Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PROCESSOS DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO MOBILIZADOS EM TAREFAS INVESTIGATIVAS PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Advanced Mathematical Thinking Processes Mobilized In Investigative Tasks For Financial Education

Juliana Aparecida **GONÇALVES**
Secretária de Estado da Educação - SEED, Cornélio Procópio, Brasil
julianaapg09@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9262-8177

Karina Alessandra Pessoa da **SILVA**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Brasil
karinasilva@utfpr.edu.br
http://orcid.org/0000-0002-1766-137X

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Neste artigo apresentamos resultados de pesquisa cujo objetivo foi evidenciar indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado em Tarefas Investigativas. Para isso, realizamos um estudo sobre Pensamento Matemático Avançado e ensino por investigação. Para essa análise qualitativa de cunho interpretativo nos subsidiamos nos registros escritos e em gravações em áudio e vídeo de um dos grupos de estudantes da 2ª série do Ensino Médio, ao desenvolver uma Tarefa Investigativa, no contexto de aulas de Educação Financeira. Os resultados revelaram que os estudantes, ao se envolverem na Tarefa Investigativa, mobilizaram todos os processos de Pensamento Matemático Avançado: representação, sendo dividido em (i) representação simbólica, mental, visualização e intuição; (ii) mudança de representações e tradução e (iii) modelação; e no processo da abstração encontrou-se indícios de (i) generalização e (ii) sintetização. Neste contexto, a Tarefa Investigativa revelou ser uma abordagem didática propicia para o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado.

Palavras-chave: Ensino Por Investigação, Representação, Abstração, Ensino Médio

ABSTRACT

In this paper, we present the results of a research project whose objective was to show evidence of Advanced Mathematical Thinking processes in Investigative Tasks. To do this, we conducted a study on Advanced Mathematical Thinking and inquiry-based teaching. For this qualitative, interpretative analysis, we used the written records, audio and video recordings of one of the groups of students from the 2nd grade of high school, when developing an Investigative Task in the context of Financial Education classes. The results revealed that students, when engaging in the Investigative Task, mobilized all the processes of Advanced Mathematical Thinking: representation, being divided into (i) symbolic, mental, visualization and intuition representation; (ii) change of representations and translation and (iii) modeling; and in the process of abstraction evidence was found for (i) generalization and (ii) synthesization. In this context, the Investigative Task proved to be a propitious didactic approach for the development of Advanced Mathematical Thinking.

Keywords: Teaching By Inquiry, Representation, Abstraction, High School

1 INTRODUÇÃO

O ensino por investigação é discutido por autores como Ponte (2003), Ponte Brocardo e Oliveira (2015), Ferruzzi, Borssoi e Silva (2021) como uma alternativa para tornar as aulas de matemática mais atrativas, desafiadoras e, como consequência, melhorar a aprendizagem dos estudantes. Para Ponte et al. (2015), as Tarefas Investigativas motivam os estudantes, desenvolvendo capacidades para a construção de um conhecimento mais amplo de conceitos matemáticos facilitando a aprendizagem. Desta forma, quais conceitos, procedimentos e diferentes representações são possíveis ser evidenciadas quando estudantes se envolvem em uma tarefa de investigação?

Como resposta, podemos citar Baptista (2010), que afirma que o ensino por investigação permite a interação entre a teoria e a prática, ocorrendo uma relação entre os conteúdos e processos. Quando os alunos estão envolvidos na investigação, as tarefas permitem produzir conhecimentos e reflexões sobre os procedimentos utilizados para resolver a situação.

Dreyfus (2002) destaca a importância de exercícios não-triviais (sinônimo de exercícios não comuns), que estimulem a reflexão sobre a experiência matemática e tarefas que possuam potencial para mobilizar diferentes processos de pensamento matemático. Para o autor, é importante que professores de matemática proporcionem aos estudantes atividades com respostas abertas no lugar de exercícios de um minuto, transferindo-lhes mais responsabilidade pelo processo de aprendizado, estimulando a independência em relação à descoberta.

Bussmann, Klaiber e Silva (2017, p. 12) corroboram que tarefas com investigações “podem contemplar todos os processos do Pensamento Matemático Avançado”. Sendo assim, a natureza de uma tarefa pode dizer muito sobre o que se espera dos estudantes e, com isso, analisar os processos desenvolvidos em sua resolução. Para Sasseron (2015, p. 58), o ensino por investigação permite que a turma de estudantes “se engaje com as discussões e, ao mesmo tempo em que travam contato com fenômenos naturais, pela busca de resolução de um problema, exercitam práticas e raciocínios de comparação, análise e avaliação bastante utilizadas na prática científica”.

Tendo em vista o ensino por investigação com tais potencialidades, a Educação Financeira pode contribuir e ampliar a discussão e reflexão em sala de aula. Para Silva, Seki e Silva (2020), a Educação Financeira tem como objetivo educar o cidadão para administrar as finanças pessoais, além do planejamento financeiro. Desta forma, a Educação Financeira pode vislumbrar temáticas que podem “[...] promover o desenvolvimento de competências pessoais e sociais dos alunos, podem se constituir em excelentes contextos para as aplicações dos conceitos da Matemática Financeira e também proporcionar contextos para ampliar e aprofundar esses conceitos” (Brasil, 2018, p. 269).

Nesta perspectiva, nos pautamos em investigar o Pensamento Matemático Avançado segundo a perspectiva de Dreyfus (2002) com estudantes da Educação Básica[1] no componente curricular de Educação Financeira. Elias, Barbosa e Savioli (2011) discutem como o Pensamento Matemático Avançado vem sendo trabalhado na Educação Básica e as dificuldades encontradas pelos estudantes na transição da Educação Básica para o Ensino Superior. Em consonância com os autores, versamos a importância de estimular o Pensamento Matemático Avançado desde a Educação Básica, no entanto, nosso foco nesta investigação não é a transição da Educação Básica para o Ensino Superior, mas, os processos mobilizados por estudantes do Ensino Médio ao desenvolver Tarefas Investigativas. A coleta de informações ocorreu em uma turma da 2ª série do Ensino Médio de um colégio público, localizado no Norte do Paraná, em que a professora é uma das autoras deste artigo.

Apresentamos nas próximas seções, os fundamentos teóricos de Tarefas Investigativas e Pensamento Matemático Avançado, os aspectos metodológicos, a discussão e análise da Tarefa Investigativa e, por fim, as considerações finais desta investigação.

2 TAREFAS INVESTIGATIVAS

Entendemos que ensinar vislumbra diferentes metodologias que precisam ser consideradas pelo professor, com o objetivo de despertar diferentes pensamentos na mente dos estudantes e permitir a sua participação ativa durante o processo de ensino. Desta maneira, dentre as diferentes metodologias que podem ser utilizadas no ensino da matemática, abordamos o ensino por investigação, mais especificamente, as Tarefas Investigativas.

[1] Este artigo é recorte de uma pesquisa de mestrado profissional defendida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, escrita pela primeira autora e orientada pela segunda autora.

Para Ferruzzi et al. (2021), o Ensino por Investigação não se trata de uma prática pedagógica, mas uma abordagem didática que abrange diversas práticas pedagógicas em que o estudante não é um sujeito passivo. “É com foco em uma proposta diferenciada para a sala de aula, colocando o aluno como agente ativo da aprendizagem, que um trabalho investigativo pode colaborar para conduzir discussões produtivas, propiciando uma aprendizagem mais efetiva” (Zuin & Ferreira, 2018, p. 88).

Ferruzzi et al. (2021) destacam relevância do professor ao implementar o ensino por investigação em sala de aula, ao orientar os encaminhamentos que permitam ao aluno ser sujeito ativo durante a resolução da tarefa, propor investigações que surjam de “[...] uma forma natural ao trabalhar em muitos tópicos da matemática e permitir que os estudantes usem conceitos, representações, ideias e procedimentos que já conhecem” (Ponte, 2020, p. 5). Para Ponte (2020), durante uma Tarefa de Investigação, o professor participa de todo o processo, formulando objetivos, metodologias e estratégias por meio da reflexão sobre a prática. Ao entregar uma tarefa “[...] o objetivo do professor é envolver os alunos” (Ponte, 2020, p. 5) em sua resolução. Para o autor, é importante que o professor desperte a curiosidade do aluno e assim o estimule a investigar.

Desse modo, entendemos que o encaminhamento do professor não se limita a uma sequência que deve ser seguida à risca; seus encaminhamentos, ao iniciar uma tarefa, ao realizar uma introdução que podemos considerar como convite, já é o início das ações feitas para tornar a Tarefa Investigativa e, no decorrer do desenvolvimento da tarefa, o professor precisa promover discussões que possibilitem ao aluno investigar a situação. Ponte (2020) apresenta um termo que muito reflete nos encaminhamentos do professor – a “flexibilidade” – para conduzir uma Tarefa Investigativa.

No entanto, para que a Tarefa seja de caráter investigativo, também é preciso atenção às ações realizadas pelos estudantes. A participação ativa dos estudantes pode ser uma resposta à proposta para desenvolvimento da atividade, “[...] conduzidos pela sua própria curiosidade, interesse e capacidade para compreender uma observação ou resolver um problema” (Baptista, 2010, p. 92).

Skovsmose (2000) e Zompero e Laburú (2011) consideram que o ensino se caracteriza como investigativo se os alunos aceitam o convite para investigar, é necessário o interesse por parte deles, para que, assim, possam investigar a situação com perseverança, testar conjecturas, procurar com atenção, indagar e buscar novas descobertas. Para Oliveira, Segurado e Ponte (1996), é necessário que a tarefa seja desafiadora e que os métodos de resolução e as respostas não aconteçam de imediato, proporcionando, assim, um ambiente investigativo.

Por fim, outra característica citada por Ferruzzi et al. (2021) é a possibilidade de a tarefa propor elaboração de conjecturas, testes e provas ou demonstrações, proporcionando o desenvolvimento da capacidade de observação, síntese e generalização.

Para Ponte (2003), a Tarefa Investigativa tem como objetivo trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, designando uma poderosa metáfora educativa. Neste contexto, o aluno é convidado “a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos seus resultados e na sua discussão e argumentação com os colegas e o professor” (Ponte, 2003, p. 10).

3 PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

O Ensino da Matemática busca relevantes explicações para o desenvolvimento matemático dos estudantes, entre elas, formas de o aluno resolver ou se envolver na resolução de uma tarefa. Aspectos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por alunos na resolução de tarefas são discussões apresentadas em pesquisas como de Klaiber (2019), Marins (2014), Henriques (2010), Vieira, Souza e Imafuku (2020) e Marins e Savioli (2016). Parte destas pesquisas trata do Pensamento Matemático Avançado no Ensino Superior que, por sua vez, tem uma estreita relação com a Educação Básica. Pesquisas como a de Elias et al. (2011) abordam a evasão em cursos de graduação em Matemática, que parte da transição que ocorre entre o Ensino Médio. Os autores discutem como os conceitos são apresentados nos livros didáticos destinados tanto ao Ensino Médio quanto ao Ensino Superior e, desta forma, sugerem repensar seus currículos e considerar disciplinas que promovam uma ponte entre esses dois níveis de escolaridade. Para tanto, os autores trazem reflexões do Pensamento Matemático Avançado neste processo.

Dreyfus (2002) caracteriza o Pensamento Matemático Avançado com uma lista de processos em interação, ressalta também a importância de o professor de matemática estar consciente desses processos para compreender algumas dificuldades que seus alunos apresentam. Para o autor, não há uma distinção clara entre muitos processos de pensamento matemático elementar ou avançado, muitos dos processos a serem considerados já estão presentes no pensamento de crianças sobre conceitos matemáticos básicos, não sendo usados exclusivamente em matemática avançada. Uma característica distinta para o autor entre o pensamento matemático elementar e o avançado é a complexidade e como ela é abordada. Para isso, cita dois processos: representação e abstração. Por meio da representação e da abstração, pode-se mover de um nível de detalhamento para outro e, assim, administrar a complexidade.

O processo de representação é dividido em i) representação simbólica, mental, visualização e intuição, ii) mudança de representação e tradução e iii) modelação. No processo da abstração encontra-se i) generalização e ii) síntese.

Representar um conceito significa gerar um exemplo, um espécime, uma imagem. Uma representação simbólica é externamente escrita ou falada, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais fácil, já a representação mental se refere a esquemas ou modelos internos de referência que a pessoa usa para interagir com o mundo externo. Isso ocorre quando pensamos naquela parte específica do mundo e pode variar de pessoa para pessoa (Dreyfus, 2002).

Dreyfus (2002) considera que as representações mentais surgem das concretas, é a base para aprender e pensar matemática. Uma pessoa pode criar uma única ou várias representações mentais concorrentes para o mesmo conceito matemático.

A visualização é um processo pelo qual as representações mentais ganham forma. Um exemplo utilizado por Dreyfus são as funções: "os gráficos que são um desses objetos, fórmulas algébricas são outro, diagramas de setas e tabelas de valores" (Dreyfus, 2002, p. 31, tradução nossa). Segundo o autor, uma representação é rica se ela tem muitos aspectos ligados a determinado conceito. Uma representação é considerada desvalida se tem poucos elementos para permitir a flexibilidade em resolver problemas. Para Dreyfus várias representações mentais para o mesmo conceito podem complementar umas às outras e, finalmente, serem integradas em uma única representação para aquele conceito.

Segundo Klaiber (2019), em consonância com Dreyfus (2002), um processo que possui estreita relação com a visualização é a intuição. Dreyfus (2002) considera que aprender pela intuição, pela cognição direta imediata, sem evidência do pensamento racional tem um papel crucial em qualquer sequência de processos a começar pela descoberta. Desta forma, a intuição está relacionada a conceitos e procedimentos já estudados pelos estudantes em que utilizam seus pré-requisitos para solucionar problemas.

Embora seja importante ter várias representações de um conceito, sua existência por si só não é suficiente para permitir o uso flexível do conceito na solução de um problema. É preciso habilidade de alternar de uma representação para outra, quando a outra é mais eficiente para o próximo passo que se deseja tomar. Alternar entre as representações está associado com o processo de representação. A alternância deve ser realizada entre representações existentes, ou seja, mudar de uma representação de um conceito matemático para outra (Dreyfus, 2002). Para o autor, o processo de mudança de representação está intimamente ligado à tradução. Tradução é ir de uma formulação de enunciado ou problema matemático a outra.

A modelação, segundo Dreyfus, significa construir uma estrutura ou teoria matemática que incorpore características essenciais do objeto, sistema ou processo a ser descrito. A modelação pode ser usada para estudar o comportamento do objeto ou processo que está sendo modelado (Dreyfus, 2002).Dreyfus caracteriza o processo de representação e modelação como até certo ponto análogos, mas em outro nível. Na modelação, a situação ou sistema é físico e o modelo é matemático; na representação o objeto a ser representado é a estrutura matemática e o modelo é uma estrutura mental. Deste modo, a representação está relacionada ao modelo matemático como o modelo matemático está relacionado ao sistema físico.

Para Dreyfus (2002), o processo mais importante do Pensamento Matemático Avançado é a abstração. Se um estudante desenvolve a habilidade de fazer conscientemente abstrações de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado de pensamento matemático. Generalizar é derivar ou induzir de casos particulares, para identificar pontos em comum, para expandir os domínios da validade (Dreyfus, 2002). Assim, pode-se considerar a generalização como a busca por um padrão ou regularidade, ou seja, "a procura e a observação de padrões conduz à elaboração de conjecturas e muitas das vezes à generalização [...]" (Vale, 2013, p. 69).

Sintetizar significa combinar ou compor partes de tal modo que elas formem um todo. Para Dreyfus, poucos estudantes têm acesso à sintetização, pois professores acabam fazendo essa tarefa. O autor apresenta como exemplo um estudante de álgebra linear que aprende um número considerável de fatos isolados sobre ortogonalização de vetores, diagonalização de matrizes, transformações de bases, soluções de sistemas de equações lineares, entre outros, mais tarde no processo de aprendizagem espera-se que todos esses fatos não-relacionados se mesclem numa só imagem, na qual eles são incluídos e inter-relacionados.

Portanto, subsidiadas pela teoria desenvolvida por Dreyfus (2002) e pelas características de uma Tarefa Investigativa com base em nosso referencial teórico, neste artigo nos debruçamos em realizar uma análise e discussão dos áudios transcritos e dos registros escritos dos alunos ao desenvolver uma tarefa, no contexto do componente curricular de Educação Financeira.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Este artigo se refere a uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo, segundo pressuposto de Bogdan e Biklen (1994), cujos resultados são oriundos de pesquisa de mestrado da primeira autora que doravante nos referimos como professora, orientada pela segunda autora. A coleta de dados aconteceu na sala de aula de um colégio público, numa turma da 2ª série do Ensino Médio, no componente curricular de Educação Financeira - componente curricular obrigatório na matriz do Ensino Médio (1ª, 2ª e 3ª), desde 2021, nas escolas públicas do estado do Paraná. Os dados foram coletados por meio de gravações em áudio e registros escritos dos alunos. Para o desenvolvimento da pesquisa foi solicitada autorização da escola e a assinatura do termo livre e esclarecido pelos pais ou responsáveis dos alunos.

A turma era composta por 33 alunos que foram divididos em 7 grupos com 4 integrantes e 1 grupo com 5 alunos, totalizando 8 grupos. De modo a evidenciarmos os processos do Pensamento Matemático Avançado, segundo a perspectiva de Dreyfus (2002) com estudantes da Educação Básica, selecionamos a tarefa intitulada “Preço do gás e energia” (Figura 1) que emergiu após análises dos assuntos abordados em Educação Financeira, entre eles a inflação.

1. Observe a charge abaixo. Depois, responda às questões:

ALVES. Hora do Café. 14 nov. 2017. Disponível em: https://fotografia.folha.uol.com.br/galerias/1582815303586029-hora-do-cafe-novembro-de-2017. Acesso em: 31 mar.2022.

a. O valor do preço de quais produtos ou serviços foi utilizado pelo artista para abordar a alta da inflação?
b. O que significa dizer que esses produtos afetam o orçamento familiar?
c. Pesquisem os preços desses itens em março de 2017 a 2022.
d. Com base em sua pesquisa, o que vocês podem concluir com os resultados encontrados.
e. Com base nestas informações vocês conseguem estimar o valor para 2023.

Obs: *Não esqueçam de indicar a fonte de pesquisa.*

Figura 1: Tarefa “Preço do gás e energia”
Fonte: Adaptado do livro didático - Cenários para investigação: humanidade e matemática em contexto, 2020

Para a análise nos subsidiamos nas discussões de um dos grupos, formado por quatro integrantes. A escolha deste grupo ocorreu após análise das produções e a qualidade dos áudios e vídeos que puderam ser transcritos e analisados. A implementação da tarefa iniciou-se no dia 08 de março de 2022 e foi concluída no dia 21 de maio de 2022, totalizando cinco aulas. No intuito de manter em anonimato dos alunos, nos referimos a eles por E1, E3, E13 e E19 (integrantes do grupo analisado).

5 DISCUSSÃO E ANÁLISE DA TAREFA INVESTIGATIVA

Antes de fazer o convite para iniciar o desenvolvimento da tarefa, a professora trabalhou com textos de apoio, no qual pode levantar questionamentos com o objetivo de ‘sondar’ o interesse dos estudantes pelo tema. Após a leitura e as discussões sobre o texto, a professora apresentou a tarefa à turma, por meio de *slides*. Essa ação permitiu a realização do convite para que a situação fosse investigada. De acordo com Ferruzzi et al. (2021), com o aceite dos estudantes, a situação se configurou em um problema para eles, ou seja, tratou-se de uma situação desafiadora.

A resolução da tarefa foi iniciada pelo grupo com a justificativa dos dados coletados nos quais foram feitos arredondamentos nos valores referentes ao gás e à energia. Desta forma, o grupo não registrou valores com os centavos, porém, ao observar os dados coletados, a professora percebeu que o grupo apresentou como valor do kWh (quilowatts hora) o total da fatura nos respectivos anos e não o valor do kWh (Figura 2).

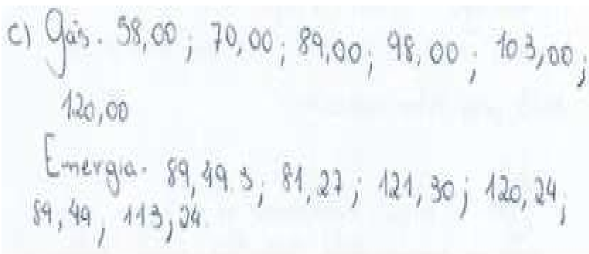


Figura 2: Dados coletados pelos alunos
Fonte: Relatório dos alunos (2022)

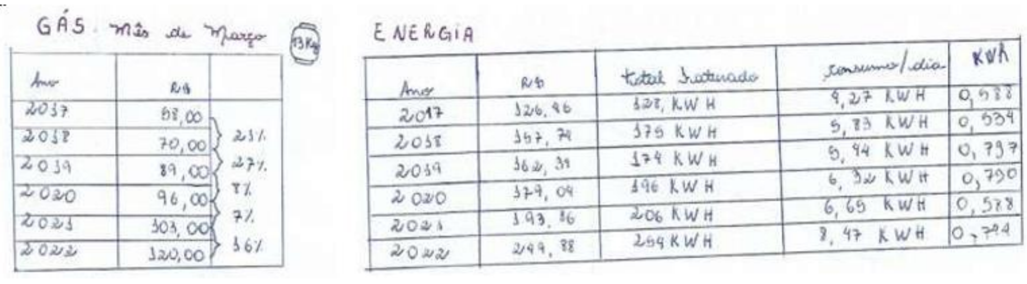
Enquanto orientava os alunos no desenvolvimento da tarefa, a professora, percebendo o equívoco, interferiu, conforme excerto transcrito a seguir:

> *Professora: Você tirou do talão esses valores?*
> *E13: Foi da casa do E3.*
> *Professora: [...] você tirou as taxas, ficou R$ 90,00, e esse que ficou é o valor de 1 Kwh?*
> *E13: Não, é o valor geral do usado no mês sem os impostos.*
> *Professora: E então como vocês irão descobrir o valor de 1 Kwh? Como vocês fariam?*
> *E13: A gente pega o valor e pode dividir pelo valor do Kwh.*

Professora: [...] quando você analisar o valor do talão para fazer um comparativo, não conseguimos dizer se teve um aumento ou diminuição.
E13: Não, está mais ligado ao que a pessoa gasta no mês.
(Diálogo entre professora e integrantes do grupo, 2022)

No excerto, podemos inferir que a professora buscou auxiliar o grupo para que utilizassem valores como referência para iniciar a investigação. Podemos evidenciar que a cada ação dos estudantes, a professora fazia um questionamento, para que o grupo encontrasse uma solução para a situação. No ensino por investigação o “professor possibilita que os seus alunos desenvolvam atividades de investigação e desempenhem um papel ativo” (Baptista, 2010, p. 89). Desta forma, a professora auxiliou na compreensão dos procedimentos a serem realizados pelos estudantes e esperou que mobilizassem processos relacionados ao Pensamento Matemático Avançado, como representação mental dos procedimentos ou conceitos que seriam utilizados por meio da intuição. Para Baptista (2010, p. 107), é “necessário que o professor promova um ambiente que ajude os seus alunos a estruturar o seu pensamento e a adquirir confiança no trabalho que estão a desenvolver”.

A resposta para a questão *c* (Pesquisem os preços desses itens em março de 2017 a 2022) foi organizada em quadros, como mostra a Figura 3. O quadro foi reorganizado pelo grupo após a intervenção da professora em relação ao valor apresentado da energia elétrica, sendo ele o valor total da fatura o que implicaria na análise dos dados. Para isso, os estudantes acrescentaram uma coluna com o valor do kWh. Durante a apresentação dos dados organizados em tabelas, o grupo também justificou a diferente forma de representar os dados coletados.


GÁS mês de Março 13Kg

Ano	R$	
2017	58,00	
2018	70,00	21%
2019	89,00	27%
2020	96,00	8%
2021	103,00	7%
2022	120,00	16%

ENERGIA

Ano	R$	total faturado	consumo/dia	KWh
2017	126,96	128, KWH	4,27 KWH	0,588
2018	157,74	175 KWH	5,83 KWH	0,534
2019	162,31	174 KWH	5,94 KWH	0,797
2020	179,04	196 KWH	6,32 KWH	0,790
2021	193,16	206 KWH	6,65 KWH	0,578
2022	249,88	254 KWH	8,47 KWH	0,794

Figura 3: Resposta à questão c
Fonte: Relatório dos alunos (2022)

E13: Ô! A gente tirou o valor da energia do seu talão, lá deve ter mais ou menos, o valor do Kwh, então vamos olhar no talão é mais fácil tirar os impostos e dividir pelo consumo para descobrir o valor unitário do kWh. Faz aí uma coluna para o kWh.
E1: Na fatura já tem, o valor unitário! Mas tem mais de um valor na fatura!
E13: Então vamos pegar desses valores o do médio em todos, sem considerar a bandeira.
Professora: Pode sim, neste caso vocês estão trabalhando com o quê?
E13: Com o valor e não com o consumo.
(Diálogo entre professora e integrantes do grupo, 2022)

Inferimos que o grupo mobilizou processos de mudança de representação e tradução, ao perceber a necessidade de construir uma tabela e acrescentar mais uma coluna para representar os novos dados. Com isso, os estudantes mostraram uma diferente representação do objeto de estudo, ou situação abordada por eles. Para Dreyfus (2002), muitas representações mentais concorrentes de um conceito podem coexistir na mente de uma pessoa e, com isso, observar as vantagens dessas diferentes situações matemáticas. Deste modo, várias representações mentais para o mesmo conceito podem complementar umas às outras e, finalmente, serem integradas em uma única representação para aquele conceito.

Após a organização na tabela (Figura 3), os estudantes iniciaram a discussão com relação à questão *d* (Com base em sua pesquisa, o que vocês podem concluir com os resultados encontrados), que deixa em aberto quais aspectos os alunos gostariam de investigar. Para Ponte (2005, p. 8) uma "tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas". Considerando a natureza da questão, os alunos poderiam investigar o aumento e a diminuição dos valores desses itens em percentual, fazer comparativos em relação ao salário-mínimo, proporção de aumento de um item para outro, dentre outros aspectos. Além disso, para a resolução desta questão os estudantes poderiam elaborar conjecturas, sendo esta uma das características citadas por Ferruzzi et al. (2021) como característica do ensino por investigação.

O grupo decidiu analisar quanto um trabalhador compromete do seu salário com o gás e com a energia elétrica. Após a definição do que seria investigado pelo grupo, os estudantes iniciaram uma representação mental de como poderiam encontrar um valor para analisar os gastos com a energia elétrica. Para a resolução, consideraram o valor do kWh como sendo uma variável a cada ano (VL) e a média de consumo de uma família brasileira de 152,2 kWh após uma consulta na internet, utilizando como palavras-chaves "média de consumo em kWh de uma família brasileira". Com esse encaminhamento foi possível evidenciar indícios de processos de intuição. Para Klaiber (2019), esse processo pode ser identificado a partir de conhecimentos prévios para resolver uma questão. O excerto a seguir subsidiou essa inferência:

E13: E se pegarmos o valor que ele gasta por mês e multiplicar pelo valor do kWh?
Professora: Pode ser, mas isso você justifica depois no seu trabalho.
E13: Podemos pesquisar quanto se consome em uma família?
E1: E a gente encontrar?
Professora: Acho que sim, vocês podem fazer uma pesquisa.
E13: Pesquisa aí E3!

E3: Aqui dois valores um deles é 152,2.
E13: Pode ser professora?
Professora: Pode. Analisem com calma!
(Diálogo entre professora e integrantes do grupo, 2022)

De modo a encontrar uma solução para o cálculo do valor do kWh, o grupo formulou uma expressão que poderia ser utilizada em todos os anos (2017 a 2022) como parâmetro para a análise dos dados e uma possível generalização para a primeira situação a ser investigada. De certo modo, podemos inferir que, neste momento, o grupo apresentou indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado como: modelação e generalização. Para Henriques (2010), a modelação refere-se à procura de uma representação matemática para um objeto, no qual o modelo matemático ganha então o estatuto de uma representação da situação. Domingos (2003, p. 62) denota a generalização "quando um indivíduo aprende a aplicar um esquema existente a uma vasta coleção de fenômenos, podemos dizer que o esquema foi generalizado. Isto pode ocorrer porque o sujeito está atento à vasta aplicabilidade do esquema". A Figura 4 mostra o registro feito pelos estudantes após determinarem um modelo VF = 152,2KW, em que VF representa o valor final (em reais) de acordo com a KW, valor do quilowatt hora de cada ano.

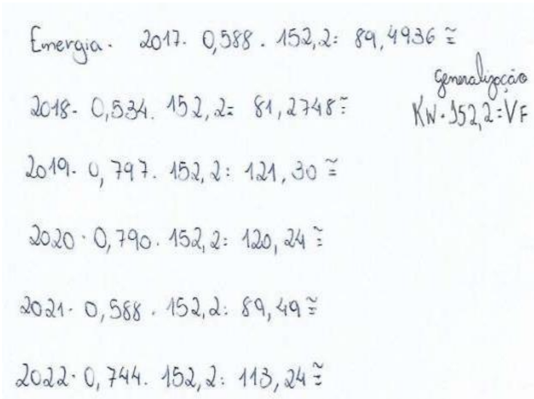

Energia. 2017. 0,588 . 152,2: 89,4936 ≅
generalização
KW · 152,2 = VF
2018. 0,534. 152,2= 81,2748 ≅
2019. 0,797. 152,2: 121,30 ≅
2020 · 0,790. 152,2: 120,24 ≅
2021. 0,588 . 152,2: 89,49 ≅
2022 · 0,744. 152,2: 113,24 ≅

Figura 4: Resposta à questão *d* - modelação
Fonte: Relatório dos alunos (2022)

Embora o grupo tenha representado uma expressão algébrica para o valor final utilizado para pagar a energia elétrica, uma resposta para o problema relativo ao comprometimento do salário-mínimo ainda não constava nos registros dos alunos. Para isso, solicitaram orientação da professora, conforme excerto a seguir:

E13: Podemos utilizar a regra de três para saber quanto do salário é comprometido?
Professora: [...] Esse valor será dado em quê?
E19: Percentual.
Professora: Entendi. Mas existe outra forma de calcular em percentual?
E13: [...] porcentagem significa por cem.
Professora: [...] Será que dá para usar fração para calcular o percentual do salário que é comprometido?

E13: [...] Acho que sim. Por exemplo: geralmente usamos quantos partes foram pintadas, certo? [...] Então queremos saber quanto do salário é comprometido [...] No caso partes seria comprometida de um total do salário.
(Diálogo entre professora e integrantes do grupo, 2022)

Podemos evidenciar que, inicialmente, para calcular quanto do salário-mínimo era comprometido com gás e energia elétrica, o grupo fez uma representação mental da situação associando a regra de três. Para Dreyfus (2002), a representação mental indica uma forma de como interagir com o mundo exterior, quando pensamos ou falamos de um objeto matemático ou processo. Neste caso, o grupo associou a proporção do salário que se utiliza para pagamento desses itens com porcentagem, a partir de seus conhecimentos prévios.

A intervenção da professora teve como objetivo desenvolver processos do Pensamento Matemático Avançado como mudança de representação e tradução. Para Dreyfus (2002), é importante ter várias representações de um conceito, porém sua existência por si mesma não é suficiente para permitir o uso flexível do conceito na solução de um problema, a menos que as várias representações sejam ligadas fortemente, sendo assim, é necessária a habilidade para alternar de uma representação para outra. A Figura 5 mostra a parte da resolução dos estudantes apresentando duas maneiras diferentes de calcular o comprometimento do salário com cada item.

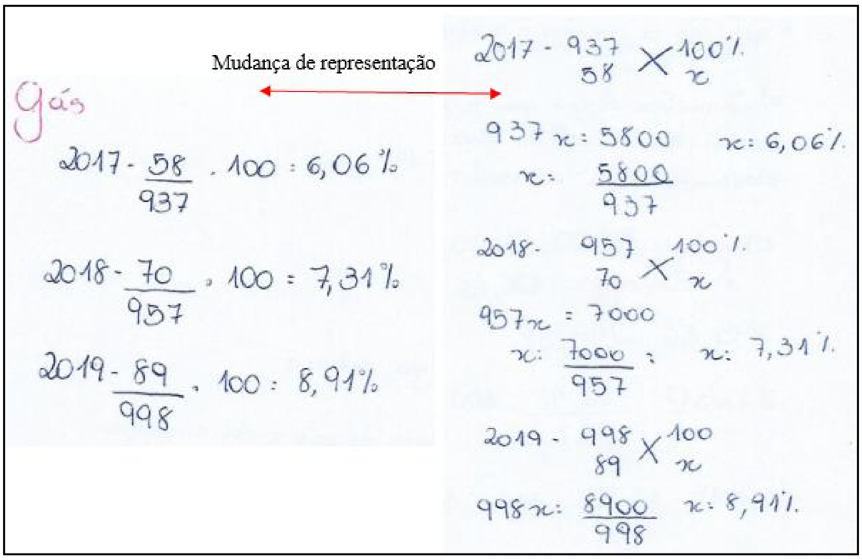


Figura 5: Mudança de representação e tradução
Fonte: Relatório dos alunos (2022)

Na Tabela 1 estão organizados os valores dos salários e o percentual do salário comprometido com gás e energia, obtidos a partir dos cálculos realizados pelo grupo.

Tabela 1: Variação da velocidade por trecho

Ano	Valor do salário	Comprometimento com gás (%)	Comprometimento com energia (%)
2017	R$ 937,00	6,06	9,55
2018	R$ 954,00	7,31	8,51
2019	R$ 998,00	8,91	12,15
2020	R$ 1039,00	9,23	11,57
2021	R$ 1100,00	9,36	8,13
2022	R$ 1212,00	9,9	9,34

Fonte: Elaborada pelas autoras com base nos cálculos apresentados pelos alunos

Na resolução da questão, os alunos tiveram o auxílio da professora na identificação de um padrão, conforme excerto:

> *Professora: Ok, e o que é esse valor que vocês estão repetindo em todos os cálculos?*
> *E13: O valor do salário mínimo.*
> *Professora: Vocês estão fazendo o quê sempre?*
> *E13: Calculando o percentual sobre o salário mínimo. Montamos a fração com o valor da energia ou do gás pelo salário. [...] Dividindo.*
> *Professora: E depois?*
> *E1: [...] Multiplicando por cem.*
> *E13: [...] Então podemos utilizar símbolos ou letras?*
> *Professora: Podem sim [...].*
> *E13: [...] Então podemos dizer que generalizamos?*
> (Diálogo entre professora e integrantes do grupo, 2022)

Dreyfus (2002) considera generalizar como derivar ou induzir a partir de casos particulares, para encontrar pontos em comum, expandir domínios de validade. Sendo assim, com os cálculos utilizados para determinar a proporção do salário-mínimo nos últimos seis anos com os itens de gás e energia, o grupo criou uma expressão por meio de símbolos para modelar a situação e enfim generalizar, como mostra a Figura 6.

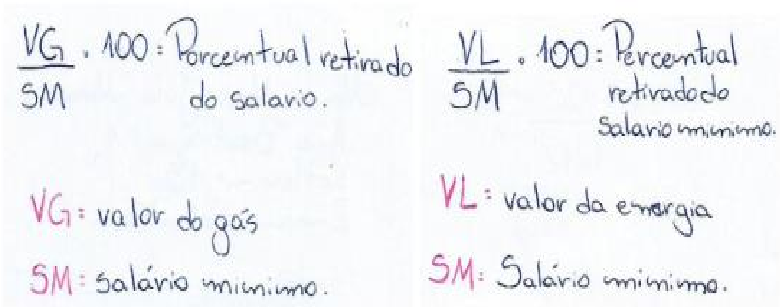


Figura 6: Generalização
Fonte: Relatório dos alunos (2022)

O que podemos evidenciar é que, após a discussão, os estudantes fizeram o registro referente à generalização, além disso, o grupo utilizou a palavra “generalizamos” (E13), o que nos mostrou familiaridade com a tarefa e com os processos do Pensamento

Matemático Avançado. Gereti (2014) identifica a generalização ao longo das resoluções quando utilizadas notações algébricas que representam a generalidade das propriedades a serem provadas.

Após representar a situação por meio de dois procedimentos e generalizar, os estudantes fizeram o esboço do gráfico (Figura 7).

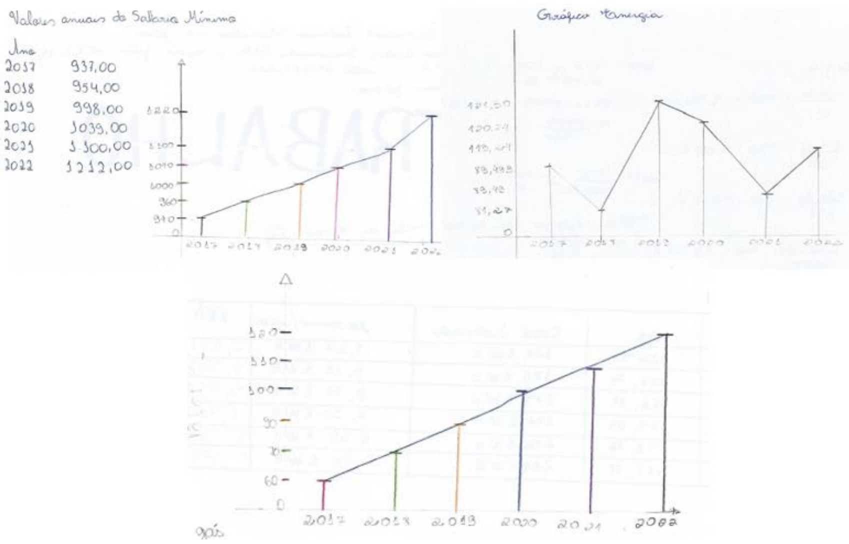


Figura 7: Representação gráfica
Fonte: Relatório dos alunos (2022)

A construção do gráfico foi realizada de forma natural pelos alunos com o objetivo de visualizar e analisar os dados obtidos, conforme diálogo entre integrantes do grupo:

> *E13: Eu acho interessante fazermos um gráfico.*
> *E19: Também acho.*
> *E13: Porque assim conseguimos visualizar melhor esses aumentos ou diminuição do valor do gás e da energia e até para ajudar a justificar esse aumento de 2023.*
> (Diálogo entre integrantes do grupo, 2022)

Desta forma, o grupo mobilizou indícios do processo de mudança de representação e tradução, pois, representou e transitou entre as duas representações: algébricas e gráfica. "Para resolver um problema o estudante precisará utilizar pelo menos duas representações além de transferir informações para outra" (Marins, 2014, p. 28).

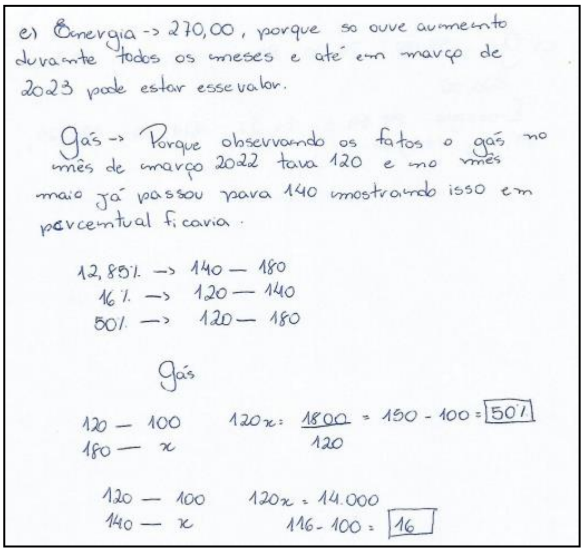
A partir da construção do gráfico, a professora fez questionamentos, a fim de evidenciar quais processos do Pensamento Matemático Avançado poderiam estar associados ao processo de construção do gráfico pelo grupo, conforme excerto a seguir:

> *E13: Olha professora, o salário sempre aumenta?*
> *Professora: Sim, e [...] dá para perceber em qual período ele aumenta mais?*
> *E13: De 2021 para 2022? [...] De 2017 a 2018 aumentou bem pouco.*
> *Professora: Mas você observou isso pelo gráfico?*
> *E1: É melhor para ver…*

Professora: [...] Vocês utilizaram uma escala para construção do gráfico?
E13: Só fomos colocando os valores do salário para ter uma base.
Professora: [...] poderiam fazer relações com outros conceitos.
E13: Função né? [...] Olhando assim parece uma função exponencial.
Professora: Por quê?
E13: Por não ser exatamente reta, me lembra aquelas curvas da função exponencial [se referindo ao gráfico do salário].
Professora: E da energia?
E1: Em algumas partes me lembra função quadrática, só que usamos a régua para fazer os pontos.
E13: [...] A curva para cima que forma de 2018 a 2019.
E19: [...] Tem. De 2019 a 2022.
E13: Mas de 2019 a 2020 não me parece fazer parte de uma curva [...]. Os valores ficam oscilando é difícil de definir.
Professora: [...] E do gás o que vocês observam?
E13: Olhando assim, linha reta.
Professora: Como se chama mesmo, função?
E1: Do 2º grau!
E19: Do 1º?
(Diálogo entre professora e integrantes do grupo, 2022)

No excerto supracitado, podemos evidenciar indícios de uma síntese, quando os estudantes relacionaram o gráfico construído com conteúdo já estudado nas aulas de matemática, porém não conseguiram analisar com mais clareza devido à falta de uma escala na construção do gráfico. “A síntese começa com o ato consciente de juntar as ideias na fase inicial seguindo uma atividade mais intuitiva, na qual o subconsciente atua de forma recíproca entre o conceito imagem até uma força relacionar o conceito à consciência” [...] (Menezes e Borges Neto, 2018, p. 32).

Na questão *e* (Com base nestas informações vocês conseguem estimar o valor para 2023?) o grupo iniciou uma discussão sobre possíveis valores para o ano de 2023. Para isso, os estudantes fizeram previsões sobre os valores de acordo com a análise dos anos anteriores, estimando um valor para o próximo ano de acordo com o percentual de aumento dos últimos. Sendo assim, o grupo não encontrou um padrão ou regularidade para estimar o valor desses itens para 2023. No entanto, apresentaram uma justificativa em decorrência ao término da aula (Figura 8).



e) Energia -> 270,00, porque só ouve aumento durante todos os meses e até em março de 2023 pode estar esse valor.

Gás -> Porque observando os fatos o gás no mês de março 2022 tava 120 e no mês maio já passou para 140 mostrando isso em percentual ficaria.

12,85% -> 140 — 180
16% -> 120 — 140
50% -> 120 — 180

Gás

120 — 100 $120x = \frac{1800}{120} = 150 - 100 = \boxed{50\%}$
180 — x

120 — 100 $120x = 14.000$
140 — x $116 - 100 = \boxed{16}$

Figura 8: Resposta à questão *e*
Fonte: Relatório dos alunos (2022)

O grupo analisou as informações coletadas, estimaram um possível valor (R$180,00) e utilizaram a regra de três para considerar qual será o aumento, chegando a 50%. Consideraram o aumento do gás de R$ 120,00 para R$ 140,00, valores correspondentes aos meses de março e maio, que consiste a 16% de aumento e o valor de R$ 120,00 para R$ 180,00 aumento estipulado por eles para 2023.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo teve como objetivo evidenciar e discutir indícios de processos do Pensamento Matemático Avançado mobilizados por alunos do Ensino Médio ao desenvolver uma tarefa investigativa. Ao analisar a Tarefa Investigativa “Preço do gás e energia” inferimos aspectos do Pensamento Matemático Avançado relacionados à representação e abstração. Com relação aos processos de representação evidenciamos a representação simbólica, a representação mental, a visualização, a intuição, a mudança de representação e a tradução e modelação. Já com relação aos processos de abstração foram evidenciados processos de generalização e síntese.

O processo de representação pode ser evidenciado nas análises das discussões e resoluções da tarefa pelo grupo, em que mobilizou processos de representação simbólica, pois utilizou símbolos matemáticos para expressar a situação; representação mental, na qual associou a situação com conceitos matemáticos com operações algébricas, aritméticas ou métodos de resolução; visualização tendo em vista que o grupo construiu uma imagem mental da situação e externalizou por meio de esboços e esquemas para compreender ou analisar a situação, explorando o problema; intuição, pois, utilizou conhecimentos prévios como fração, porcentagem e regra de três para solucionar o problema; mudança de representação e tradução, pois transitou de uma representação a outra com o intuito de analisar a situação (analisar quanto do salário-mínimo era comprometido com cada item - gás e energia - nos anos de 2017 a 2022), representação algébrica, aritmética, representação gráfica e tabular; modelação, a partir da situação estipulada pelo grupo para investigação criou-se modelos para satisfazer a situação.

Quanto aos processos de abstração, o grupo mobilizou a generalização e a síntese. Dreyfus (2002) afirma que, em algumas situações, é necessário fazer com que os estudantes construam vários exemplos, identifiquem pontos em comum, sendo função do professor chamar a atenção para as relações das propriedades necessárias para abstrair.

Ao analisar a resolução da tarefa investigativa, podemos considerar que esta auxiliou no desenvolvimento de diferentes processos do Pensamento Matemático Avançado. Bussmann et al. (2017, p. 12) ressaltam que as investigações podem "estimular a formulação de questões (pois são abertas) e exigem um maior esforço cognitivo para que partes do conhecimento sejam combinadas formando o conceito como um todo".

Percebemos também que tarefas de natureza investigativa podem propiciar o Pensamento Avançado, bem como o interesse dos alunos pela aula. No decorrer da tarefa, os alunos se familiarizaram com a tarefa e mobilizaram, de forma espontânea, os processos do Pensamento Matemático Avançado (representação e abstração). Vale ressaltar que em uma tarefa talvez não fique evidente, porém, com outras tarefas é possível observar a familiaridade dos alunos e a mobilização dos processos do Pensamento Matemático Avançado.

O grupo, além de discutir conceitos matemáticos, pode fazer reflexões e análises da situação proposta no contexto de Educação Financeira, situações do contexto real dos alunos, utilizando essas situações para auxiliar na resolução da tarefa. Desta forma, o trabalho em grupo auxiliou na superação das dificuldades, a troca de conhecimentos colaborou na resolução da tarefa. É notório também que as intervenções da professora na realização da tarefa auxiliaram na mobilização dos processos do Pensamento Matemático Avançado. Para Marins (2014, p. 163) é preciso deixar "claro aos estudantes quais são esses processos que estão acontecendo em sua aprendizagem e podem potencializar sua aprendizagem". Em consonância com Dreyfus (2002), os processos do Pensamento Matemático Avançado não acontecem por si mesmos e, se acontecem, não são necessariamente conscientes por parte dos alunos. Com isso, complementamos que o papel do professor é necessário em todos os processos.

REFERÊNCIAS

Baptista, M. L. M. (2010). *Concepção e implementação de actividades de investigação*: um estudo com professores de física e química do ensino básico. (Tese de Doutorado em Didáctica das Ciências). Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa.

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora.

Brasil (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular* – BNCC. Brasília, DF.

Bussmann, C. J. C., Klaiber, M. A., & Silva, D. P. (2017). Processos mentais de Dreyfus e o Ensino Exploratório: discussão e possível intervenção em sala de aula. In: *Anais do 17º Encontro Paranaense De Educação Matemática* (1-13). Cascavel. PR: Unioeste. Recuperado de http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XIV_EPREM/paper/viewFile/77/33

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados*: a Matemática no ensino superior. (Tese de Doutorado em Ciências de Educação). Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova Lisboa, Lisboa.

Dreyfus, T. (2002). Advanced mathematical thinking processes. In: D. Tall, *Advanced mathematical thinking*. (25-42). Dordrecht: Kluwer.

Elias, H. R., Barbosa, L. N. S. C., & Savioli, A. M. D. (2011, junho). Matemática elementar e avançada em livros didáticos: o conceito dos números naturais. In: *Anais da 13ª Conferência Interamericana De Educação Matemática* (1-12). Recife: Comitê Interamericano de Educação Matemática. Recuperado de https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1450/603

Ferruzzi, E. C., Borssoi, A. H., & Silva, K. A. P. (2021). Investigação Matemática em foco: evidenciando possibilidade para sala de aula. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, 11(3), 1-20.

Gereti, L. C. V. (2014). Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE. 139f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Henriques, A. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. (Tese de Doutorado Didática da Matemática). Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.

Klaiber, M. A. (2019). *Introdução à Álgebra Linear em um curso de licenciatura em química:* o desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado por meio de uma Experiência de Ensino. (Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Marins, A. S. (2014). *Pensamento Matemático Avançado em tarefas envolvendo Transformações Lineares*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Marins, A. S., & Savioli, A. M. P. D. (2016). Pensamento matemático avançado manifestado em tarefas envolvendo transformações lineares. *Revista Ciência e Educação*. 22 (2), 489-504.

Menezes, D. B., & Borges Neto, H. (2018). Pensamento Matemático Avançado: Origem e Características. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, *4*(10), 26-35.

Oliveira, H. M.; Segurado, M. I.; Ponte, J. P. (1996). *Explorar, Investigar e Discutir na Aula de Matemática*. Lisboa, 1996. Recuperado de http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto9.PDF

Ponte, J. P. (2003). Investigações matemáticas em Portugal. In: J. P. Ponte. *Investigar em Educação*. (93- 169). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. (11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2020). Didática da matemática e o trabalho do professor. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática*, *3*(3), 809-826.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2015). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Sasseron, L. H. (2015). Alfabetização científica, ensino por investigação e argumentação: relações entre ciências da natureza e escola. *Revista Ensaio*, *17*(n. especial), 49- 67.

Silva, A. C., Seki, J. T. P., & Silva, K. A. P. (2020). Antecipação e Encaminhamento de uma Atividade de Modelagem Matemática no Contexto de Aulas de Educação Financeira. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 13, 73-83.

Skovsmose, O. (2000). Cenários de investigação. *Bolema*, *14*, 66-91.

Vale, I. (2013). Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. *REVEMAT*: Revista Eletrônica de Matemática, *8*(2), 64-81.

Vieira, W., Souza, V. H. G., & Imafuku, R. S. (2020). Sobre Justificativas em Questões do Tipo Verdadeiro/Falso de Estudantes de Licenciatura em Matemática. *Ciência & Educação*, 26, 1-17.

Zompero, A. F., & Laburú, C. E. (2011). Atividades investigativas no ensino de ciências: aspectos históricos e diferentes abordagens. *Ensaio*: Pesquisa em Educação em Ciências, 13(3), 67-80.

Zuin, E., & Ferreira, A. (2018). Introdução do conceito de derivada a partir da Investigação Matemática. *Boletim Online de Educação Matemática*, 6, 82-102.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
Processos do pensamento matemático avançado mobilizados em tarefas investigativas para a educação financeira

Juliana Aparecida Gonçalves
Mestrado Profissional em Ensino de Matemática
Professora da Educação Básica
Secretária de Estado da Educação - SEED, Cornélio Procópio, Brasil
julianaapg09@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9262-8177

Karina Alessandra Pessoa da Silva
Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Professora do Magistério Superior Classe Associado 2
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Departamento Acadêmico de Matemática, Londrina, Brasil
karinasilva@utfpr.edu.br
http://orcid.org/0000-0002-1766-137X

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Joaquim Murtinho, 200, CEP 86066-030, Londrina, PR, Brasil.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: J. A. Gonçalves e K. A. P. da Silva
Coleta de dados: J. A. Gonçalves
Análise de dados: J. A. Gonçalves e K. A. P. da Silva
Discussão dos resultados: J. A. Gonçalves e K. A. P. da Silva

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 24-05-2023 – Aprovado em: 11-10-2023