

CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO DE ALTURA DE TRIÁNGULO CON ESTUDIANTES DE PRIMARIA

Óscar Cetina, Nathalia Moreno y Carmen Samper

Universidad Pedagógica Nacional

ojcetas@upn.edu.co, inmorenob@upn.edu.co, csamper@pedagogica.edu.co

Siguiendo recomendaciones de investigadores en Educación Matemática, en vez de dictar una definición de un objeto geométrico a unos estudiantes de primaria, les propusimos la tarea de analizar ejemplos y no ejemplos, con la intención de incidir favorablemente en su proceso de construcción de significado de altura de triángulo. En este artículo presentamos un ejemplo ilustrativo del análisis de un fragmento de diálogo en el que se evidencia cómo unos estudiantes explican por qué una representación es no ejemplo de altura, usando su definición personal de altura de triángulo, recién construida por ellos. Exponemos los resultados y conclusiones que dejó esta experiencia.

INTRODUCCIÓN

Presentamos el análisis de la interacción entre estudiantes de grados cuarto y quinto cuando resuelven una tarea. Tal análisis hizo parte del estudio realizado para dar respuesta al problema de investigación propuesto en el trabajo de grado para optar por el título Maestría en Docencia de la Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional (Bogotá, Colombia). El objetivo de dicho estudio era determinar cómo contribuir al proceso de formación en geometría de estudiantes de grados cuarto y quinto. Específicamente, pretendíamos analizar cómo las definiciones, desde su elaboración hasta su uso, inciden en el proceso de construcción de significado del objeto definido. El objetivo de aprendizaje de las tareas que diseñamos era favorecer la construcción de significado de un objeto geométrico –a través de la construcción de definiciones, del análisis de ejemplos y no ejemplos y del uso de definiciones para la toma de decisiones–; en dichas tareas usamos representaciones en papel y lápiz y/o en geometría dinámica.

En este artículo, presentamos inicialmente algunas ideas del marco de referencia que sustenta nuestra propuesta y de las principales relaciones entre ellas. Luego, exponemos la estrategia investigativa que implementamos para llevar a cabo este estudio. En seguida, damos un ejemplo ilustrativo del análisis de un

fragmento, considerado uno de los datos importantes de nuestra investigación. Y finalizamos con los resultados y conclusiones que dejó nuestro estudio.

MARCO DE REFERENCIA

Exhibimos, por una parte, la perspectiva teórica desde la cual concebimos la construcción de significado y, por otra, aspectos relacionados con dicho proceso. Nos referimos al uso de no ejemplos para promover aprendizaje.

Como indican Leikin y Winicki-Landman (2001, citados en Silva, 2013), definir es más que asignar un nombre a un objeto geométrico; es un proceso en el que se captura el significado y el carácter de un concepto. Definir incide en la construcción de significado. Samper, Leguizamón y Camargo (2002) afirman que algunos profesores restringen el proceso de construcción de significado porque se limitan al establecimiento de una correspondencia entre definiciones formales o nombres y una representación visual del concepto o la relación, y a la memorización de las definiciones. Esto lleva a que el estudiante replique la definición sin ningún tipo de comprensión e interpretación.

Samper, Perry y Camargo (2017), en concordancia con lo anterior, exponen que construir significado de un objeto o una relación matemática consiste en lograr compatibilidad de las ideas que una persona tiene sobre estos (significado personal) con las que la comunidad de referencia ha establecido (significado institucional), a través de un proceso social y de interacción entre estudiantes y objetos en estudio. A medida que surge el objeto o la relación en diversas situaciones o procesos se descubren nuevas propiedades y, por tanto, se construye significado. Teniendo en cuenta lo que proponen Molina, Perry, Camargo y Samper (2015), el significado personal está constituido por el conjunto de interpretaciones de aspectos de un objeto matemático, que el estudiante ha ido construyendo a través de experiencias, individuales o colectivas; lo integran significados parciales y provisionales, que son “todas las ideas que va formando, reformando, precisando, modificando el estudiante, con respecto al objeto matemático” (Molina et al., 2015, p. 42). Los autores reconocen que el significado personal se manifiesta a través de las ideas que expresa el estudiante sobre el objeto y el uso que le da a este, en diversos procesos matemáticos, como justificar, resolver problemas, clasificar, definir, entre otros.

De Villiers (1995) recomienda dar a los estudiantes oportunidades para participar en la formulación y elección de las definiciones con el fin de promover la

construcción de significado. Consideramos que dar la definición y analizar cada parte de esta, construirla a partir de un análisis de ejemplos y no ejemplos, o extraerla de la solución de problemas son tres tipos de tareas que tienen el mismo objetivo.

Tsamir, Tirosh y Levenson (2008) comentan que, entre los principios generales de la construcción de significado de un concepto, según la psicología cognitiva, juegan un papel fundamental los ejemplos. Hay dos teorías que sobresalen para explicar el proceso de construcción de significado de un concepto: la clásica y la de prototipos. En la primera de estas, un concepto está representado por las características definitorias que comparten sus ejemplos. Para decidir si una figura es ejemplo se requiere evaluar si cumple las características. En la segunda, el concepto está representado por ejemplos ideales, prototipos, que sirven, a través de la comparación, para determinar si algo es ejemplo del concepto. Para favorecer el proceso de formación de conceptos geométricos se deben atender las dos teorías. Por ello, para construir significado de conceptos geométricos es necesario reconocer tanto ejemplos como no ejemplos de ellos.

ESTRATEGIA INVESTIGATIVA

En nuestro estudio usamos una aproximación de tipo interpretativa, con un enfoque fenomenológico dado que se pretendía desentrañar lo que decían y hacían los estudiantes de primaria respecto a las tareas que les propusimos, y cómo estas contribuyeron al proceso de construcción de significado. La estrategia investigativa adoptada en el trabajo de grado es la “entrevista basada en tareas” que expone Goldin (2000). Su propuesta se caracteriza por realizar una indagación sistemática de la actividad de los estudiantes, durante la resolución, con ayuda de recursos, de una tarea previamente diseñada, a través de un diálogo intencionado con los investigadores. El objetivo es, por una parte, rastrear los mecanismos de exploración, las causas de sus decisiones, las estrategias que usan y, por otra, evidenciar la construcción conceptual al resolver la tarea propuesta. Con las preguntas que hicimos buscábamos que los estudiantes expresaran con claridad sus ideas y sus decisiones. También pretendíamos poder interpretar su lenguaje y los términos que usaban en el momento de comunicarse.

En este artículo nos referimos solo a una de las tareas que diseñamos, la cual incluye dos de las acciones que contribuyen a la construcción de significado: construcción de definiciones y uso de estas. La tarea se propuso a cuatro parejas de estudiantes de quinto grado de primaria en un momento distinto a la clase de

matemáticas. Se escogieron estos estudiantes porque en las clases participaban y comunicaban sus ideas con bastante claridad.

La información se registró en videograbaciones y en hojas de respuestas, que guardamos como imágenes digitales. Adicionalmente, se elaboraron preguntas intencionadas para entender lo que pensaban los estudiantes y las razones de sus acciones al resolver la tarea.

Para analizar el proceso de los estudiantes al construir definiciones se establecieron varias categorías (véase Tabla 1). La primera es *Encontrar atributos* (EA). Se asigna a acciones o situaciones en las que los estudiantes al resolver la tarea y al realizar exploraciones consiguen encontrar, reconocer y manifestar características de las figuras presentadas, que podrían ser consideradas como atributos relevantes del objeto en estudio. Otra categoría, *Verificar atributos* (VA), se refiere a las acciones para determinar la existencia y el cumplimiento de atributos de un objeto geométrico. *Descartar atributos* (DA) es la categoría que se asigna a las acciones para decidir si uno o más atributos, de los ya identificados, están incluidos en la definición del objeto geométrico. Cuando los estudiantes deciden que una figura es un no ejemplo, quisimos determinar qué atributos evocan para tomar su decisión. Esto da lugar a la cuarta categoría que denominamos *Ausencia de atributos* (AA). Por último, la quinta categoría, *Modificar atributos* (MA), se refiere al proceso realizado después de identificar ciertos atributos, para deducir si deben ser incluidos en la definición del objeto.

Cada una de las categorías anteriores tiene tres subcategorías (véase Tabla 1) según lo que usen para tomar sus decisiones: representaciones con GeoGebra (GD) o en papel (P), ejemplos (E), o no ejemplos (NE).

A continuación, se presentan las categorías y subcategorías usadas en el análisis con su respectivo código. Por ejemplo, EA-GD-E significa encontrar atributos usando geometría dinámica con ejemplos. EA-P-NE significa encontrar atributos usando papel y no ejemplos.

Tabla 1: herramienta analítica

Categoría	Geometría dinámica (GD)	Papel (P)	Ejemplos (E)	No ejemplos (NE)	Codificación
Encontrar atributos (EA)	x		x		EA-GD-E
	x			x	EA-GD-NE

		x	x		EA-P-E
		x		x	EA-P-NE
Verificar atributos (VA)	x		x		VA-GD-E
	x			x	VA-GD-NE
		x	x		VA-P-E
		x		x	VA-P-NE
Descartar atributos (DA)	x		x		DA-GD-E
	x			x	DA-GD-NE
		x	x		DA-P-E
		x		x	DA-P-NE
Notar ausencia de atributos (AA)	x		x		AA-GD-E
	x			x	AA-GD-NE
		x	x		AA-P-E
		x		x	AA-P-NE
Modificar atributos (MA)	x		x		MA-GD-E
	x			x	MA-GD-NE
		x	x		MA-P-E
		x		x	MA-P-NE

EJEMPLO ILUSTRATIVO DEL ANÁLISIS: CASO J Y G

El propósito de la tarea a la que nos referimos es que los estudiantes propusieran una definición de altura de triángulo. Para ello, les mostramos representaciones de ejemplos y no ejemplos en papel.

Los estudiantes J y G, después de observar los ejemplos de altura de triángulo, registraron tres atributos comunes que, según ellos, caracterizaban las alturas representadas de los triángulos:

- el segmento no interseca totalmente el triángulo,
- la intersección entre el segmento y la recta mide 90° ,

- todas deben ser segmentos y deben estar conectadas a un vértice.

Los atributos definitorios que establecemos para altura de triángulo son los siguientes:

- ser un segmento,
- ser perpendicular a la recta que contiene un lado del triángulo,
- tener como extremos un punto de la recta y el vértice del triángulo que no pertenece a la recta anteriormente mencionada.

En la Figura 1 están las imágenes mostradas a los estudiantes. Luego se presenta la transcripción de la interacción entre los estudiantes J y G y la profesora (Pa).

Figura 1: no ejemplos de altura representados en papel

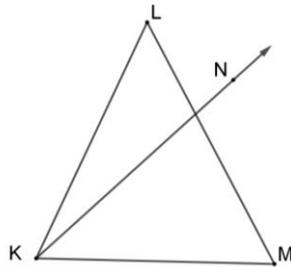


Imagen 1: el \overrightarrow{KN} (rayo KN) no es altura del ΔKLM (triángulo KLM)

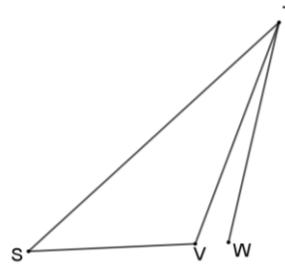


Imagen 2: el \overline{TW} (segmento TW) no es altura del ΔSVT (triángulo SVT)

- 65 Pa: Listo y ¿este? (Señala la Imagen 1)
- 66 J: ¿Este punto [punto N del rayo KN] qué hace por acá?
- 67 G: ¡Ah! Es un rayo.
- 68 Pa: ¿Entonces? (...)
- 69 G: El rayo también es infinito, ¿no?
- 70 J: Entonces tampoco es altura con un rayo.
- 71 Pa: ¿Esta? (Señala la Imagen 2)
- 72 J: Esa (Señala la abertura determinada por la intersección del segmento y la recta que contiene el lado del triángulo) sí no mide 90° .
- 73 Pa: ¿Será?
- 74 G: (Mide con el transportador el $\angle TWS$) Si da 90° (...) mmm

- 75 J: (Después de ubicar correctamente el transportador) No, no mide 90° (vuelve a medir el ángulo $\angle TWS$).
- 76 Pa: Pero (...) es un segmento, pero no mide 90° (...)
- 77 G: (En voz baja) no cumple con todas (...).
- 78 Pa: ¿Qué pasa si solamente cumple con una [propiedad]? Por ejemplo, acá (señala la Imagen 2) es segmento y está “conectado” como ustedes dicen (...)
- 79 J: Tiene que cumplir con todas [las propiedades] (...) O si no, no es una altura.

Usando la transcripción anterior y teniendo en cuenta la herramienta analítica propuesta, presentamos el análisis de la interacción de los participantes en el respectivo diálogo.

Respecto a la Imagen 1, para justificar que no se ha representado una altura, los estudiantes indican la ausencia de uno de los atributos que han establecido como característica relevante de altura de un triángulo. Lo anterior corresponde a AA-P-NE, pues J identifica que el punto N no pertenece al lado del triángulo [66], incumpliendo el atributo (i) de su lista. Para G, el atributo cuya ausencia nota es el (iii), ser segmento, ya que especifica que el rayo y la recta se extienden sin fin; en palabras de G, son infinitos [69]; así que, con ayuda de G, J descarta que una altura sea un rayo (DA-P-NE) [70]. En cuanto a la Imagen 2, J menciona la ausencia del atributo ser perpendicular a la recta que contiene el lado del triángulo (ii) (AA-P-NE) [72], y ante la duda de G, al usar el transportador [75], verifican el incumplimiento del atributo (ii) (VA-P-NE).

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Entrevemos aquí que el uso de no ejemplos contribuyó a destacar la necesidad de los tres atributos definitorios incluidos en la definición de altura, ya que los estudiantes los usaron para explicar por qué cada imagen no era un ejemplo. Específicamente, reconocieron cuál de dichas propiedades se incumplía. J y G identificaron que basta con que una representación incumpla una propiedad para ser no ejemplo del concepto.

Este ejercicio parece indicar que las tareas con ejemplos y no ejemplos sí pueden incidir en el proceso de construcción de significado. En parte se puede deber a que, con la presentación de ejemplos y no ejemplos y la solicitud de explicar por qué son no ejemplos, logramos animar a los estudiantes a examinar y explorar situaciones geométricas, y a comunicar sus ideas en la clase de geometría.

Observamos que los participantes pudieron reconocer atributos definitorios de los objetos de estudio en la tarea. Además, en el desarrollo de la Tarea 3, J indica que una representación es ejemplo de un objeto cuando: “*tiene que cumplir con todas* [los aspectos definitorios incluidos en una definición]” [79]. Él reconoce que solo al cumplirse todos los atributos de su listado puede el objeto ser altura de triángulo. Esto deja entrever que los estudiantes comprenden en qué consiste el proceso de definir en sí, es decir, además construyen significado de lo que es una definición.

REFERENCIAS

- De Villiers, M. (1995). The handling of geometry definitions in school textbooks. *Pythagoras*, 38, 3-4.
- Goldin, G. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. En A. Kelly y R. Lesh (2000). *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517-545). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.
- Molina, Ó., Perry, P., Camargo, L. y Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema Localización de Puntos. *Educación Matemática*, 27(2), 37-66.
- Samper, C., Leguizamón, C. y Camargo, L. (2002). La construcción de conceptos: una actividad importante para desarrollar razonamiento en geometría. *Revista EMA*, 7 (3), 293-309.
- Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2017). Construir significado, más que conocer la definición. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 51-58.
- Silva, L. (2013). Argumentar para definir y definir para argumentar. (Trabajo de grado de Maestría). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia.
- Tsamir, P., Tirosh, D. y Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: The case of triangles. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 81-95. doi: 10.1007/s10649-008-9133-