

ARGUMENTACIÓN EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS: PERSPECTIVAS, RETOS Y RUTAS DE INVESTIGACIÓN

Jorge Toro

Universidad de Antioquia

jandres.toro@udea.edu.co

En este artículo se discuten posibles respuestas a los siguientes interrogantes: ¿se discuten tareas con los estudiantes en las clases de matemáticas?, ¿se planifican y diseñan tareas que favorezcan la interacción y la participación de los estudiantes en las clases de matemáticas?, ¿cómo responder a dudas, preguntas o intervenciones de los estudiantes?, ¿cómo se podría hacer una gestión de los errores de los estudiantes para favorecer el aprendizaje y la argumentación?, ¿se considera posible investigar sobre prácticas argumentativas en lecciones habituales de clases de matemáticas? Estas cuestiones hacen parte de las prácticas habituales de profesores de matemáticas y pueden ser de interés para profesores tanto en formación como en ejercicio y, por supuesto, para los formadores de estos profesores.

INTRODUCCIÓN

Considere el siguiente fragmento de una lección de la clase de matemáticas de décimo grado (estudiantes de entre 15 y 16 años), donde la profesora y sus estudiantes (grupo femenino) discuten la tarea *Construir con regla y compás un triángulo equilátero, luego verificar con el transportador si en realidad es un triángulo equilátero*. Las estudiantes han empezado a resolver la tarea de manera individual en su cuaderno, la profesora pasa por los puestos de las estudiantes, mientras tiene lugar la pregunta de una estudiante quien tiene dudas sobre la medida de un ángulo del triángulo equilátero.

50. Clara: ¿Uno puede medir 59° ?
51. Profesora: Uno puede medir 59° . Pues si hablamos desde la parte exacta tiene que medir 60° , sin embargo, recordemos que nosotras siempre manejamos un margen de error, ¿cuánto puede ser ese margen de error en los ángulos?
52. Estudiantes: De dos...
53. Profesora: ¿De dos qué?

54. Anny: Adelante y atrás.
55. Profesora: ¿Pero de dos qué? ¿Centímetros? ¿Milímetros?
56. Isabel: ¡Centésimas!
57. Profesora: ¿Centésimas?
58. Estudiantes: (Risas)
59. Profesora: ¿Qué es lo que estamos midiendo?
60. Estudiantes: Grados.
61. Profesora: Lo que estamos midiendo...
62. Anny: De dos grados.
63. Profesora: Sería de dos grados, porque lo que estamos midiendo ¿qué son?
64. Estudiantes: Grados.
65. Profesora: ¡No!
66. Isabel: ¿Triángulos?
67. Estudiantes: ¡Ángulos!
68. Profesora: (Asiente con la cabeza) Entonces si estamos midiendo ángulos, recordemos que los ángulos se miden son en grados, no se miden en centímetros, ni milímetros... Porque los ángulos... Eh... nos están mostrando es la amplitud, estamos midiendo es la amplitud que hay entre un segmento y otro, cuando estamos midiendo una longitud esa sí la estamos midiendo en centímetros, milímetros, metros (...)

Imagine que es el profesor en esta clase e indague por los siguientes interrogantes: ¿discute tareas con sus estudiantes?; si es así, ¿cómo lo hace?; ¿planifica y diseña tareas para tal fin? Según su experiencia y conocimiento de las matemáticas, ¿cómo concibe el aprendizaje?, ¿cómo afrontaría estas situaciones en una lección de clase?, ¿cómo responde a dudas, preguntas o errores de sus alumnos?

Ahora suponga que es un investigador interesado en indagar respecto a la argumentación en la clase de matemáticas y cuestiónese tomando como base las siguientes preguntas: ¿encuentra posibles aspectos interesantes en este fragmento?, ¿podría este fragmento ser analizado de acuerdo con su postura investigativa respecto a la argumentación?, ¿considera que la tarea presentada por la profesora puede favorecer la argumentación?, ¿se le ocurre algún método para

reconocer la argumentación en este fragmento?, ¿cree posible hacer un estudio sobre la argumentación en una lección habitual de una clase de matemáticas?

En este documento se exploran respuestas a algunas de estas cuestiones. Por ello, en primer lugar, se da una mirada al currículo de matemáticas en algunos países; en segundo lugar, se hace un análisis de resultados en estudiantes colombianos respecto a pruebas estandarizadas; en tercer lugar, se precisan perspectivas teóricas acerca de la argumentación; en cuarto lugar, se indican y discuten líneas investigativas sobre argumentación en Educación Matemática; en quinto lugar, se analiza el fragmento tomando como referencia una posición particular que es resultado de una investigación doctoral (Toro, 2020); y en sexto lugar, se muestran retos y preguntas que abren el espacio a posibles rutas de investigación en este campo.

UNA MIRADA AL CURRÍCULO EN ALGUNOS PAÍSES

La importancia dada a la argumentación en Educación Matemática puede reconocerse en la atención que le prestan instituciones encargadas de la organización y planeación de estándares. Tal es el caso de Estados Unidos, donde de un lado, en los *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM, 2003) se comenta que

los estudiantes pueden aprender a razonar a través de la discusión de las argumentaciones de los compañeros [...] En las clases en las que se anima a los alumnos a exponer lo que piensan y en las que cada uno contribuye a evaluar el pensamiento de otros, se proporciona un rico ambiente para el aprendizaje del razonamiento matemático. (p. 61)

Y, de otro lado, en los *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSI, 2010), que describen ocho estándares para la práctica matemática, se plantea “[c]onstruir argumentaciones correctas y criticar el razonamiento de otros” (p. 6). Este estándar propone que el profesor promueva en sus estudiantes el planteamiento de conjeturas, el reconocimiento y uso de contraejemplos, la justificación y comunicación de conclusiones, la comparación y la eficacia de argumentos plausibles, la construcción de argumentos usando referentes concretos tales como objetos, dibujos, diagramas y acciones, entre otros (CCSSI, 2010).

En Colombia, por su parte, en los *Estándares Básicos de Competencias* (MEN, 2006), se señalan diferentes procesos generales presentes en toda la actividad matemática. Entre ellos se plantea el proceso del razonamiento, en el que se

debe “usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración” (p. 51); y en el proceso de comunicación se deben usar distintas formas de expresar y comunicar preguntas, problemas, conjeturas y resultados matemáticos, que permitan cierta comprensión de las matemáticas.

Y en Chile, en las *Bases Curriculares de la Educación Básica* (MINEDUC, 2012), se precisa sobre la habilidad de argumentar y comunicar para desarrollar el pensamiento matemático. En este sentido, se afirma que esta habilidad se aplica al tratar de convencer a otros sobre la validez de los resultados obtenidos.

La argumentación y la discusión colectiva sobre la solución de problemas, escuchar y corregirse mutuamente, la estimulación a utilizar un amplio abanico de formas de comunicación de ideas, metáforas y representaciones favorece el aprendizaje matemático. (p. 89)

Considerar las propuestas curriculares de estos países indica que la tarea del profesor es cada vez más compleja (Selling, García y Ball, 2016). Respecto a ello, los *Principles to Actions, Ensuring Mathematical Success for All* (NCTM, 2014) señalan que el profesor en sus prácticas de enseñanza debe implementar acciones que promuevan el razonamiento, facilitar el discurso matemático y utilizar preguntas con el propósito de evaluar el razonamiento de los estudiantes, donde gestione diversos tipos de conocimientos –didácticos, epistémicos, curriculares, culturales, sociales, cognitivos, tecnológicos, regulatorios–.

RESULTADOS DE ESTUDIANTES COLOMBIANOS EN PRUEBAS ESTANDARIZADAS

En el Informe Nacional de Resultados para Colombia - PISA 2018 (ICFES, 2020) se señala cómo los estudiantes colombianos obtuvieron un rendimiento menor que la media de la OCDE en matemáticas (391) y otras áreas, y su rendimiento fue más cercano al de los estudiantes de países como Albania, México, la República de Macedonia del Norte y Qatar. Solo 35 % de los estudiantes alcanzó el Nivel 2 de competencia en matemáticas, nivel que se encuentra un poco debajo en comparación con Latinoamérica, pero muy inferior si se compara con el resto de los países de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico OCDE.

De acuerdo con este mismo informe, es el Nivel 4 donde los estudiantes pueden estar en capacidad de elaborar y comunicar explicaciones y argumentos basados

en sus interpretaciones, argumentos y acciones, y solo 2 % de los estudiantes colombianos que resolvieron la prueba se sitúan en este nivel.

De otro lado, en el contexto local, los estudiantes del último grado de la Educación Media presentan la prueba SABER 11, la cual está estructurada en tres competencias. Una de ellas es la argumentación, donde se evalúa la capacidad para validar o refutar conclusiones, estrategias, soluciones, interpretaciones y representaciones en diversas situaciones.

Según los resultados de la última prueba SABER 11¹, aplicada en 2021, en promedio solo 6 % de los estudiantes de Medellín se ubican en el Nivel 4 de competencia, lo cual no difiere mucho de los resultados nacionales, donde este valor se ubica en 5 %. Sin embargo, este porcentaje es de solo 2 % en las instituciones educativas de los barrios de más bajos ingresos. En este nivel de competencia, los estudiantes deben ser capaces de hacer comparaciones y establecer relaciones entre los datos presentados, de identificar y extraer información local y global de manera directa, así como de resolver problemas y justificar la veracidad o falsedad de afirmaciones.

Los resultados de la prueba PISA y de la prueba SABER 11 reflejan diferentes falencias en las competencias matemáticas de los estudiantes colombianos y, de manera particular, de los de Medellín. Si bien estas falencias podrían deberse a diferentes situaciones como la inequidad del sistema educativo colombiano, la poca preparación de los estudiantes para atender este tipo de pruebas, o las posibles falencias en la articulación del currículo en las instituciones educativas, se considera que ellas podrían deberse a las competencias didáctico-matemáticas de los profesores al momento de plantear y diseñar diferentes tareas, en particular las que podrían favorecer la argumentación.

PERSPECTIVAS TEÓRICAS ACERCA DE LA ARGUMENTACIÓN

La argumentación ha logrado su desarrollo gracias al impulso interdisciplinario de filósofos, lógicos formales e informales, analistas del discurso y de la conversación, estudiosos de la comunicación y representantes de otras disciplinas, impulso que ha permitido que la argumentación se convierta en un objeto de estudio independiente, en expansión y con aplicación en diferentes campos del conocimiento.

¹ <https://view.genial.ly/61fda1b2e940aa00121bafa4>

Según Wenzel (2006) se podría hablar de tres perspectivas: la lógica, la dialéctica y la retórica. La perspectiva lógica se centra en los argumentos como productos textuales y tiende a analizar la argumentación como producto. La perspectiva retórica se centra en los procesos en los que interesa persuadir a un auditorio. Y la perspectiva dialéctica se centra en los procedimientos en los que interesa la interacción entre proponente y oponente con miras a convencer.

En relación con la perspectiva lógica, se resalta el modelo Toulmin, ampliamente aplicado en la investigación, el cual más que estudiar la argumentación enfatiza en la estructura del argumento; lo importante no son las relaciones que existen entre argumentos, sino las relaciones entre las diferentes componentes de un argumento (Pedemonte y Balacheff, 2016). En relación con dichos componentes, se distinguen los *datos*, elementos utilizados para justificar y validar la aserción; la *aserción*, enunciado conclusión; las *garantías*, reglas que permiten conectar datos y aserción; el *soporte*, el respaldo a la garantía; el *calificador modal*, la fuerza del argumento; y el *refutador*, la posible excepción a la garantía (Toulmin, 2007).

LÍNEAS INVESTIGATIVAS SOBRE ARGUMENTACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En lo concerniente a la argumentación, en el campo de la Educación Matemática se podría hablar de un discurso en construcción. Los avances que ha tenido ese discurso en las dos últimas décadas permiten señalar algunas implicaciones para la clase de matemáticas. Los reportes de investigación indican un interés en la argumentación en diferentes niveles educativos –desde la educación primaria (Krummheuer, 2013), la educación secundaria (Ayalon y Even, 2016), hasta el nivel universitario en la formación de profesores (Molina, Font y Pino-Fan, 2019)–; muestran que se han tenido en cuenta diferentes temáticas: de carácter geométrico (González y Herbst, 2013), algebraico (Whitenack, Cavey y Ellington, 2014), estadístico (Goizueta, 2019) o numérico (Fahse, 2017).

Así mismo, los resultados informan cómo se podría favorecer la argumentación en la clase de matemáticas –con actividades matemáticas adecuadas (Boero, 2011); con condiciones propicias (Solar y Deulofeu, 2016); con contextos específicos que incluyan la interacción en clase (Krummheuer, 2012); con el involucramiento de los estudiantes en la solución de tareas con cierto nivel de complejidad (Fielding-Wells, 2016); o con la participación de profesor y estu-

diantes en la argumentación colectiva (Conner et al., 2014)–. En lo que concierne al profesor se resalta su papel en estudios durante procesos de demostración (Knipping y Reid, 2015), en la orientación e interpretación de las discusiones de clase (Forman et al., 1998), en las estrategias utilizadas para preguntar a los estudiantes (Kosko, Rougee y Herbst, 2014), en el análisis de la estructura de argumentos (Metaxas, Potari y Zachariades, 2016), en cómo su conocimiento puede influenciar la discusión y el razonamiento de los estudiantes (Mueller, Yankelewitz y Maher, 2014), o en la gestión al planear y dirigir tareas (Styliannides, Bieda y Morselli, 2016).

Estos avances en la investigación permiten afirmar que la argumentación es, sin duda, importante en la Educación Matemática, lo cual abre un espacio para considerar otras miras y realizar diferentes investigaciones. También se puede reconocer una línea de investigación en rápida expansión, con preguntas abiertas, para las cuales se requieren respuestas teóricas, metodológicas y pragmáticas.

ESTUDIO SOBRE LA ARGUMENTACIÓN DEL PROFESOR EN LECCIONES DE CLASE

De manera específica, el trabajo doctoral *Argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase* (Toro, 2020) intenta contribuir a la investigación en Educación Matemática en las líneas argumentación y demostración, y comunicación y lenguaje, en lo que refiere a comprender cómo es la argumentación del profesor de matemáticas en lecciones habituales de clase donde tienen lugar la discusión de una serie de tareas. Se adopta una perspectiva teórica, que se apoya en la articulación de dos consideraciones teóricas: la argumentación y el discurso en la clase de matemáticas. En esta tesis, de acuerdo con un enfoque interpretativo de corte cualitativo a partir de la observación de dos profesores de secundaria, se buscó responder la pregunta: ¿cómo es la argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase? Para ello se plantearon tres preguntas auxiliares que dirigen el análisis de los datos: (i) ¿cuáles son las características de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?, (ii) ¿cuáles son los propósitos de la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?, y (iii) ¿cuáles son las condiciones que activan la argumentación del profesor de matemáticas durante la discusión de tareas en clase?

La respuesta a la primera pregunta auxiliar contempló considerar elementos del análisis del discurso y de aspectos teóricos, lo cual permitió identificar características en tres dimensiones. En la dimensión comunicativa se reconocen aseveraciones, preguntas y gestos o expresiones; en la dimensión interaccional se reconocen la participación, los medios y las normas de clase para convencer y discutir; y en la dimensión epistémica se reconocen el tratamiento del objeto matemático, los conceptos y las definiciones, el retomar otras lecciones, el tratamiento de errores, procedimientos y respuestas, y el justificar y/o refutar. Cada una de las dimensiones está acompañada de una serie de acciones del profesor (Ruthven y Hofmann, 2016), que permiten identificarlas en situaciones de lecciones de clase.

La respuesta a la segunda pregunta requirió de la inclusión de términos como intervención argumentativa y cierre, que permitieron identificar determinados propósitos educativos en la argumentación de los profesores en los diferentes fragmentos seleccionados para el análisis.

La respuesta a la tercera pregunta necesitó la adaptación de un referente teórico (Solar y Deulofeu, 2016), para poder identificar indicadores dentro de condiciones que activan la argumentación del profesor. Se identifican las siguientes condiciones propiciadoras: preguntas y oportunidades de participación en las estrategias comunicativas e interactivas; intervenciones argumentativas y cierres en el enfoque de la lección; tipo de tarea y procedimiento de solución de la tarea en el enfoque de la tarea; y tratamiento de objetos matemáticos, retomar otras lecciones, prever lecciones futuras y maneras de justificar y refutar en el conocimiento profesional.

A continuación, se retoma el escenario expuesto al comienzo de este documento. La profesora protagonista del fragmento tiene experiencia en la enseñanza de las matemáticas, ostenta un título de formación posgraduada en Educación Matemática y accedió de manera voluntaria a hacer parte de la investigación. La profesora tuvo autonomía para la preparación de sus lecciones y diseño de tareas.

Cada fragmento inicia con una intervención argumentativa (letra en azul) y termina con un cierre (en naranja); en algunos casos, la intervención argumentativa está precedida de turnos que la contextualizan; no siempre hay una intervención argumentativa y un cierre, puede presentarse más de una intervención argumen-

tativa o más de un cierre. Al final de cada intervención de la profesora, destacada en letra cursiva, se incluye un marcador de posición con letras minúsculas, así como un código para caracterizar la reacción. En los análisis se discuten las diferencias de opinión y cómo la profesora logra convencer a los estudiantes, lo cual permite analizar la argumentación en el fragmento. Además, se indican los propósitos de la argumentación de la profesora y las condiciones que activaron dicha la argumentación.

50. Estudiante 1: *¿Uno puede medir 59°?*
51. Profesora: *Uno puede medir 59°^{aRet.} Pues si hablamos desde la parte exacta tiene que medir 60°^{bExp.}, sin embargo, recordemos que nosotras siempre manejamos un margen de error^{cRed} ¿cuánto puede ser ese margen de error en los ángulos?^{dAve}*
52. Estudiantes: De dos...
53. Profesora: *¿De dos qué?^a*
54. Estudiante 2: Adelante y atrás.
55. Profesora: *¿Pero de dos qué?... ¿Centímetros? ¿Milímetros?^{Red}*
56. Estudiantes 3: ¡Centésimas!
57. Profesora: *¿Centésimas?^{Des}*
58. Estudiantes: (Risas)
59. Profesora: *¿Qué es lo que estamos midiendo?^{Ave}*
60. Estudiantes: Grados.
61. Profesora: *Lo que estamos midiendo^{Ret...}*
62. Estudiante 2: De dos grados.
63. Profesora: *Sería de dos grados^{aApr.} porque lo que estamos midiendo ¿qué son?^b*
64. Estudiantes: Grados.
65. Profesora: *¡No!^{Des}*
66. Estudiante 3: *¿Triángulos?*
67. Estudiantes: *¡Ángulos!*
68. Profesora: *(Asienta con la cabeza^{aApr}) Entonces si estamos midiendo ángulos, recordemos que los ángulos se miden son en grados, no se miden*

en centímetros, ni milímetros... Porque los ángulos... Eh... nos están mostrando es la amplitud, estamos midiendo es la amplitud que hay entre un segmento y otro, cuando estamos midiendo una longitud esa sí la estamos midiendo en centímetros, milímetros, metros
bExp (...)

El fragmento que tiene lugar en una lección de geometría muestra cómo la argumentación de la profesora intenta vincularse con preguntas de las estudiantes y con dificultades al nombrar objetos matemáticos. A continuación, en las Tablas 1, 2 y 3 se enuncian las características correspondientes a cada una de las dimensiones.

Tabla 1: características de la dimensión comunicativa

Característica	Acciones
Aseveraciones	<ul style="list-style-type: none"> - Plantear aseveración para retomar y expandir intervención de un estudiante [51a-b] - Plantear aseveración para redireccionar la intervención del estudiante [51c] - Plantear aseveración para retomar la intervención anterior [61] - Plantear aseveración para aprobar la intervención de un estudiante [63a] - Plantear aseveración para expandir la intervención de un estudiante [68b]
Preguntas	<ul style="list-style-type: none"> - Plantear pregunta para redireccionar la intervención de un estudiante [55] - Plantear pregunta para averiguar la apropiación de un concepto que fue abordado en lecciones anteriores [51d] - Plantear pregunta para solicitar aclaración ante la intervención de un estudiante [53a, 63b]
Gestos o expresiones	<ul style="list-style-type: none"> - Utilizar expresión para desaprobación la intervención de un estudiante [65] - Aprobar con un gesto la intervención de un estudiante [68a]

Una pregunta de una estudiante en [50], considerada acá como una diferencia de opinión, desencadena una intervención de la profesora en [51]. Siguen a esta intervención aseveraciones y preguntas de la profesora con las que además de intentar responder a la estudiante, pretende comunicar las matemáticas y lograr que las estudiantes se expresen de una manera acorde, o al menos esperada, al

grado en el cual se encuentran. En particular, en este fragmento llama la atención cómo los actos verbales son acompañados de expresiones y gestos [65, 68a], con los cuales la profesora aprueba o desaprueba intervenciones de los estudiantes.

Tabla 2: características de la dimensión interaccional

Característica	Acciones
Participación	- Involucrar a los estudiantes en la respuesta de una pregunta presentada por él mismo o por un estudiante [51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 68] - Atender a duda presentada por un estudiante [51]
Normas de clase	- Utilizar normas de clase para responder a pregunta presentada por un estudiante o por él mismo [51c]
Convencer	- Convencer a los estudiantes de la respuesta a la pregunta presentada por él mismo o un estudiante [51b-c, 68]

Se identifican como características de orden interaccional en este fragmento las siguientes: participación, normas de clase y convencer, las cuales permiten afirmar que la profesora considera importante vincular a sus estudiantes para dar respuesta a una pregunta, y busca plantear una justificación que logre convencer de la respuesta a la pregunta inicial y de la situación que esta desencadenó.

Tabla 3: características de la dimensión epistémica

Característica	Acciones
Tratamiento del objeto matemático	- Plantear propiedades del objeto matemático asociado a la respuesta de una determinada pregunta [51b, 68b] - Solicitar claridad en el uso de un determinado objeto matemático [53, 55, 59, 61, 63b]
Retomar otras lecciones	- Retomar temas ya vistos para dar respuesta a una determinada pregunta [51c]
Justificar o refutar	- Refutar la intervención de un estudiante [57, 65] - Presentar justificación para el uso de conceptos asociados a la solución de una determinada pregunta [68b]

La dimensión epistémica en este fragmento presenta tres características: (i) el tratamiento del objeto al plantear propiedades y al solicitar claridad, (ii) retomar

otras lecciones, y (iii) justificar o refutar. Estas características permiten reconocer no solo elementos discursivos en la argumentación de la profesora, sino también elementos que permiten reconocer una intención de educar en matemáticas.

Desde la intervención argumentativa en [50] hasta el cierre en [68] se pueden señalar, al menos, tres propósitos de la argumentación de la profesora: resolver preguntas de los estudiantes [51, 68], aclarar el procedimiento de solución de la tarea [51, 59, 63, 68] y puntualizar en las propiedades de los objetos matemáticos involucrados en el procedimiento de solución de la tarea [55, 57, 59, 61, 63, 68], en este caso ángulo y triángulo. Los tres propósitos señalados permiten identificar cómo la profesora, además de presentar la solución de una determinada tarea en la que se abordan aspectos matemáticos propios de la lección y del curso, está interesada en que sus estudiantes participen del discurso de clase.

La pregunta de Clara en [50] corresponde en este fragmento a la condición que activó, inicialmente, la argumentación en la profesora. La estudiante tiene dudas respecto a la figura que ha construido, observa que su triángulo no cumple de manera exacta con la indicación de la tarea, por lo cual recurre a una validación por parte de la profesora. Además de la pregunta de Clara, la profesora plantea una pregunta en [51d], para involucrar a las demás estudiantes en la respuesta. Pregunta que al parecer era solo de seguimiento al discurso, es decir, la profesora esperaba que las estudiantes respondieran ‘de dos ángulos’. Por lo cual, la manera como la profesora aborda la tarea a partir de la intervención de las estudiantes en [52], se convierte en una segunda condición que activó su argumentación, es decir no fue la tarea misma la que exigió una argumentación por parte de la profesora, sino la manera como la profesora aborda el desarrollo y comprensión de esta.

RETOS EN LA INVESTIGACIÓN

De acuerdo con los apartados anteriores podrían señalarse diferentes retos para los profesores de matemáticas en formación y en ejercicio, para los formadores de profesores, para las facultades de Educación y para la comunidad de investigación en Educación Matemática, en relación con la argumentación en las clases matemáticas. Entre estos retos es posible resaltar trece: (1) apropiación del currículo y estándares curriculares por la comunidad educativa; (2) incorporación de la argumentación en las prácticas habituales de aula; (3) diseño y gestión

de tareas que favorezcan la argumentación; (4) gestión de errores y de contingencias en lecciones de clase; (5) creación de oportunidades de comunicación y participación en las lecciones de clase, (6) creación de oportunidades de discusión de tareas en las lecciones de clase, (7) creación de oportunidades que permitan encontrar conexiones entre la explicación y la argumentación, o la demostración y la argumentación; (8) creación de un ambiente en las lecciones de clase que favorezca la justificación, la refutación, los contraejemplos, entre otros; (9) formación en competencias argumentativas a los futuros profesores; (10) investigaciones que consideren estudios longitudinales y naturaleza cuantitativa; (11) investigaciones que permitan encontrar vínculos entre modelación y argumentación; (12) investigaciones que se cuestionen por la orquestación de discusiones en clase para favorecer la argumentación; (13) investigaciones que profundicen en el estudio del discurso matemático del profesor en relación con la argumentación.

REFERENCIAS

- Ayalon, M. y Even, R. (2016). Factors shaping students' opportunities to engage in argumentative activity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 575-601. <https://doi.org/10.1007/s10763-014-9584-3>
- Boero, P. (2011). Argumentation and proof: Discussing a "successful" classroom discussion. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 120-130). Rzeszów, Polonia: ERME.
- Common Core State Standards Initiative (CCSSI). (2010). *Common Core State Standards for Mathematics*. Recuperado de http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf
- Conner, A., Singletary, L., Smith, R., Wagner, P. y Francisco, R. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 401-429. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8>
- Fahse, C. (2017). Issues of a quasi-longitudinal study on different types of argumentation in the context of division by zero. *Proceedings of the 10th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Dublin, Irlanda: ERME.
- Fielding-Wells, J. (2016). "Mathematics is just $1 + 1 = 2$, what is there to argue about?": Developing a framework for argument-based mathematical inquiry. En B. White, M. Chinnappan y S. Trenholm (eds.), *Proceedings of the 39th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 214-221). Adelaide: MERGA.

- Forman, E., Larreamendy-Joerns, J., Stein, M. y Brown, C. (1998). “You’re going to want to find out which and prove it”: Collective argumentation in a mathematics classroom. *Learning and Instruction*, 8(6), 527-548.
- Goizueta, M. (2019). Epistemic issues in classroom mathematical activity: There is more to students’ conversations than meets the teacher’s ear. *The Journal of Mathematical Behavior*, 55. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2019.01.007>
- González, G. y Herbst, P. (2013). An oral proof in a geometry class: How linguistic tools can help map the content of a proof. *Cognition and Instruction*, 31(3), 271-313. <https://doi.org/10.1080/07370008.2013.799166>
- ICFES (2020). *Informe Nacional de Resultados para Colombia - PISA 2018*. Bogotá, Colombia: ICFES.
- Knipping, C. y Reid, D. (2015). Reconstructing argumentation structures: A perspective on proving processes in secondary mathematics classroom interactions. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping y N. Presmeg (eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education* (pp. 75-101). NY: Springer.
- Kosko, K., Rougee, A. y Herbst, P. (2014). What actions do teachers envision when asked to facilitate mathematical argumentation in the classroom? *Mathematics Education Research Journal*, 26, 459-476. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0116-1>
- Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En N. Planas (coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 61-78). Barcelona, España: Grao.
- Krummheuer, G. (2013). The relationship between diagrammatic argumentation and narrative argumentation in the context of the development of mathematical thinking in the early years. *Educational Studies in Mathematics*, 84(2), 249-265. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9471-9>
- Metaxas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher’s pedagogical arguments using Toulmin’s model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics*, 93(3), 383-397. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9701-z>
- Ministerio de Educación Nacional (MEN) (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá, Colombia: Autor.
- Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases curriculares educación básica*. Santiago de Chile, Chile: Autor.
- Molina, Ó., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias*, 37(1), 93-116. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2484>

- Mueller, M., Yankelewitz, D. y Maher, C. (2014). A framework for analyzing the collaborative construction of arguments and its interplay with agency. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 369-387. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9354-x>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2014). *Principles to actions ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Autor.
- Pedemonte, B. y Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the $\text{ck}\zeta$ -enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104-122. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.008>
- Ruthven, K. y Hofmann, R. (2016). A case study of epistemic order in mathematics classroom dialogue. *PNA*, 11(1), 5-33. <https://doi.org/10.30827/pna.v11i1.6079>
- Selling, S., García, N. y Ball, D. (2016). What does it take to develop assessments of mathematical knowledge for teaching?: Unpacking the mathematical work of teaching. *The Mathematics Enthusiast*, 13, 35-51. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1364>
- Solar, H. y Deulofeu, J. (2016). Condiciones para promover el desarrollo de la competencia de argumentación en el aula de matemáticas. *Bolema*, 30, 1092-1112. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a1>
- Stylianides, A., Bieda, K. y Morselli, F. (2016). Proof and argumentation in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. Leder y P. Boero (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 315-351). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Toro, J. (2020). *Argumentación del profesor durante la discusión de tareas en clase*. Tesis doctoral, Universidad de Antioquia, Colombia.
- Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona, España: Ediciones Península.
- Wenzel, J. (2006). Three perspectives on argument. En R. Trapp (ed.), *Perspectives on argumentation* (pp. 9-26). NY, EUA: Idebate Press.
- Whitenack, J., Cavey, L. y Ellington, A. (2014). The role of framing in productive classroom discussions: A case for teacher learning. *Journal of Mathematical Behavior* 33, 42-55. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.003>