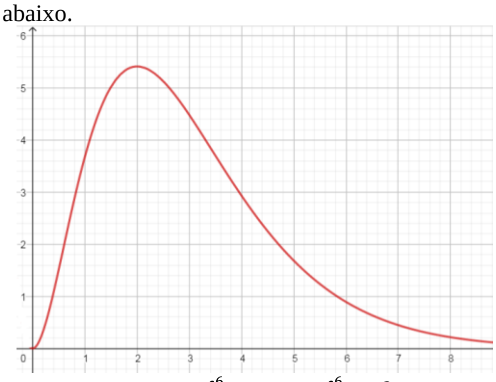
Participaram da pesquisa dez estudantes brasileiros de um curso de Mestrado Profissional em Matemática de uma instituição federal de ensino superior do estado do Rio Grande do Sul, matriculados em uma disciplina que trata de aspectos teóricos e procedimentais do Cálculo. Os estudantes aceitaram participar da pesquisa e assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Em nossa análise, os estudantes serão denominados de E1, E2, E3,..., E10.

Para a coleta de dados, utilizamos dois problemas que abordam o estudo da integral de uma função. Tais problemas buscaram: resolver integrais buscando dar significado aos resultados obtidos e, interpretar os resultados obtidos de forma geométrica, numérica e algébrica.

O Problema 1 está apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Problema 1

Suponha que o número de pessoas infectadas por uma doença (em milhares/mês) em função do tempo x (em meses) pode ser expresso por $f(x) = 10\,x^2 \cdot e^{-x}$ com $x \geq 0$.
O gráfico desta função está representado na figura abaixo.



a) Calcule a integral $\int_0^6 f(x)dx = \int_0^6 10x^2e^{-x}dx$.
b) Explique o que este valor representa algebricamente e geometricamente.

Como podemos observar, o Problema 1 trata da resolução de uma integral definida, em que a técnica de integração por partes, além da integração por meio de substituição de variáveis e integrais imediatas, devem ser utilizadas. Também é necessário que os estudantes avaliem o significado da integral definida.

Na Figura 2, está apresentado o Problema 2.

Figura 2 – Problema 2

Suponha que a taxa de disseminação de uma doença é dada por

$$\frac{dy}{dt} = 2y(1-y) \text{ com } y(0) = 0{,}25$$

onde y representa a proporção de indivíduos infectados por uma doença e que podem infectar os outros, $1-y$ é a proporção de indivíduos que não tem a doença, mas são suscetíveis, $\alpha = 2$ é o fator de proporcionalidade e $y(0) = 0{,}25$ é a proporção inicial de indivíduos infectada.

a) Resolva o problema de valor inicial encontrando $y = y(t)$.

b) Mostre que $y(t) \to 1$ quando $t \to \infty$. O que isto significa?

c) Esboce, com o auxílio do GeoGebra, o gráfico de $y = y(t)$.

Neste problema, torna-se necessário conhecer a técnica da separação de variáveis na resolução de equações diferenciais, bem como, técnicas de resolução de integrais indefinidas, como a de frações parciais.

Em ambos os problemas, é necessário que o estudante tenha em mente o esquema de funções, de limites de funções e de derivadas, os quais são considerados como pré-requisitos no estudo da integral.

O Problema 2, faz referência a um modelo simples que serve para descrever a disseminação de doenças. A utilização de métodos matemáticos para estudar a disseminação de doenças contagiosas vem desde a década de 1760, quando, por exemplo, Daniel Bernoulli fez um trabalho relativo à varíola (BOYCE; DIPRIMA, 2010).

Assim, com estes dois problemas, buscamos uma alternativa de ensino e aprendizagem do Cálculo, que prepare os estudantes a inserir os conhecimentos do Cálculo na resolução de problemas, como também, a partir dos problemas propostos, aplicar os conhecimentos próprios da disciplina na compreensão de problemas reais, como é o caso de epidemias.

Em função do ensino remoto, devido a pandemia de Covid-19, a coleta de dados se deu por meio do envio de arquivo pelos estudantes com a resolução dos problemas propostos, via Moodle. Os problemas foram enviados e discutidos, em momentos diferentes do andamento da aula, na medida em que os conteúdos iam sendo abordados em sala de aula virtual via Google Meet.

Análise dos Dados e Resultados

Como proposto na teoria APOS (ARNON et al., 2014), na análise dos dados é necessário verificar se as construções mentais indicadas pela decomposição genética foram realizadas pelos estudantes na resolução dos problemas. Sendo assim, inicialmente, elaboramos a decomposição genética para o esquema da integral, em que conjecturamos trajetórias hipotéticas de aprendizagem com as descrições do tipo de construções cognitivas que se espera que os estudantes realizem na resolução dos problemas.

Para determinar a decomposição genética, levamos em conta a evolução histórica, buscando resgatar a resolução de problemas e, a forma como os conceitos, proposições e teoremas, que fazem parte do estudo da integral, são tratados em livros texto de Cálculo. Também, revisamos alguns modelos propostos em outras pesquisas similares como a de Boigues, Llinares e Estruch (2010) e de Maharaj (2014) que tratam do conceito de integral.

Assim, a partir dos estudos anteriores e tendo em conta, a experiência como professores de disciplinas de Cálculo e os problemas propostos, estabelecemos uma decomposição genética, contendo uma descrição das construções que o estudante precisa realizar como forma de desenvolver ações, processos, objetos e esquemas, fundamentais para a compreensão do conceito de integral, cujos elementos estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1 – O esquema da integral

Estrutura mental	Descrição
Ação	Encontra a integral de funções simples, cujas regras são dadas de forma simbólica. Utiliza manipulações algébricas no cálculo da integral.
Processo	Encontra a integral de funções, por meio do estudo de sua estrutura, detectando qual a regra de integração deve ser usada.
Objeto	Realiza ações mentais ou escritas sobre a estrutura da função dada que permite a integração: visualiza o integrando $h(x)$ como um objeto que é produto de $g'(x)$ pela composição de duas funções, $h(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$ na qual a técnica da substituição pode ser aplicada; visualiza o integrando $h(x)$como um objeto que é produto de duas funções, $h(x) = f(x) \cdot g'(x)$ na qual a técnica da integração por partes pode ser aplicada;visualiza o integrando como um objeto que é uma função racional do tipo $h(x) = \frac{1}{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}$ e utiliza a técnica das frações parciais para resolver a integral.
Esquema	Utiliza o conceito de integral definida para a interpretação de áreas e da variação total da função Utiliza o conceito de integral indefinida para obter a antiderivada da função integrando.

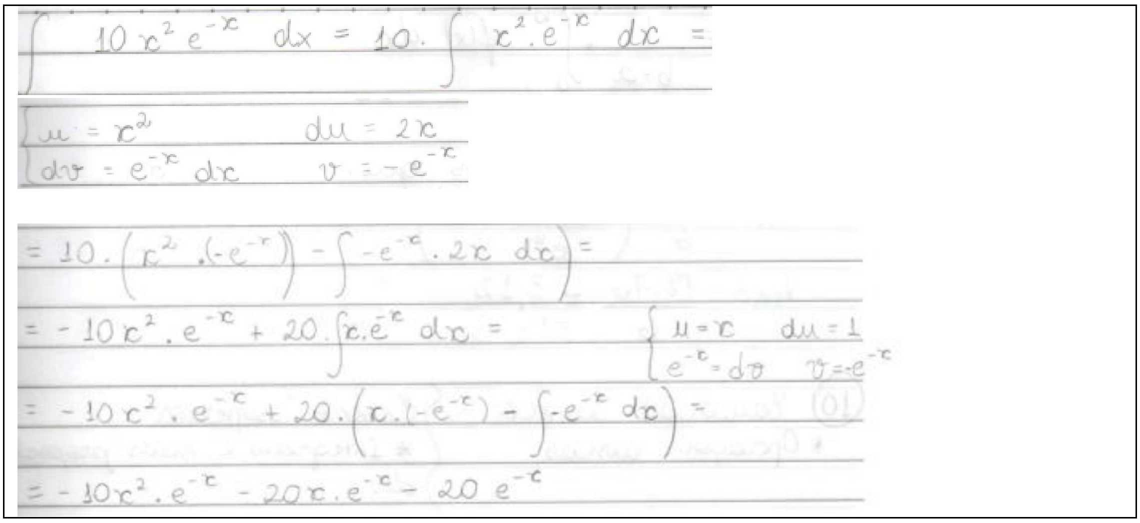
Fonte: Elaborada pelas autoras.

Como podemos observar, na Tabela 1, para que o estudante construa o esquema de integral é importante que ele organize ações, processos e objetos indicados para a integral e os vincule em uma estrutura coerente. Esta estrutura inclui várias interpretações da integral em diferentes contextos e técnicas possíveis para encontrar a integral de vários tipos de funções, aplicar a técnica da substituição, da integração por partes e de frações parciais, interpretar a área sob o gráfico da função em um intervalo como a integral definida, determinar a variação total de uma função em um intervalo como uma integral quando é fornecida a taxa de variação da função.

A análise dos dados foi realizada com base na produção escrita dos estudantes nos problemas propostos, em que utilizamos a decomposição genética para a integral, estabelecida na Tabelas 1, para avaliar as construções mentais desenvolvidas pelos estudantes. Aqui serão descritas as construções elaboradas por dois estudantes, uma vez que as demais seguem um padrão semelhante de desenvolvimento.

Na Figura 4, podemos observar a construção feita pelo estudante E3 na resolução do Problema 1 (a).

Figura 4 – Resolução do Problema 1/Cálculo da integral



$$\int 10x^2 e^{-x}\,dx = 10.\int x^2.e^{-x}\,dx =$$

$$\begin{cases} u = x^2 & du = 2x \\ dv = e^{-x}\,dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$= 10.\left(x^2.(-e^{-x}) - \int -e^{-x}.2x\,dx\right) =$$

$$= -10x^2.e^{-x} + 20.\int x.e^{-x}\,dx = \quad \begin{cases} u = x & du = 1 \\ e^{-x} = dv & v = -e^{-x} \end{cases}$$

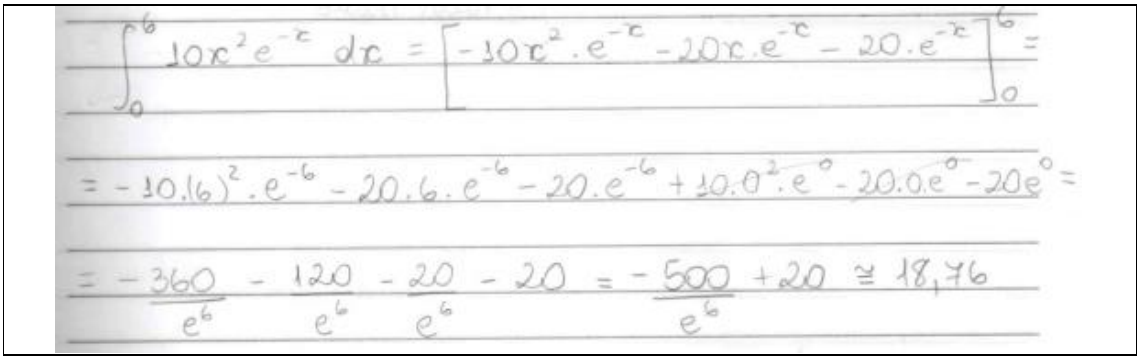
$$= -10x^2.e^{-x} + 20.\left(x.(-e^{-x}) - \int -e^{-x}\,dx\right) =$$

$$= -10x^2.e^{-x} - 20x.e^{-x} - 20\,e^{-x}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Neste caso, o estudante E3 identifica o integrando $10\ x^2e^{-x}$ como um objeto que é produto da constante 10, pelas duas funções, $f(x) = x^2$ e $g'(x) = e^{-x}$, e aplica a técnica da integração por partes corretamente, duas vezes. Somente, o que faltou em sua resposta foi incluir uma constante no resultado da integral indefinida. Em seguida, utiliza a antiderivada encontrada para resolver a integral definida, por meio do teorema fundamental do Cálculo (Figura 5).

Figura 5 – Resolução do Problema 1/Teorema fundamental do Cálculo



$$\int_0^6 10x^2e^{-x}\,dx = \left[-10x^2.e^{-x} - 20x.e^{-x} - 20.e^{-x}\right]_0^6 =$$

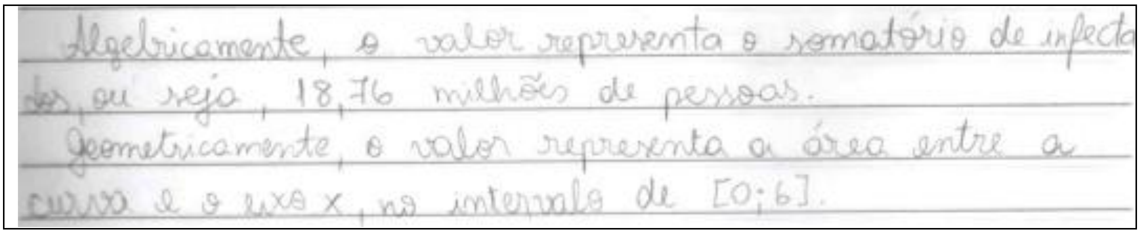
$$= -10.(6)^2.e^{-6} - 20.6.e^{-6} - 20.e^{-6} + 10.0^2.e^{0} - 20.0.e^{0} - 20e^{0} =$$

$$= -\frac{360}{e^6} - \frac{120}{e^6} - \frac{20}{e^6} - 20 = -\frac{500}{e^6} + 20 \cong 18{,}76$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Observa-se que o estudante utilizou o esquema da integral definida, por meio do teorema fundamental do Cálculo, para calcular a integral $\int_0^6 10x^2e^{-x}dx$. Com os dados obtidos em (a), o estudante utiliza esquemas do conceito de integral definida para a interpretação da variação total da função e de áreas de regiões no plano delimitada pelo gráfico da função no intervalo especificado (Figura 5).

Figura 5 – Resolução do Problema 1/Interpretação

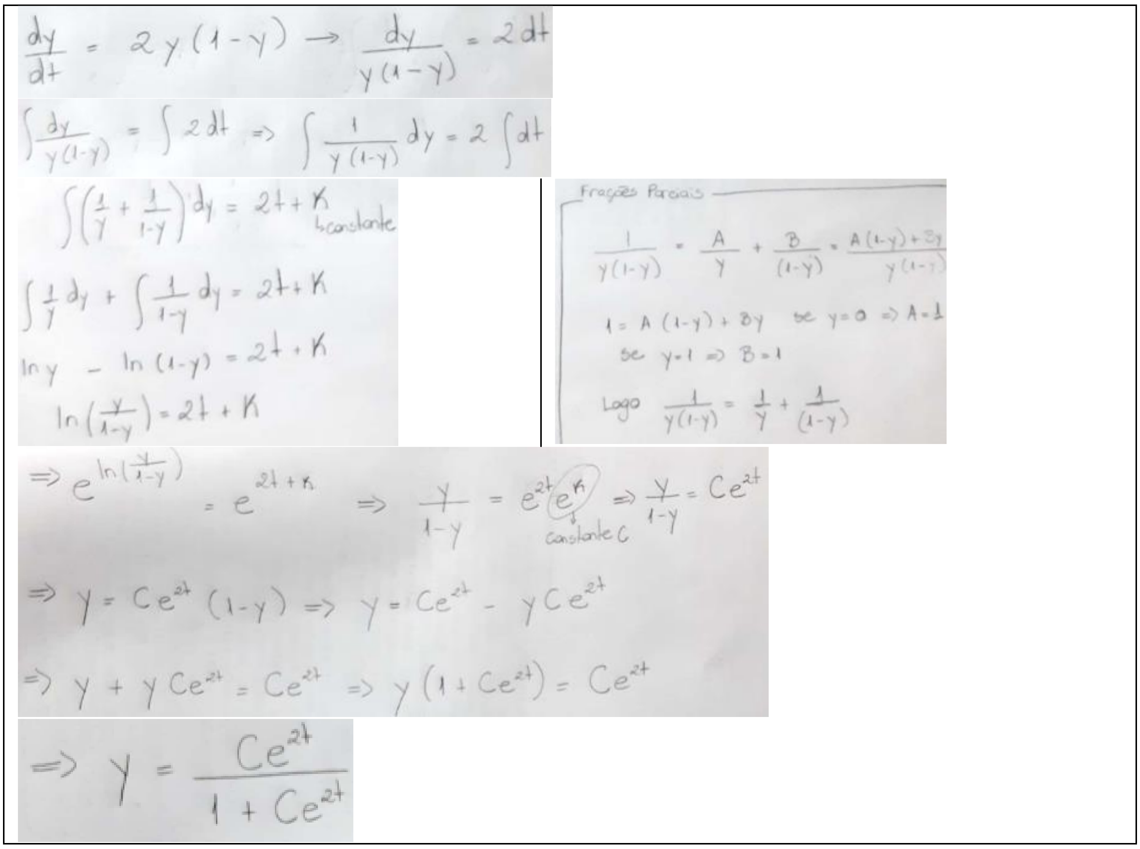

Algebricamente, o valor representa o somatório de infectados, ou seja, 18,76 milhões de pessoas.
Geometricamente, o valor representa a área entre a curva e o eixo x, no intervalo de [0;6].

Fonte: Dados da pesquisa.

Sendo assim, com a construção de ações e processos na visualização de que o objeto matemático a ser integrado é produto de duas funções, na qual a técnica da integração por partes deve ser aplicada e, com a obtenção correta da antiderivada, do uso do teorema fundamental do Cálculo e da interpretação do resultado obtido, entendemos que o estudante E3 realizou as construções mentais estabelecidas na decomposição genética (Tabela 1).

Para o Problema 2, selecionamos a resolução efetuada pelo estudante E8 para a nossa análise (Figura 6).

Figura 6 – Resolução do Problema 2/Resolução da equação diferencial


$$\frac{dy}{dt} = 2y(1-y) \rightarrow \frac{dy}{y(1-y)} = 2dt$$

$$\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int 2dt \Rightarrow \int \frac{1}{y(1-y)}\, dy = 2\int dt$$

$$\int\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy = 2t + \underbrace{K}_{\text{constante}}$$

$$\int \frac{1}{y}\, dy + \int \frac{1}{1-y}\, dy = 2t + K$$

$$\ln y - \ln(1-y) = 2t + K$$

$$\ln\left(\frac{y}{1-y}\right) = 2t + K$$

Frações Parciais

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{(1-y)} = \frac{A(1-y)+By}{y(1-y)}$$

$1 = A(1-y) + By$ se $y=0 \Rightarrow A=1$

se $y=1 \Rightarrow B=1$

Logo $\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{(1-y)}$

$$\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)} = e^{2t+K} \Rightarrow \frac{y}{1-y} = e^{2t}\underbrace{e^{K}}_{\text{constante } C} \Rightarrow \frac{y}{1-y} = Ce^{2t}$$

$$\Rightarrow y = Ce^{2t}(1-y) \Rightarrow y = Ce^{2t} - yCe^{2t}$$

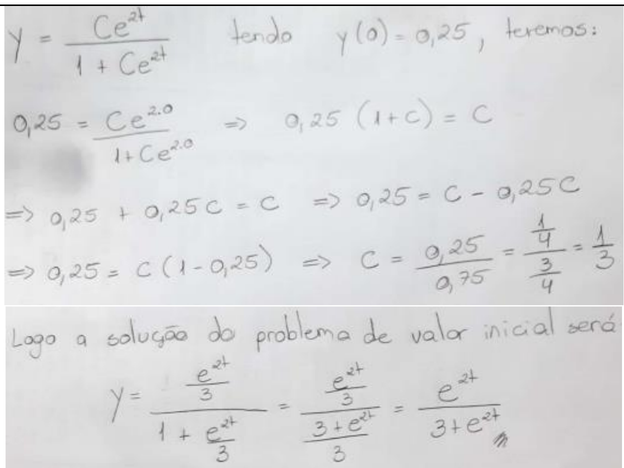
$$\Rightarrow y + yCe^{2t} = Ce^{2t} \Rightarrow y(1+Ce^{2t}) = Ce^{2t}$$

$$\Rightarrow y = \frac{Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}}$$

Fonte: Dados da pesquisa.

Como podemos observar, o estudante E8 resolveu o Problema 2 (a), por meio da separação de variáveis, visualizando um dos integrandos como um objeto que é uma função racional em que é necessário utilizar a técnica das frações parciais, por meio de manipulações algébricas, para resolver a integral. Após, utilizou conhecimentos prévios sobre funções exponenciais e logaritmos para chegar à solução geral da equação dada. A partir daí utilizou os dados sobre a condição inicial para encontrar o valor da constante de integração e obter a solução do problema de valor inicial (Figura 7).

Figura 7 – Resolução do Problema 2/Condição inicial


$y = \frac{Ce^{2t}}{1+Ce^{2t}}$ tendo $y(0) = 0,25$, teremos:

$0,25 = \frac{Ce^{2.0}}{1+Ce^{2.0}} \Rightarrow 0,25(1+C) = C$

$\Rightarrow 0,25 + 0,25C = C \Rightarrow 0,25 = C - 0,25C$

$\Rightarrow 0,25 = C(1-0,25) \Rightarrow C = \frac{0,25}{0,75} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

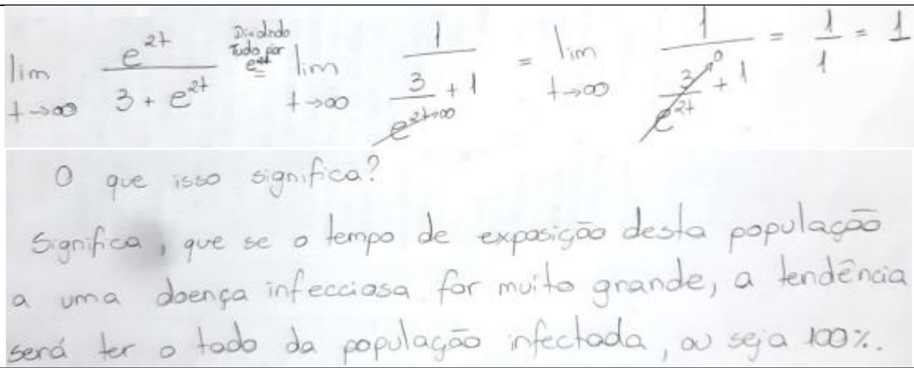
Logo a solução do problema de valor inicial será

$y = \frac{\frac{e^{2t}}{3}}{1+\frac{e^{2t}}{3}} = \frac{\frac{e^{2t}}{3}}{\frac{3+e^{2t}}{3}} = \frac{e^{2t}}{3+e^{2t}}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar o comportamento da função quando $t \to \infty$, Problema 2 (b), o estudante E8, utiliza os esquemas de limites, previamente estabelecidos e, interpreta o resultado indicando que a longo prazo a tendência é ter toda a população infectada (Figura 8).

Figura 8 – Resolução do Problema 2/Cálculo do limite e significado


$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{2t}}{3+e^{2t}} \underset{\text{Dividindo tudo por } e^{2t}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{e^{2t+\infty}}+1} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\cancel{\frac{3}{e^{2t}}}^{0}+1} = \frac{1}{1} = 1$

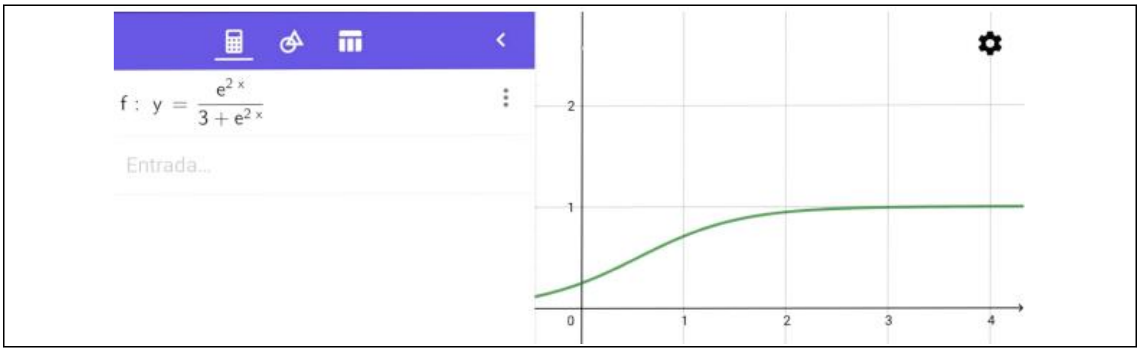
O que isso significa?

Significa, que se o tempo de exposição desta população a uma doença infecciasa for muito grande, a tendência será ter o todo da população infectada, ou seja 100%.

Fonte: Dados da pesquisa.

Para elaborar o gráfico da solução do problema de valor inicial foi utilizado o GeoGebra, em que pode ser observado as características da função, incluindo o valor inicial e o seu comportamento (Figura 9).

Figura 9 – Resolução do Problema 2/Construção do gráfico



Fonte: Dados da pesquisa.

Após a análise da resolução do Problema 2, pelo estudante E8, foi possível identificar as construções mentais organizadas para o estabelecimento de ações, processos e objetos na construção do esquema da integral indefinida, utilizados na resolução e interpretação de um problema envolvendo a disseminação de doenças. Para tanto, o estudante, inicialmente, desenvolveu ações ao identificar a necessidade da separação de variáveis e, processos e objeto, no estudo da estrutura da integral, detectando que além de uma integral imediata, uma das regras de integração a ser usada, é de frações parciais. Por meio da solução obtida, o estudante consegue estabelecer o esquema da integral indefinida, por meio da obtenção da função que representa a proporção de indivíduos infectados por uma doença e analisar seu comportamento utilizando o esquema de limites de funções.

De uma forma geral, processos de interiorização, coordenação, encapsulação e generalização foram observados, por meio dos escritos dos estudantes, na resolução dos problemas 1 e 2, na medida em que, eles utilizaram conhecimentos sobre os conceitos de integral indefinida e definida, o teorema fundamental do Cálculo e técnicas de integração e, interpretaram os dados obtidos dando significado aos problemas propostos.

Acreditamos que, o fato de utilizarmos problemas que permitem a interpretação dos dados em situações que são modelos no estudo de doenças, favoreceu o entendimento do significado da integral, tanto definida quanto indefinida e, evidenciou a importância da utilização de técnicas de integração. Fato este que nem sempre é abordado no estudo da integral, tanto em cursos de graduação, quanto na pós-graduação, em que, geralmente, os conceitos são tratados de forma teórica dando ênfase as técnicas.

Considerações Finais

Neste artigo, apresentamos os resultados de uma pesquisa que tem por objetivo analisar a construção de esquemas da integral na resolução de problemas que envolvem a disseminação de doenças. O estudo, desenvolvido com estudantes de um curso de Mestrado Profissional em Matemática, está baseado em um processo de aprendizagem que vise a construção de conceitos e a compreensão de procedimentos, utilizados em problemas contextualizados entre a matemática e outras áreas do conhecimento.

Os resultados obtidos, indicam, que os estudantes fizeram as construções mentais indicadas pela decomposição genética do conceito de integral para os problemas propostos. Conforme descrevemos, a resolução dos problemas se deu por meio do desenvolvimento de ações, processos, objetos e esquemas necessários ao entendimento do conceito de integral definida e indefinida em que os mecanismos de interiorização, coordenação, encapsulação e generalização se fizeram presentes na mente dos sujeitos na medida em que suas respostas aos problemas propostos foram sendo formuladas e apresentadas.

Além do mais, as informações obtidas por meio dos registros dos estudantes, fornecem outra contribuição, ao mostrar que o uso de problemas contextualizados, como os de disseminação de doenças, tornou-se um fator determinante para o entendimento da importância do estudo de conceitos e técnicas associadas ao Cálculo Diferencial e Integral. Sendo assim, acreditamos que muitas das dificuldades apresentadas pelos estudantes no estudo do Cálculo, podem ser superadas, quando se consideram teorias que estão associados à construção do conhecimento, como no caso, a teoria APOS, como também, a utilização de problemas que tratam não somente das técnicas associadas ao estudo da integral, mas de seu significado. Cabe destacar que a efetiva compreensão de conceitos envolve não apenas o conhecimento de uma definição e de seus teoremas, mas a percepção da relação entre conceitos e de sua utilização para resolver problemas.

Referências

ARNON, I. et al. **APOS Theory**: A framework for research and curriculum development in Mathematics Education. New York: Springer, 2014.

ASIALA, M. et al. The development of students' graphical understanding of the derivative. **Research in Collegiate Mathematics Education**, p. 1-37, 2001.

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: origens e desenvolvimento do Cálculo. O Cálculo no século XVIII: Técnicas e Aplicações. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1985.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Porto: Porto, 1994.

BOIGRES, F. J.; LLINARES, S.; ESTRUCH, V. D. Desarrollo de un esquema de la integral definida em estudiantes de ingenierias relacionadas com las ciências de la naturaleza. **RELIME**, Ciudad de México (México), v. 13, n. 3, p. 255-282, 2010.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

DUBINSKY, E. Applying a piagetian perspective to post-secondary mathematics education. In: **Secundaria EducacionMatematicas**, v. 3, n. 8, 1986.

DUBINSKY, E. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, D. (Org.) **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

LIMA, G. L.; BIANCHINI, B. L.; GOMES, E. Cálculo e Análise: mapeamento das pesquisas do GT04 - Educação Matemática no Ensino Superior. **VIDYA**, Santa Maria (RS), v. 37, n. 2, p. 314-334, 2017.

MAHARAJ, A. An APOS Analysis off Natural Science Students' Understanding of Integration. **REDIMAT**. **Journal of Research in Mathematics Education**, Estados Unidos, v. 3, n. 1, p. 54-73, 2014.

MÜLLER, M. G.; GONÇALVES, N. S.; MÜLLER, T. J. Integral definida: trabalhando conceito e aplicações através de objeto de aprendizagem. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 2013, Gramado (RS). **Anais...** Gramado: COBENGE, 2013, p. 1-11.

PAULIN, J. F. V.; RIBEIRO, A. J. Oportunidades de aprendizagem do conceito de integral definida por meio de tarefas matemáticas. **RPEM**, Campo Mourão (PR), v. 10, n. 21, p. 440-462, 2021.

PIAGET, J. **A Epistemologia Genética**. Petrópolis: Vozes, 1971.

PIAGET, J. **Abstração reflexionante:** relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

RACHELLI, J.; BISOGNIN, V. Da derivada clássica à derivada fraca: um estudo com base na decomposição genética dos conceitos. **Acta Scientiae**, Canoas (RS), v. 20, n. 5, p. 748-766, 2018.

RACHELLI, J.; BISOGNIN, V. Construções históricas e o conceito da derivada: um estudo com base na teoria APOS. **Educação Matemática em Revista - RS**, Rio Grande (RS), v. 1, n. 20, p. 1-8, 2019.

RACHELLI, J.; BISOGNIN, V. Derivadas parciais: um estudo com base na teoria APOS. **JIEEM**, Londrina (PR), v. 13, n. 1, p. 26-34, 2020.

RACHELLI, J.; DENARDI, V. B.; BISOGNIN, V. Estudo da integral definida por meio de problemas interdisciplinares do Cálculo com a Físico-Química. **Revista Thema**, Pelotas (RS), v. 21, n. 1, p. 274-288, 2022.

RETANA, J. A. G. Dificultades del aprendizaje del cálculo a nível Universitario y su relación con ingenieria. **Diálogos Pedagógicos**, Córdoba (Argentina), n. 21, p. 43-61, 2013.

SANCHES-MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. La compreesión de la derivada como objeto de investigación em didáctica de la matemática. **RELIME**. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, Ciudad de México (México), v. 11, n. 2, p. 267-296, 2008.

SANCHES-MATAMOROS, G.; GARCÍA, M.; LLINARES, S. Algunos indicadores del Desarrollo del esquema de derivada de uma función. **Bolema**. Rio Claro (SP), v. 127, n. 45, p. 281-302, 2013.

SOUZA, D. V.; FONSECA, R. F. Reflexões acerca da aprendizagem baseada em problemas na abordagem de noções de cálculo diferencial e integral. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo (SP), v.19, n. 1, p. 197-221, 2017.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Argumentos apresentados por estudantes de cálculo em uma tarefa de natureza exploratória. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo (SP), v. 23, n. 1, p. 591-612, 2021.

TRIGUEROS, M.; MARTINEZ-PLANELL, R. Las funciones de dos variables: análises mediante los resultados del diálogo entre la teria APOS y la TAD. **Enseñanza de las Ciencias**, Barcelona (Espanha), v. 33, n. 2, p. 157-171, 2015.

Janice Rachelli: Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria desde 1994. Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (1990). Mestre em Matemática pela Universidade Federal de Santa Catarina (1995). Doutora em Ensino de Ciências e Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro Universitário Franciscano (2017).

Vanilde Bisognin: Possui graduação em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (1971), mestrado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1978) e doutorado em Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro (1992). Atualmente é professor titular do Centro Universitário Franciscano.