LA LIEBRE Y EL HALCÓN: USO DE REPRESENTACIONES DINÁMICAS Y ESTÁTICAS PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS AVANZADOS[1]

Fredy Peña y Armando Solares
Centro de investigaciones y estudios avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México)
fredypmat@gmail.com, asolares@cinvestav.mx

En el marco de la validación de un modelo de enseñanza para los sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, estudiantes de primer año de preparatoria se enfrentaron a un problema de persecución, y lo resolvieron mediante una traducción al álgebra de información proveniente de una representación gráfica dinámica y de sus propias representaciones en papel y lápiz. Resaltamos el proceso de construcción de un mecanismo algebraico para la solución del problema y el rol que las representaciones gráficas tienen en ese proceso.

INTRODUCCIÓN

El proceso de solución de *sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas* requiere de los estudiantes una re-conceptualización de las nociones de *incógnita* e *igualdad* (Filloy, Rojano y Solares, 2010). Por ello es pertinente la búsqueda de contextos que permitan dotar de sentido a estos objetos algebraicos, particularmente, como parte de un proceso de modelización matemática, que incluye la traducción de información proveniente del fenómeno o de sus representaciones no matemáticas, a un Sistema Matemático de Signos (SMS) en el cual las relaciones y los datos se pueden manipular a fin de encontrar nueva información para el problema que se aborda.

El interés de esta propuesta es analizar el proceso mediante el cual los estudiantes usan representaciones gráficas para producir "significados y sentidos" (aspectos semánticos), que luego usan en un proceso de modelización matemática.

[1] Esta investigación se desarrolló en el marco de los proyectos "Construcción de significados en procesos de modelación matemática. Una aproximación basada en el uso de herramientas de simulación computacional desde una perspectiva semiótica" (Conacyt, Mexico. A1-S-33505) y *Exploring Mathematical Modeling Knowledge for Teaching Through Simulation and Coding* (SSHRC, Canada. Ref.: 430-2019-00382).

Peña, F. y Solares, A. (2022). La liebre y el halcón: uso de representaciones dinámicas y estáticas para la solución de problemas avanzados. En P. Perry (ed.), *Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 25, 171-178. Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Modelos teóricos locales

Para estudiar los procesos de adquisición y uso de ideas matemáticas en contexto, los modelos teóricos locales (Filloy, 1999; Filloy, Rojano y Puig, 2008) proponen enfocar el objeto de estudio desde cuatro modelos que se interrelacionan: el de enseñanza, el de procesos cognitivos, el de competencia formal y el de comunicación. Para efectos de este artículo, presentamos enseguida las descripciones correspondientes a solo tres de los modelos (enseñanza, procesos cognitivos y competencia formal) que son los que enmarcan los asuntos que retomaremos en el análisis de las producciones del estudiante.

Modelo de enseñanza

Consideramos que el diseño de un modelo de enseñanza está constituido por una serie de tareas de modelización matemática para ser resueltas por medio de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Algunas de estas tareas (en particular, aquella sobre la que versa este documento) proponían enfoques gráficos para la representación de los datos. Como parte del modelo de enseñanza que se propuso a los estudiantes, se diseñó el siguiente problema:

> *La liebre y el halcón:* La velocidad es fundamental para la supervivencia de las liebres. Una liebre común puede correr a unos 18 metros por segundo. Por su parte, el halcón peregrino ostenta el título del ave voladora más rápida del reino animal. Con una técnica de caza de caída en picada, esta ave rapaz es capaz de ver a sus presas hasta a 3 kilómetros de distancia y atacarlas a una velocidad de hasta 88 metros por segundo. Una liebre se percata de que un halcón peregrino viene a su ataque y emprende la huida hacia su madriguera justo cuando el halcón ya se encuentra a una distancia de 1000 metros. Si la liebre logra salvarse en el último momento, ¿podrías estimar la distancia a la que se encontraba la liebre de su madriguera?

Para este problema, se les dio a los estudiantes una representación dinámica (véase https://www.geogebra.org/m/GzSWGrq8), después de que ellos realizaron sus propios bosquejos.

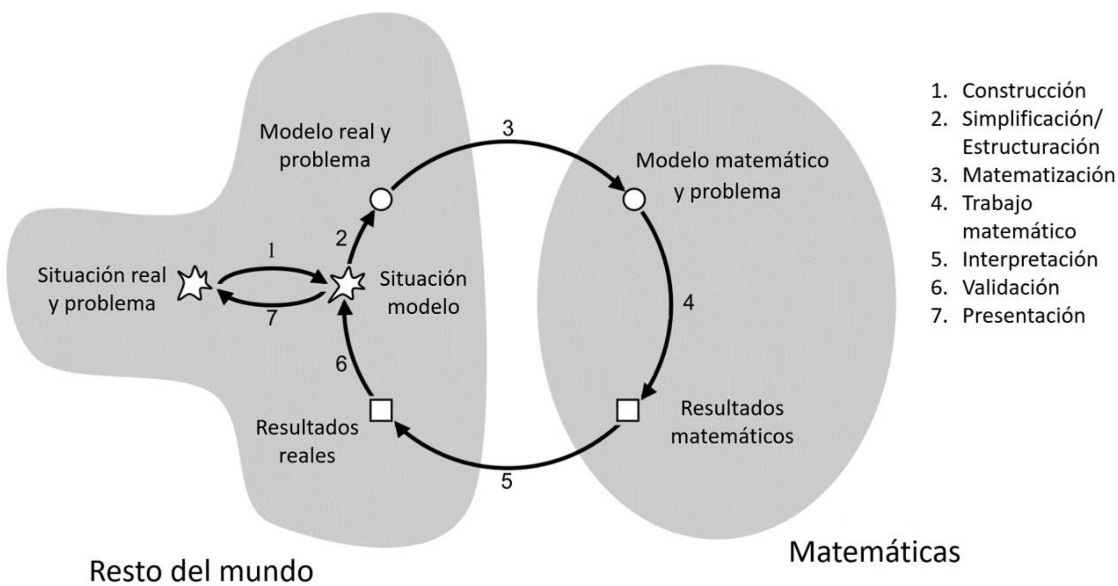
Modelo de procesos cognitivos

En este estudio nos interesa indagar sobre los procesos de construcción de significado de los objetos matemáticos que los estudiantes van usando o consolidando a medida que trabajan en la solución de tareas propuestas en el modelo de enseñanza. Recurrimos a los cuatro tipos de fuentes de significado propuestos por Filloy (1999): i) transformaciones dentro de un SMS sin referencia a otro SMS; ii) traducciones a través de SMS distintos; iii) traducciones entre un SMS y sistemas de signos no matemáticos; y iv) la consolidación, simplificación, generalización y rectificación de acciones, procedimientos y conceptos de los SMS intermedios creados durante el desarrollo de modelos de enseñanza.

El análisis que se presenta al cierre de este documento se centra en los ítems (ii) y (iii) que constituyen los procesos de lectura-transformación de información, en este caso proveniente de la redacción del problema (un sistema de signos no matemáticos) y SMS geométricos intermedios (e idiosincráticos) que los estudiantes usan al momento de representar la información gráficamente.

Modelización matemática

Figura 1: ciclo de modelización propuesto en Blum y Leiß (2007) (nuestra traducción)

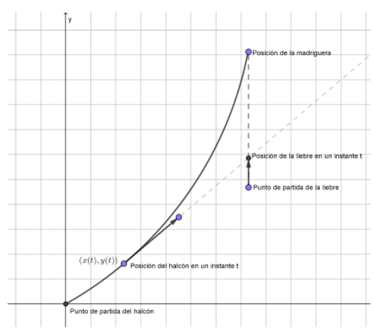
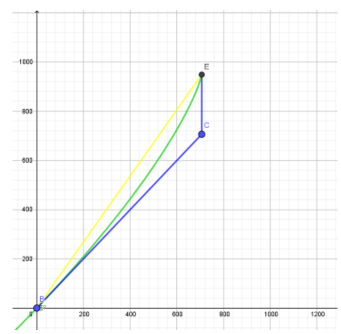


Respecto al modelo de procesos cognitivos, consideramos pertinente clarificar algunas ideas del proceso que se espera que los estudiantes sigan al enfrentarse a un problema de modelización matemática. Para Blum y Leiß (2007), la modelización matemática implica la totalidad del proceso de resolver problemas del mundo real por medio de las matemáticas. El esquema que proponen estos autores presenta siete pasos que constituyen el ciclo ideal de modelización (véase Figura 1). Para efectos de este documento, nos interesa hacer énfasis principalmente en las primeras cuatro etapas, a saber, entender el problema, representarlo, matematizarlo y obtener resultados matemáticos.

Modelo de competencia formal

El modelo de competencia formal es el conocimiento matemático formal y socialmente establecido que es motivo de estudio en la investigación. Para el problema planteado en la secuencia, este modelo exige hacer uso del SMS propio de la solución de ecuaciones diferenciales, puesto que la solución del problema se reduce al análisis de una curva de persecución. Sin embargo, existe una aproximación a la solución del problema que admite el uso de un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas que se constituye en un SMS de un nivel de formalidad menor con el cual los estudiantes sí pueden trabajar. La siguiente tabla muestra el planteamiento y solución del problema desde los dos SMS.

Tabla 1: aproximación al problema por distintos SMS

	SMS del cálculo	SMS del álgebra y la geometría
Representación gráfica		
Estrategia	Análisis de la curva por medio de ecuaciones diferenciales	Análisis del problema por medio de las trayectorias lineales
Supuestos	Velocidades constantes, trayectoria lineal de la liebre, disposición inicial a 45° sobre el eje x	Velocidades constantes, trayectoria lineal de la liebre y el halcón
Planteamiento matemático	$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{9}{44}\right)\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{707-x}$	$\left\{\begin{matrix} (1) & y = 18t \\ (2) & 1000 + y = 88t \end{matrix}\right\}$
Solución	249.48 metros	257.14 metros o (242.1 metros)[2]

[2] Esta solución se obtiene al analizar, por medio del teorema del coseno, la trayectoria del halcón en línea recta a la madriguera y ángulo inicial de 45° respecto del eje x.

El lector puede notar cómo las aproximaciones que otorga un análisis de las trayectorias lineales acotan la solución del problema, a su vez que cada una de ellas corresponde a una aproximación relativamente cercana a la respuesta que se obtiene al solucionar la ecuación diferencial.

METODOLOGÍA

Para el desarrollo de esta investigación se usó una metodología de tipo cualitativo que tiene un enfoque en el diseño, aplicación y reestructuración del modelo de enseñanza. Las fases del estudio obedecen a las propuestas por Filloy, Rojano y Puig (2008) para un experimento de diseño, lo cual incluye: i) selección de un modelo formal de competencia y de la población de estudio; ii) diseño de la secuencia; iii) pilotaje y reestructuración; iv) aplicación de un diagnóstico; v) selección de un subgrupo para entrevistas clínicas; vi) estudio de casos; y vii) análisis e interpretación de las entrevistas realizadas. Para este estudio se trabajó con un total de 8 estudiantes, de entre 15 y 18 años, del grupo 456 de primero de preparatoria de la UNAM, México.

RESULTADOS

Presentamos los resultados basándonos principalmente en las producciones de un estudiante al que denominamos E8, quien en la prueba diagnóstica (en la que se evaluaron competencias algebraicas, geométricas y de resolución de problemas) se acercó más a la media de los resultados del grupo en general.

Durante la sesión de trabajo en el problema de la liebre y el halcón, se pidió a los estudiantes que leyeran el problema y realizaran un bosquejo gráfico del mismo. En la información recogida durante este proceso puede interpretarse un trabajo en las primeras fases del ciclo de modelización, así como el establecimiento de un SMS útil para la solución de este:

E6: (Lee el problema) la liebre puede correr a 18 metros por segundo

E8: O sea, tenemos tiempo, distancia

E6: Por su parte el halcón peregrino […] una técnica de caza de caída en picada. Ay no digas que vamos a tener que calcular fricción y todo eso.

E8: ¿Te imaginas? No, no creo

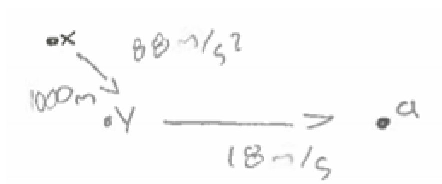
E6: (Continúa la lectura) Esta ave es capaz de ver sus presas hasta a ¡tres kilómetros! de distancia y atacar a una velocidad de hasta 88 metros por segundo cuadrado (comete error en la lectura de una nota al pie) O sea, es una aceleración (pausa) Aceleración, velocidad, distancia, fricción, ¿qué más a ver?

E8: Fricción, no

E6: Hay fricción, porque cae en picada (termina la lectura). A ver, con un dibujito lo entiendo mejor.

En este fragmento de diálogo entre E6 y E8 se hace evidente cómo, a medida que los estudiantes avanzan en la lectura del problema, van realizando procesos de lectura transformación para movilizar saberes previos como los conceptos de distancia, velocidad, fricción y aceleración, además de que resaltan datos que consideran necesarios (fase 1 del ciclo) para construir esquema que se observa en la Figura 2.

Figura 2: gráfico de E8 para el problema



La Figura 2 presenta la interpretación del estudiante sobre el instante inicial del problema, de allí que *x* e *y*, que representan el halcón y la liebre respectivamente, se encuentren separados y se indique una distancia de 1000 metros entre ellos. Las flechas que se usan indican los vectores de desplazamiento de ambos elementos. El punto correspondiente a la posición en la que se encontraría la madriguera y los datos para la solución del problema están marcados también sobre el dibujo.

La sesión de trabajo finalizó después de que los estudiantes realizaron sus representaciones gráficas en la hoja de trabajo, razón por la cual en la siguiente sesión el profesor pudo iniciar haciendo una exposición de las producciones de los estudiantes y enseñando la animación realizada en GeoGebra, la cual se asemejaba a la mayoría de los gráficos realizados por los estudiantes.

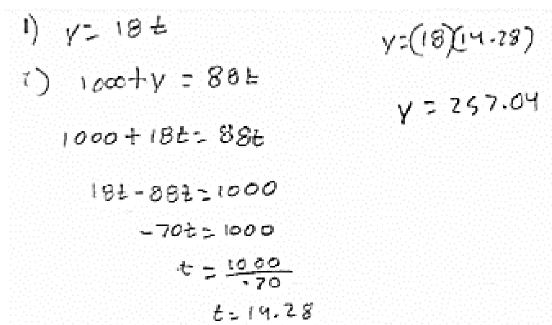
La construcción de un sistema de ecuaciones lineales como estrategia matemática para solucionar el problema fue dirigida por el profesor a medida que filtraba las intervenciones públicas de los estudiantes. El siguiente fragmento ilustra lo sucedido:

Profesor: y la distancia ¿qué sería?

E6:	velocidad por tiempo
Profesor:	O sea, ¿qué?
E6:	18t
Profesor:	Y ¿qué tendríamos? La distancia que recorrería el halcón ¿qué sería?
E6:	Sería y
E8:	$1000 + y$
Profesor:	Eso, entonces, esos $1000 + y$ ¿son?
E4:	88t

Una vez que se estableció el sistema de ecuaciones correspondiente al problema, E8 lo solucionó usando el método de sustitución (véase Figura 3).

Figura 3: solución del sistema de ecuaciones, hecha por E8



El trabajo matemático del estudiante consistió en el uso de una técnica de resolución de ecuaciones lineales que él ya conocía. Vale la pena analizar cómo este mecanismo de solución no solo es plausible por la forma en la que están escritas ambas ecuaciones, sino que, además, puede tener una interpretación directa en función del contexto del problema y su representación gráfica (la distancia en función del tiempo para el halcón es equivalente a la de la liebre con una "ventaja" de 1000 metros).

CONCLUSIONES

Los resultados del trabajo de los estudiantes en la solución del problema de la liebre y el halcón permiten rastrear, en paralelo, el proceso de modelización matemática, así como el de construcción y uso de un SMS hibrido entre la geometría y el álgebra para representar y solucionar la situación. De esta manera, es posible suponer que ambos procesos son complementarios ya que sin un SMS que fuere lo suficientemente concreto como para que surja del contexto del problema y suficientemente abstracto como para que permita un trabajo netamente matemático (el método de sustitución en el caso de E8), la solución del problema no sería posible y el sistema de ecuaciones lineales carecería de sentido si no existieran referentes concretos dados por el contexto del problema y su representación gráfica.

Los procesos de lectura-transformación que realizan los estudiantes cuando comienzan a solucionar el problema se corresponden de manera directa con las fases iniciales del ciclo de modelización; así que se puede suponer que todo texto (escrito y gráfico) al que se haga alusión a medida que se lee el problema posibilita la interpretación del problema, la selección de datos relevantes, faltantes y el reconocimiento de las relaciones entre ellos.

La presencia de recursos gráficos como primera estrategia para estructurar el problema tiene una potencialidad enorme para procesos de modelización matemática. Consideramos que, aun cuando las propuestas de enseñanza se concentren en temas que se alejan del conocimiento geométrico, siempre vale la pena considerar las representaciones gráficas o geométricas como herramientas con las que los SMS se nutren en significados.

REFERENCIAS

Blum, W. y Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics - ICTMA 12* (pp. 222-231). Chichester, UK: Elsevier.

Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach.* Nueva York, EUA: Springer Science & Business Media.

Filloy, E., Rojano, T. y Solares, A. (2010). Problems dealing with unknown quantities and two different levels of representing unknowns. *Journal of Research in Mathematics Education, 41*(1), 52-80.