El arrastre mantenido como herramienta para propiciar la visualización y la conjeturación en geometría

Camilo Cuartas y Leonor Camargo
Universidad Pedagógica Nacional
wccuartasg@upn.edu.co, lcamargo@pedagogica.edu.co

En este artículo damos a conocer un estudio que hicimos como trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia). Este tenía como objetivo analizar el potencial del arrastre mantenido para favorecer el tránsito entre los procesos cognitivos de visualización y conjeturación, en el marco de la resolución de problemas con apoyo de GeoGebra. Un estudio exploratorio de casos nos permitió concluir que este tipo de arrastre permite a los estudiantes establecer relaciones de dependencia entre invariantes inducidos por el resolutor del problema e invariantes que se visualizan al hacer el arrastre, lo que favorece la producción de conjeturas.

Introducción

En diversos estudios investigativos (Baccaglini-Frank y Mariotti, 2010; Samper y Molina, 2013; Baccaglini-Frank y Antonini, 2016; Baccaglini-Frank, 2019) se menciona el arrastre mantenido y se afirma que tiene un gran potencial en la solución de problemas abiertos. En todos los cursos de geometría euclidiana de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional se trabaja con GeoGebra y se fomenta el uso de otros tipos de arrastre: el libre, el guiado, el vinculado o el de lugar ficticio (Arzarello et al., 2002). Sin embargo, el arrastre mantenido no se emplea ni es conocido por la mayoría de los estudiantes.

La situación descrita en el párrafo anterior nos motivó a profundizar en el arrastre mantenido y explorar qué efecto podía tener en la resolución de problemas. Pusimos un especial interés en analizar su influencia en los procesos de visualización y conjeturación. Con este propósito, adelantamos una investigación exploratoria con cuatro estudiantes de la Licenciatura, a quienes propusimos problemas que suponíamos promovían el uso del arrastre mantenido, y seguimos de cerca el proceso exploratorio que realizaron. Así pudimos confirmar cómo era el funcionamiento de este arrastre e identificar su utilidad para favorecer la articulación entre los procesos de visualización y conjeturación.

Cuartas, C. y Camargo, L. (2022). El arrastre mantenido como herramienta para propiciar la visualización y la conjeturación en geometría. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 163-170. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

En este artículo, después de conceptualizar el arrastre mantenido, describimos sucintamente el estudio realizado y presentamos un ejemplo del trabajo hecho por uno de los estudiantes. Esperamos con ello motivar a estudiantes y profesores a emplear este tipo de arrastre, como un valioso recurso para la resolución de problemas.

ARRASTRE MANTENIDO

Baccaglini y Mariotti (2010) definen el arrastre mantenido así:

> consiste en tratar de arrastrar un punto base [de una representación] y mantener alguna propiedad interesante que se ha observado. (pp. 230)

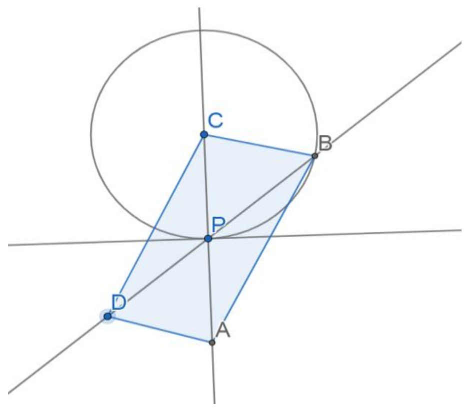
En ese sentido, con el arrastre mantenido se busca mantener invariante un atributo de una representación cuando se arrastra un punto que controla la construcción. Mientras se intenta mantener el atributo, se visualiza que el punto que se arrastra describe una trayectoria que el resolutor no percibe inicialmente, pero que poco a poco va descubriendo e identificando como un nuevo invariante: el invariante observado. La visualización de la relación de dependencia entre ambos invariantes se traduce en una conjetura del tipo: si "invariante observado", entonces "invariante inducido", hecho que es muy potente desde el punto de vista de la actividad matemática, pues lleva al descubrimiento de relaciones geométricas.

Para entender cómo opera el arrastre mantenido, presentamos a continuación un ejemplo propuesto por Baccaglini y Mariotti (2010), al que denominan "El cuadrilátero especial". Se parte de un cuadrilátero construido de la siguiente manera (Figura 1):

- P un punto.
- Recta r que pasa por P.
- Recta l perpendicular a r, que pasa por P.
- C un punto en l con $C \notin r$.
- A un punto simétrico de C con respecto a P.
- D un punto en el semiplano determinado por r que contiene A.
- $\overleftrightarrow{DP}$.

- Circunferencia con centro en C y radio CP.
- B segunda intersección de la recta $\overleftrightarrow{DP}$ y la circunferencia.
- Cuadrilátero $ABCD$ o $ADBC$.

Figura 1: cuadrilátero $ABCD$



Se pide a los estudiantes que elaboren conjeturas sobre los tipos de cuadrilátero que podría producir el movimiento del punto D (punto control). Los estudiantes deben arrastrar el punto D de forma que el cuadrilátero $ABCD$ o $ADBC$ sea un cuadrilátero especial. A medida que arrastran, deben descubrir una propiedad inducida como invariante y formular una conjetura.

Supongamos que unos estudiantes deciden arrastrar el punto D en el semiplano determinado por r que contiene A, tratando de mantener el cuadrilátero como paralelogramo, para lo cual establecen las medidas de los lados. Al activar la herramienta *Rastro* en el punto D, observan que el movimiento de D genera un paralelogramo si el punto describe una trayectoria circular (Figura 2).

Figura 2: ubicación de puntos

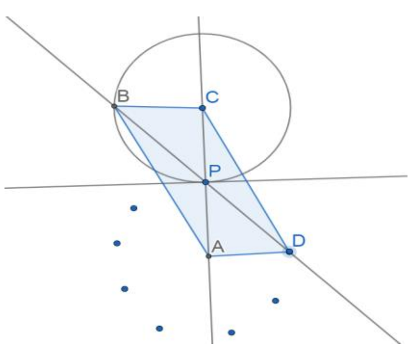
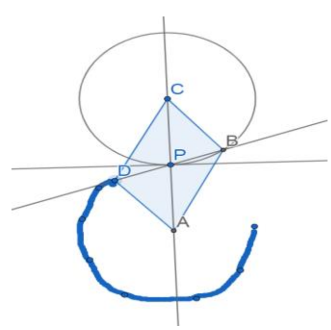


Figura 3: arrastre con la herramienta Rastro



Usando la herramienta *Rastro*, los estudiantes se dan cuenta de que para mantener el cuadrilátero $ABCD$ como paralelogramo (invariante inducido intencionalmente), el punto D genera una trayectoria circular con centro en A y radio PA. En busca de una explicación, los estudiantes pueden identificar que cuando $D \in \odot_{A,PA}$ ocurre que $PD = PB$ y que por eso las diagonales del cuadrilátero se bisecan, razón por la cual el cuadrilátero es un paralelogramo (Figura 3).

Así, se han identificado dos invariantes. El primero es el invariante inducido intencionalmente por el arrastre mantenido, que se refiere a que el cuadrilátero $ABCD$ sea un paralelogramo. El segundo es la trayectoria que sigue el punto D, generada por un arrastre de lugar ficticio; es decir, la $\odot_{A,PA}$, de tal manera que $PD = PB$. Este es el invariante observado.

Los estudiantes podrían proponer la siguiente conjetura: Si D pertenece a la circunferencia con centro en A y radio PA, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo. Con una construcción robusta pueden convencerse de la relación condicional entre el invariante observado durante el arrastre y el invariante inducido intencionalmente. El invariante observado durante el arrastre corresponde a la proposición usada como antecedente de la conjetura y el invariante inducido es un hecho geométrico que actúa como consecuente.

ESTUDIO EXPLORATORIO

Para analizar cómo funcionaba el arrastre mantenido en la resolución de problemas, realizamos un estudio exploratorio con cuatro estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas, de diferentes semestres. Ellos fueron seleccionados a conveniencia, por el vínculo de amistad que tenían con el primer autor del artículo. A cada uno le propusimos tres problemas, entre ellos el "Cuadrilátero especial". En Cuartas (2021) se encuentra una descripción de los otros problemas.

La interacción con los estudiantes se hizo a través de la plataforma Teams, lo que permitió grabar el proceso de resolución. Previo al trabajo, preparamos un libreto con preguntas que haríamos a los estudiantes, para incentivar que expresaran en voz alta qué estaban viendo y qué descubrían. Algunas de las preguntas previstas fueron: ¿Qué está observando en este momento? ¿Por qué no intenta arrastrar tratando de mantener un cuadrilátero que esté visualizando, a ver qué descubre? ¿Qué camino sigue el punto D?

A partir de las grabaciones de las sesiones, describimos el proceso de resolución de cada estudiante. Incluimos información sobre las acciones que realizó en

GeoGebra y sobre las ideas que explicitó oralmente, incluyendo citas textuales que reportan lo que observó, lo que descubrió, lo que conjeturó y las respuestas a las preguntas que le formuló el entrevistador.

Para adelantar el proceso analítico, tomamos la descripción y diligenciamos una rejilla analítica. En ella identificamos los siguientes elementos: los arrastres empleados, las configuraciones que visualizó el estudiante, los invariantes detectados, la verificación hecha, las relaciones descubiertas y la conjetura formulada.

EJEMPLO DE ANÁLISIS

Para ilustrar el análisis adelantado, presentamos el proceso desarrollado por el estudiante Jhon, quien cursa noveno semestre de Licenciatura. Él ya cursó todos los espacios académicos de geometría que ofrece el programa. Ha tenido la oportunidad de trabajar con GeoGebra y ha utilizado la herramienta arrastre para resolver los problemas de geometría que se proponen en los cursos, pero no ha oído hablar del arrastre mantenido.

El estudiante es expresivo y se le facilita comunicar sus pensamientos. Inicialmente, hace la construcción según las instrucciones del problema. Luego, empieza a arrastrar el punto D de manera libre y visualiza que el cuadrilátero es convexo. Mientras el estudiante arrastra libremente el punto D, le preguntamos: "¿Qué tipo de cuadrilátero está observando en este momento?". Jhon responde: "Parece ser un paralelogramo". En seguida le sugerimos: "Intente arrastrar el punto D tratando de mantener el cuadrilátero que está observando". El estudiante manifiesta que no es fácil arrastrar el punto D manteniendo el cuadrilátero como paralelogramo; es decir, provocando el invariante inducido. Después de varios intentos, alude a que el punto D describe una recta "especial". Pero al seguir arrastrando D se percata de la posibilidad de que D esté en una circunferencia y no en una recta.

Al observar que el participante no está seguro de la trayectoria que sigue el punto D, le preguntamos "¿Qué haría usted para que el punto D le muestre la trayectoria que sigue?". Como el estudiante se queda pensativo, le pedimos que active el *Rastro* al punto D. Jhon activa el rastro del punto D, arrastra dicho punto tratando de mantener el cuadrilátero $ABCD$ como paralelogramo y visualiza el rastro que deja D. Dice "Observo el paralelogramo y parece que el punto D sigue la trayectoria de una circunferencia o de una elipse". Acto seguido, propone la construcción de la $\odot_{A,AP}$ y arrastra el punto D sobre dicha circunferencia, con el fin de corroborar que D describe una circunferencia. Le preguntamos "¿Qué relación encuentra entre el punto arrastrado y la representación que visualiza?". Jhon dice "que para mantener el paralelogramo la trayectoria que sigue D es una $\odot_{A,AP}$". Le pedimos que formule una conjetura de la forma *si… entonces…*. Jhon piensa en voz alta mientas explora la representación con el ratón: "si es paralelogramo, todos sus lados son congruentes [sic], es decir que el segmento AP es congruente al segmento PC, porque P es punto medio; entonces tienen la misma medida… Pero, también observo que la recta DB y la recta CA se intersecan; esto nos debe servir para construir la conjetura". Regresa a la representación, detalla el rastro de la circunferencia y se detiene en el paralelogramo. "La conjetura sería referida a la circunferencia y referida al paralelogramo… ¡Ah sí! ya sé cuál sería la conjetura". Jhon empieza a construir la conjetura tomando como premisa el invariante inducido, pero se detiene a pensar que la circunferencia que sigue el punto D es la causante de que el cuadrilátero $ADBC$ se mantenga como un paralelogramo. Finalmente construye la conjetura, la cual quedó así: "Si $D \in \odot_{P,AP}$, entonces el cuadrilátero $ADCB$ es paralelogramo".

En la Tabla 1 presentamos la rejilla analítica construida a partir de la descripción.

Tabla 1: rejilla analítica que sintetiza el análisis del proceso de Jhon al resolver el problema "El cuadrilátero especial"

Estudiante: Jhon	Acciones en GeoGebra y verbalizaciones de Jhon	
Arrastres empleados	Libre	Arrastra el punto D de manera libre.
	De lugar ficticio	Arrastra el punto D. Este describe una trayectoria circular.
	Guiado	Arrastra el punto D al cual le ha activado el *Rastro.*
	Vinculado	Arrastra el punto D que ha vinculado previamente a la $\odot_{A,AP}$.
	Mantenido	Arrastra el punto D que está vinculado a la $\odot_{A,AP}$ (invariante observado) y mantiene el cuadrilátero con apariencia de paralelogramo (invariante inducido).

Configuraciones que visualiza	Objetos	Un paralelogramo (invariante inducida). La $\odot_{A,AP}$ (invariante observada).
	Relaciones	La relación de dependencia entre el movimiento del punto D y la configuración del cuadrilátero. El paralelismo entre $\overline{BC}$ y $\overleftrightarrow{PH}$.
Invariantes detectadas	Invariante inducido intencionalmente	El cuadrilátero $ABCD$ mantiene la apariencia de paralelogramo.
	Invariante observada durante el arrastre	$D \in \odot_{A,AP}$.
Verificación hecha	Construyó la circunferencia con centro en A y radio AP.	
Relaciones descubiertas	Cuando arrastra el punto D descubre este que describe la trayectoria circular cuando el cuadrilátero se mantiene como paralelogramo.	
Conjetura formulada	Si $D \in \odot_{A,AP}$ entonces el cuadrilátero $ADBC$ es paralelogramo.	

Como señalan Baccaglini-Frank y Mariotti (2010), el problema “El cuadrilátero especial” favorece el uso del arrastre mantenido. Sin embargo, es un problema que requiere experiencia en el trabajo con GeoGebra, pues la construcción es relativamente compleja. Jhon se fijó inicialmente en que el cuadrilátero era convexo. Fue necesario encaminar la atención hacia la regularidad que queríamos que observara, para que efectivamente pudiera establecer la relación entre el invariante observado y el invariante inducido.

CONCLUSIONES

Como resultado del estudio, proponemos el siguiente esquema (Cuadro 1) que ilustra las relaciones entre los invariantes que operan cuando se emplea el arrastre mantenido en la resolución de problemas. En este pretendemos destacar que el arrastre mantenido establece un puente entre los procesos de visualización y la producción de conjeturas. La visualización permite observar un invariante que no estaba inicialmente en el foco de la exploración (el invariante observado) y contribuye con ello a establecer la relación de dependencia entre los invariantes presentes. Esta relación se ratifica con una construcción robusta. De esta forma se promueve el descubrimiento de relaciones geométricas.

Cuadro 1: ilustración del papel que juega el arrastre mantenido en la articulación entre los procesos de visualización y conjeturación

	Invariante inducido	Invariante observado
Proceso de visualización	El cuadrilátero es paralelogramo	El punto D sigue una trayectoria circular
Verificación mediante construcción robusta	El paralelogramo	Circunferencia con centro en P y radio PA
Proceso de conjeturación	entonces el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo	Si D pertenece a la circunferencia con centro en A y radio PA,

REFERENCIAS

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri environments. *ZDM*, *34*(3), 66-72.

Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. *ZDM*, *51*(5), 779-791.

Baccaglini-Frank, A. y Antonini, S. (2016). From conjecture generation by maintaining dragging to proof. En C. Csíkos, A. Rausch y J. Szitányi (eds.), *Proceedings of the 40th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 43-50). Szeged, Hungary: PME.

Baccaglini-Frank, A. y Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225-253.

Cuartas, W. (2021). De la visualización a la conjeturación a través del arrastre mantenido. (Tesis de Licenciatura). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Mariotti, M. A. y Baccaglini-Frank, A. (2011). Making conjectures in dynamic geometry: The potential of a particular way of dragging. *New England Mathematics Journal*, *43*, 22-33.