CAMBIOS EN EL DISCURSO SOBRE REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN UNA CLASE DE GEOMETRÍA

María Fernanda Castro, William Cárdenas y Claudia Vargas
Universidad Pedagógica Nacional
mfcastros@upn.edu.co, wacardenas@pedagogica.edu.co, cmvargasg@pedagogica.edu.co

Este artículo tiene como propósito describir y ejemplificar acciones de un profesor de geometría, que generan cambios en el discurso matemático sobre las representaciones gráficas en geometría, cuando utilizan sistemas de geometría dinámica. Para ello, se adopta la estrategia investigativa basada en prácticas usuales. El marco de referencia de la investigación incluye una caracterización de discurso matemático y resultados de investigaciones que han identificado acciones del profesor para promoverlo y la relación entre los sistemas de geometría dinámica y el desarrollo del discurso.

INTRODUCCIÓN

En el año 2019, dos de los autores de este artículo desarrollamos una investigación en la que identificamos acciones de un profesor, apoyadas en el uso del programa GeoGebra, que generaron cambios en el discurso del aula, relacionados con la representación de figuras geométricas (Cárdenas y Castro, 2019). El propósito de este artículo es describir y ejemplificar algunas de estas acciones.

La investigación citada se enmarca en una perspectiva sociocultural de la educación matemática y está en correspondencia con autores que asumen el aprender matemáticas como participar en prácticas matemáticas discursivas propias de esta disciplina (Goos, 2004; Radford y Barwell, 2016). Además, nos interesa hacer énfasis en las representaciones de figuras geométricas y en el uso de programas de geometría dinámica, porque en el campo de la educación matemática no abundan investigaciones relacionadas con la forma en que los estudiantes interpretan y piensan las representaciones dinámicas que surgen en el marco de discusiones grupales. Esto lleva a preguntarse por las acciones que debería realizar el profesor para ayudar a que el estudiante interprete estas representaciones y las use para dar explicaciones y argumentos en discusiones grupales.

Castro, M. F., Cárdenas, W. y Vargas, C. (2022). Cambios en el discurso sobre representaciones gráficas en una clase de geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 147-154. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

MARCO DE REFERENCIA

El marco teórico que sustenta nuestra investigación está dividido en tres partes: una conceptualización sobre discurso matemático; algunas acciones del profesor que favorecen el desarrollo del discurso; y la relación entre los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) y el desarrollo del discurso matemático.

Discurso matemático

Relacionamos el aprendizaje de las matemáticas con la participación en prácticas discursivas, lo cual implica asumir el aprendizaje como el desarrollo de un discurso. Sfard (2008) caracteriza el discurso matemático a partir de cuatro rasgos: vocabulario, mediadores visuales, narrativas y rutinas. El vocabulario es el uso específico que la comunidad da a las palabras; en matemáticas, estas pueden estar relacionadas con cantidades, formas y objetos abstractos. Los mediadores visuales son recursos con los cuales los participantes de una comunidad matemática pueden identificar el objeto de la conversación y coordinan su comunicación. Las narrativas son verbalizaciones habladas o escritas, que pueden presentar tanto descripciones de objetos como relaciones entre estos. Estas verbalizaciones son sometidas a aprobación o rechazo en la comunidad. Las rutinas son maneras de actuar repetitivas guiadas por regularidades, que caracterizan un discurso.

Acciones del profesor para favorecer el discurso matemático

Los participantes de una comunidad matemática deben asumir roles participativos, solucionar de manera colaborativa problemas y usar estrategias y explicaciones que permitan la institucionalización del saber (Goos, 1996). Dado que, en una clase, el profesor es el miembro experto de la comunidad, una de sus prioridades debe ser contribuir a que las actuaciones de los estudiantes se asemejen a las de la comunidad de referencia.

Haciendo eco a Quaranta y Tarasow (2004), a Goos (2004) y a Mariotti (2009), a continuación, nombramos algunas acciones que puede desarrollar un profesor de matemáticas para impulsar el discurso matemático de sus estudiantes: a) diseñar tareas que encaminan a los estudiantes a asumir responsabilidad de encontrar una solución; b) orientar y guiar a los estudiantes cuando trabajan en grupos; c) invitar a los estudiantes a explicar sus ideas y a solicitar la ayuda de los compañeros antes de consultarle a él; d) mediar en las interacciones para promover el trabajo colaborativo y favorecer la comunicación entre los estudiantes; e) ceder la responsabilidad de validación al grupo; f) inquietar a los estudiantes sobre cómo hallar soluciones; g) usar la voz de los estudiantes, al discutir la resolución de problemas; h) problematizar el punto de vista de algún estudiante; i) impulsar el buen uso de terminología y lenguaje matemático; j) reconstruir el contexto de una tarea que se realiza con el apoyo de un artefacto (por ejemplo, programa de geometría dinámica) e identificar el papel que juega este en su solución del problema; k) dirigir la atención de los estudiantes hacia aspectos particulares de su experiencia con un artefacto; y k) solicitar a los estudiantes hacer explicito lo aprendido.

Relaciones entre un SGD y el discurso matemático

El papel de los SGD es crucial en la constitución del discurso. Esto debido a que se convierten en una herramienta que apoya los procesos de comunicación de los estudiantes, contribuye a generar representaciones que se transforman en mediadores visuales, apoya la producción de narrativas y contribuye al uso adecuado de términos matemáticos. Por ejemplo, Schacht (2017) afirma que cuando los estudiantes trabajan empleando herramientas digitales en la clase de matemáticas, el lenguaje cambia. Esto debido a que su uso permite un primer acercamiento al lenguaje matemático, pues, aunque usan términos asociados al artefacto, estos pueden evolucionar hacia términos aceptados por una comunidad matemática. Mariotti (2009) resalta que la gestión que hace el profesor en relación con el uso del artefacto (por ejemplo, un SGD) permite el desarrollo del discurso, pues ayuda a los estudiantes a explicitar sus significados personales y transformarlos en significados matemáticos.

Metodología

La estrategia investigativa empleada es una que se basa en prácticas usuales (Lesh y Kelly, 2000). Consiste en realizar un acercamiento a escenarios educativos, con la intención de caracterizar, describir o interpretar un fenómeno particular que se presenta en un contexto específico.

La primera fase de la estrategia es la observación. En nuestro caso realizamos el registro de cuatro clases consecutivas de geometría de grado sexto, en un colegio de Bogotá, durante el primer semestre del año 2018. Dicho escenario estaba conformado por 30 estudiantes, un profesor investigador y dos observadores participantes. En las cuatro clases se trabajó en torno a tres problemas de construcción de figuras geométricas que garantizaran propiedades relacionadas con colinealidad y equidistancia. Así, en el primer problema se solicitó a los estudiantes construir diez puntos colineales de manera que los puntos consecutivos estuvieran igualmente separados (Problema 1); en el segundo, se les pidió construir 10 puntos que equidistaran de un punto A (Problema 2); y el tercero, pidió construir un triángulo isósceles (Problema 3). La segunda fase de la estrategia es la construcción de datos. La comenzamos haciendo las transcripciones de las interacciones registradas. Luego, se identificaron los episodios de interacciones en las que las acciones del profesor favorecían el discurso matemático de los estudiantes cuando utilizaban un SGD. Organizamos los episodios teniendo en cuenta tres asuntos centrales en las conversaciones: colinealidad, equidistancia y la construcción del triángulo isósceles. La tercera fase de la estrategia es la construcción de una herramienta analítica. En nuestro caso, la generamos a partir de las acciones que reportamos en el marco de referencia.

EJEMPLO DE ANÁLISIS

En el ejemplo que exponemos a continuación, pretendemos mostrar las acciones del profesor que permitieron un cambio en el discurso de una estudiante (Adriana), relativo a la relación entre la representación gráfica y los atributos geométricos que la determinan. Para ello, describimos tres episodios.

Episodio 1

El episodio surgió en la segunda sesión de clase observada. Específicamente, en un momento en el que Sebastián construyó 10 puntos que visualmente parecían colineales. Es allí cuando surge la siguiente interacción:

232.	Profesor:	¿Una línea? Ahí dice que no tocaba hacer una línea. ¿O sí?
238.	Samuel A:	(Interrumpe a Paola). Una cuadrícula.
239.	Profesor:	¿O sea necesito otra cosa? ¿Qué necesitaría?
260.	Adriana:	Pero no se sabe sí tienen la misma distancia.
263.	Profesor:	Y entonces qué hago para que me dé la misma medida.
267.	Adriana:	Con la, con la cuadrícula.
270:	Profesor:	Venga le activamos la cuadrícula.
275.	Sebastián:	(Ubica los puntos alineados utilizando la cuadrícula).

276.	Profesor:	¿De esta manera se podría ubicar? (Señala al televisor).
277.	Adriana:	(Asiente con la cabeza)
278.	Profesor:	Aaah, y si yo no quiero tener la cuadrícula, porque qué tal que yo solo tenga una hoja blanca.

La primera acción del profesor fue indagar sobre la verbalización proferida por Sebastián que incluía el término "una línea" [232]. Es una acción que cuestiona el uso de un vocabulario no especializado y, a su vez, pretende empezar a involucrar en el discurso de la comunidad de clase, rutinas y narrativas que permiten hacer evidente la necesidad de usar objetos geométricos para garantizar los atributos que cumple una representación gráfica. Esta acción genera que los estudiantes propongan el uso de otra herramienta del SGD: la cuadrícula. Observamos en la intervención [270] que el profesor acepta el uso de esta herramienta, aun cuando no es usual su empleo en la comunidad matemática de referencia. Esto lo hace con el propósito de generar discusiones entre los estudiantes, para evaluar la pertinencia de dicha herramienta. Finalmente, la última acción es generar incertidumbre al proponerle a los estudiantes suponer que no cuentan con la cuadrícula [278].

Respecto a Adriana, hemos evidenciado que apoya el uso de la cuadricula, pues considera que con la propuesta de Sebastián no se garantiza la condición de que los puntos deben estar equiseparados.

Episodio 2

El Episodio 2 se dio en el marco de la puesta en común del Problema 2. En esta se discutieron dos propuestas para construir un conjunto de 10 puntos que equidistaran de un punto A. La propuesta de Camilo consistió en construir una circunferencia con centro en A y luego colocar nueve puntos en esta. Es importante aclarar que, aunque Adriana no expuso su solución al problema, ella también usó la herramienta circunferencia para solucionar el problema, pero obtuvo una construcción blanda. Adriana construyó un conjunto de 10 puntos que visualmente parecían equidistar de un punto A. Luego construyó una circunferencia con centro en A, y que contenía a uno de esos puntos, y posteriormente arrastró los puntos sobre la circunferencia. Traemos a cuento la solución de Adriana, porque consideramos que influyó en las intervenciones hechas por ella durante la exposición de la propuesta de Camilo.

Luego de que Camilo expuso su construcción, surgió la siguiente interacción:

808. Profesor: Yo vi que había otros que estaban haciendo la que estaba haciendo Camilo. Entonces, vamos a terminar la clase definiendo ese objeto geométrico, que nos va a servir para… ¿oiga para qué nos va a servir la circunferencia?

811. Adriana: Para saber que tiene la misma medida.

815. Profesor: La misma distancia. La circunferencia nos va a servir ahorita muchísimo para eso.

Nos es evidente que la acción del profesor en las intervenciones [808, 815] está dirigida a focalizar la discusión en torno a un atributo de la circunferencia, el cual permite garantizar la equidistancia. La acción consiste en solicitar a los estudiantes hacer una síntesis respecto a la utilidad de la herramienta circunferencia, e institucionalizar un saber relativo a este asunto. Es la institucionalización de una narrativa que, parafraseando al profesor, podríamos expresar como “los puntos de una circunferencia equidistan de su centro”. A su vez, el germen de una rutina para la construcción de figuras geométricas en las cuales se requiera garantizar equidistancia. Adicionalmente, Adriana es quien efectúa la síntesis, al reconocer el atributo de la circunferencia que se garantiza cuando se usa esta herramienta en una construcción. Cabe resaltar que, aunque la construcción de Adriana no es robusta, es posible indicar que ella empieza a reconocer que con la circunferencia es posible construir puntos equidistantes.

Episodio 3

El tercer episodio se desarrolla durante la puesta en común de la solución al Problema 3. En ella, Adriana intervino comunicando la manera en que realizó su construcción:

525. Adriana: Bueno entonces, hacemos una circunferencia y pues dos puntos encima, en el borde de la circunferencia y después los juntamos (construye dos radios de la circunferencia y el triángulo determinado por ellos). Podemos moverlos y siempre estos dos [los radios] van a quedar con la misma medida.

526. Pablo: (Dirigiéndose a Adriana) ¿Y por qué?

528. Adriana: Porque del centro al borde de la circunferencia siempre va a tener la misma medida.

En ese fragmento, en [528], encontramos evidencia de que Adriana se ha apropiado de la definición de circunferencia pues, aunque utiliza lenguaje coloquial, su verbalización está en consonancia con la comunidad matemática de referencia. Además, teniendo en cuenta la descripción proferida por Adriana en [525], consideramos que cambió su forma de proponer la solución a un problema: pasó de una construcción blanda a una robusta, hecho que se manifiesta en que inicialmente aprobaba el uso de la cuadrícula para construir puntos colineales y luego, construyó un triángulo isósceles con una circunferencia, explicando por qué funciona para lo cual usó mediadores visuales que proporciona el SGD,

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En el análisis realizado identificamos acciones repetitivas del profesor para promover cambios en el discurso de los estudiantes, apoyándose en el SGD, que buscan que el estudiante empiece a reconocer qué es lo que se debe comunicar cuando el profesor le pide que solucione un problema, y cambios específicos en el discurso de algunos estudiantes desencadenados por esas acciones. Expresamos a continuación algunos cambios en el discurso respecto a las representaciones geométricas, junto con la descripción de las acciones más determinantes para generarlos:

Cambio	**Acciones**
De proponer construcciones que permiten solucionar un problema a reconocer las restricciones de las mismas	- Genera incertidumbre acerca del cumplimiento de una propiedad geométrica que se supone debe cumplir la construcción realizada - Solicita el término matemático que corresponde a un mediador visual - Propone realizar construcciones que corresponden a una propuesta de un estudiante - Resalta las condiciones que no cumple una construcción - Solicita especificar una propiedad o característica que cumplen ciertos objetos geométricos en una construcción.
De proponer una construcción blanda a una robusta, modificando la rutina asociada al uso del papel cuadriculado	- Realiza preguntas para que los estudiantes expliquen una figura realizada en el SGD - Cuestiona una construcción blanda exaltando los inconvenientes que presenta - Solicita prever lo que ocurrirá al efectuar con el SGD, la propuesta de un miembro de la clase

De verbalizar o mostrar la solución a un problema en el SGD a explicar por qué la construcción realizada permite solucionar el problema.	- Solicita especificar una propiedad o característica que cumplen ciertos objetos geométricos en una construcción - Solicita a un estudiante defender la validez de una construcción realizada en el SGD cuando surge un argumento que la invalida - Solicita apoyarse en una definición, hecho geométrico, propiedad o procedimiento para desarrollar una idea - Destaca como punto crítico de la conversación las condiciones que se deben cumplir en una definición, hecho geométrico procedimiento o construcción

REFERENCIAS

Cárdenas, W. A. y Castro, M. F. (2019). *Una comunidad de discurso en la clase de geometría, apoyada por la tecnología digital y la gestión del profesor*. Recuperado de: http://hdl.handle.net/20.500.12209/11524.

Goos, M. (1996). Making sense of mathematics: The teacher's role in establishing a classroom community of practice. Ponencia presentada en *Annual Postgraduate Research Conference of the Graduate School of Education*. Queensland, Australia.

Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*, 258-291.

Lesh, R. y Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. Kelly y R. Lesh (eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (cap. 9, 197-230) N.J: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.,

Mariotti, M. A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM, 41*(4), 427-440.

Quaranta, M. y Tarasow, P. (2004). Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. *RELIME, 7*(3), 219-233.

Radford, L. y Barwell, R. (2016). Language in mathematics education research. En Á. Gutiérrez, G. C. Leder y P. Boero (eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues* (pp. 275-313). Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating. Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Schacht, F. (2017). Between the conceptual and the signified: How language changes when using dynamic geometry software for construction tasks. *Digital Experiences in Mathematics Education, online first*. doi: 10.1007/s40751-017-0037-9.