

# UNA PANORÁMICA DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE PENSAMIENTO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO

## An overview of research on numerical thinking and algebraic thinking

María C. Cañadas<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Universidad de Granada

### Resumen

*En este seminario presentamos una panorámica de las investigaciones sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico. Nuestros objetivos son: (a) mostrar una visión general de la investigación en pensamiento numérico y pensamiento algebraico, (b) visibilizar ejemplos de estudios concretos y (c) identificar líneas de investigación en las cuales avanzar en el futuro. Tras mostrar algunas ideas generales sobre ambos constructos, introducimos las principales líneas temáticas relacionadas de investigadores españoles. Finalmente introducimos las tres ponencias que constituyen el seminario, que estarán a cargo de tres expertas investigadoras. Las dos primeras ponentes se centran en el pensamiento numérico. Natividad Adamuz aborda el pensamiento numérico en educación primaria y Alicia Bruno el pensamiento numérico en educación secundaria. La tercera, Bárbara Brizuela, pone el foco en el pensamiento algebraico en educación primaria.*

**Palabras clave:** *pensamiento algebraico, pensamiento numérico, educación primaria, educación secundaria.*

### Abstract

*In this seminar we present an overview of research on numerical thinking and algebraic thinking. Our objectives are: (a) to show an overview of research in numerical thinking and algebraic thinking, (b) to show examples of specific studies, and (c) to identify future lines of research. After presenting some general ideas about both constructs, we introduce the main related thematic lines among Spanish researchers. Finally, we introduce the three papers that constitute the seminar, led by three expert researchers. The first two speakers focus on number thinking. Natividad Adamuz addresses number thinking in primary education and Alicia Bruno number thinking in secondary education. The third, Bárbara Brizuela, focuses on algebraic thinking in elementary education.*

**Keywords:** *algebraic thinking, elementary education, numerical thinking, secondary education.*

En este seminario presentamos una panorámica de las investigaciones que se vienen desarrollando en las últimas décadas en el grupo Pensamiento Numérico y Pensamiento Algebraico (PNA) de la SEIEM. Existen diferentes aproximaciones válidas e interesantes para organizar un seminario sobre pensamiento numérico y pensamiento algebraico en el contexto de la SEIEM. Aunque hay aspectos compartidos con otros grupos, nuestro objetivo ha sido centrarnos en elementos específicos que forman parte de la agenda de investigación de PNA. Abordamos temáticas en las que se está trabajando en la actualidad en este grupo y que están dando lugar a publicaciones en revistas de reconocido prestigio.

Nos planteamos tres objetivos con este seminario: (a) mostrar una visión general de la investigación en las temáticas de nuestro grupo, (b) visibilizar ejemplos de estudios concretos y (c) evidenciar líneas de investigación en las que avanzar a medio plazo.

Este documento tiene tres partes diferenciadas. En primer lugar, presentamos algunas ideas generales sobre los marcos conceptuales en los que nos ubicamos para abordar el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. En segundo lugar, introducimos las principales líneas temáticas relacionadas con ambos tipos de pensamiento en las que han trabajado investigadores españoles. Finalmente, introducimos las tres ponencias que constituyen el seminario, que estarán a cargo de tres expertas investigadoras: las doctoras Natividad Adamuz-Povedano (Universidad de Córdoba, España), Alicia Bruno (Universidad de la Laguna, España) y Bárbara Brizuela (Tufts University, Estados Unidos).

## **PENSAMIENTO NUMÉRICO**

El pensamiento numérico trata de aquello que la mente puede hacer con los números: pensar sobre ellos, razonar a través de ellos, aplicarlos para resolver problemas, entre otros. Desde la investigación en Didáctica de la Matemática, se considera que el pensamiento numérico está presente en todas aquellas actuaciones que realizan los seres humanos y que tienen relación con los números. Si bien el concepto de número es un concepto abstracto, los números naturales nos resultan bastante familiares. De entre todos los conjuntos numéricos, este es con el que estamos más familiarizados y sobre el que mayor número de investigaciones existen (Castro, 2008).

El pensamiento numérico está estrechamente relacionado con otros constructos que permiten su desarrollo y lo potencian, entre ellos están el pensamiento relacional, el pensamiento cuantitativo flexible y el sentido numérico.

Las dos ponencias que abordan el pensamiento numérico en este seminario se centran en el sentido numérico, del que se comenzó a hablar a finales de los años 80, entendiéndolo como una forma no algorítmica de pensar sobre los números, que conlleva una profunda comprensión de su naturaleza, así como de las operaciones que se pueden realizar con ellos (Arcavi, 1994; Resnick y Ford, 1991; Sowder, 1992).

No hay una definición consensuada de sentido numérico, pero las ideas de que se “desarrolla gradualmente como resultado de explorar los números, visualizarlos en variedad de contextos y relacionarlos de manera que no se limiten por los algoritmos tradicionales” (Howden, 1989, p. 11) y que “implica la comprensión de los números de un modo flexible para tomar decisiones matemáticas y desarrollar estrategias útiles para manipular números y operaciones” (McIntosh et al., 1992) son comúnmente aceptadas (Almeida et al., 2014).

Históricamente, los aspectos numéricos han estado contemplados en el currículo español. En la actualidad siguen incluyéndose bajo la terminología de “sentido numérico” en la educación obligatoria. Una de las ponentes realiza un estudio bibliométrico sobre el sentido numérico en educación primaria (Adamuz, 2023).

El sentido numérico no solo tiene cabida en la educación primaria. Para mostrar evidencia de esto, la segunda ponencia (Bruno, 2023) aborda el sentido numérico en educación secundaria.

## **PENSAMIENTO ALGEBRAICO**

Existen diferentes definiciones sobre pensamiento algebraico, algunas de ellas con diferencias sutiles que hacen que no haya un consenso a nivel internacional (Cañadas et al., 2012). Sí existe acuerdo en que el pensamiento algebraico es un proceso cognitivo que proporciona herramientas a los estudiantes para explorar, establecer y construir relaciones matemáticas generales, y que puede emerger en ausencia de la notación algebraica (Carragher y Schliemann, 2007).

Desde nuestra perspectiva teórica, el pensamiento algebraico puede entenderse a través de cuatro prácticas esenciales: (a) generalizar; (b) representar; (c) justificar y (d) razonar con estructuras y relaciones matemáticas (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). Además, estas cuatro prácticas deben estar presentes en la actividad algebraica, independientemente del enfoque del álgebra escolar que

se considere. Existen varios enfoques que reconocen la multidimensionalidad del álgebra escolar: patrones, aritmética generalizada, funciones, igualdades, desigualdades, ecuaciones e inecuaciones suelen estar presentes en la bibliografía consultada (e.g., Blanton et al., 2011; Drijvers et al., 2011; Kieran, 2004, 2022; Mason et al., 1985; Usiskin, 1999). La tercera de las ponentes se centrará en dos de las prácticas mencionadas (generalizar y representar) y en el enfoque focalizado en las funciones (Brizuela, 2023).

En diferentes foros, en los inicios de la investigación en esta temática en España hace ahora diez años, encontramos cierta reticencia a hablar de “álgebra” en los primeros niveles educativos, siendo contenidos que se solían asociar más a educación secundaria y niveles superiores. La justificación era principalmente curricular, ya que el álgebra ha aparecido históricamente en educación secundaria y no antes (Cañadas, 2022). En cambio, el sentido algebraico forma parte del currículo de educación primaria en la actualidad (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2022b). De ahí que hayamos seleccionado este nivel educativo para mostrar algunos ejemplos en la tercera de las ponencias.

Existen conexiones importantes entre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. Esta razón fue la que hizo que se fundara un grupo de investigación denominado “Pensamiento Numérico y Algebraico” en la SEIEM. Tradicionalmente ha sido uno de los grupos más numerosos de la SEIEM (<https://www.seiem.es/org/prospectiva.shtml>) y sus miembros cuentan con publicaciones de reconocido prestigio a nivel nacional e internacional. Existen diferentes núcleos de investigadores en universidades en España que han venido trabajando en estas temáticas. Menciono a continuación algunos de los más destacados a través de sus publicaciones.

## **LÍNEAS TEMÁTICAS DE INVESTIGADORES ESPAÑOLES EN PENSAMIENTO NUMÉRICO Y PENSAMIENTO ALGEBRAICO**

El actual currículo español, que estructura los saberes básicos en seis sentidos (socioemocional, numérico, de la medida, espacial, algebraico y pensamiento computacional y sentido estocástico) recoge un nuevo planteamiento, a nivel curricular, de las matemáticas. El sentido numérico plasma algunas ideas que se vienen trabajando en investigación desde hace décadas en el contexto de la SEIEM. El sentido algebraico es la primera vez que se recoge de forma explícita en un documento curricular de educación primaria en España. En ambos casos estamos esperanzados en que las investigaciones que se desarrollan desde hace años en nuestra disciplina (tanto a nivel nacional como internacional) puedan tener repercusión a nivel curricular en España. Destaco algunos de estos estudios a continuación.

En Andalucía hay un grupo de investigación desde 1988, del Plan Andaluz de Investigación llamado “Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico”, dirigido durante décadas por Luis Rico, de la Universidad de Granada. En él se han tratado temas de esta agenda de investigación (<https://fqm193.ugr.es/>). Sus investigadores han publicado trabajos desde diferentes enfoques (e.g., González-Marí et al., 2009). Enrique Castro ha liderado una línea sobre cálculo aritmético y estimación (Segovia y Castro, 2009) y problemas aritméticos (Castro y Frías, 2013). Sobre problemas aritméticos también encontramos publicaciones indexadas en las universidades de Extremadura (Gil et al., 2006) y Valencia (Gómez y Puig, 2014). Los aspectos numéricos no se centran únicamente en el conjunto de los naturales. En la Universidad de Alicante, por ejemplo, se han abordado los números racionales en diferentes estudios (e.g., González-Forte et al., 2022).

A partir de Encarnación Castro (1995) surge otra línea de investigación centrada en patrones y generalización que se desarrolla a través de varios proyectos de investigación hasta 2013 (Cañadas et al., 2009; Molina et al., 2008). Desde 2014, destacamos tres proyectos I+D con financiación del Ministerio competente, sobre pensamiento algebraico con niños de 3 a 12 años (<https://pensamientoalgebraico.es/es>). Estos proyectos se centran en diferentes aproximaciones al pensamiento algebraico (Ayala-Altamirano y Molina, 2020; Pinto et al., 2021; Ramírez et al., 2022;

Torres et al., 2021). De forma paralela, investigadores de estos proyectos han abordado aspectos algebraicos en educación secundaria, en concreto: la invención de problemas en álgebra (Cañadas et al., 2018; Fernández-Millán y Molina, 2016), y los errores y dificultades de los estudiantes (Castro et al., 2022; Molina et al., 2017). Cabe mencionar a De Castro (2018) y Alsina (2016), con una trayectoria reconocida a través de sus trabajos con niños de 3 a 6 años sobre el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. Además, en la Universidad de La Laguna se han realizado investigaciones relevantes sobre errores y dificultades de los estudiantes en álgebra (Socas, 2007) y sentido numérico (Almeida et al., 2014).

En la Universidad de Valencia ha habido una tradición de investigación sobre estudios históricos, análisis de libros de texto, y resolución de problemas, como por ejemplo Puig (2018) o los diferentes libros y capítulos de libros de Gómez (e.g., Gómez, 2013).

Como parte de la agenda española de investigación, algunos grupos se han centrado en los procesos de aprendizaje de niños con necesidades educativas especiales, como el síndrome de Down o el autismo (TEA) y el aprendizaje de la aritmética (Bruno y Noda, 2019; Polo-Blanco et al., 2021), o los alumnos con talento matemático y pensamiento algebraico (Gutiérrez et al., 2018).

Los trabajos citados en las líneas anteriores de diferentes universidades españolas surgen de un esfuerzo por sintetizar muchos años de trabajo en temáticas relacionadas con el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico desarrolladas por diferentes investigadores que han liderado líneas de trabajo a nivel nacional, aunque son muchos más los autores y publicaciones que ameritan su reconocimiento.

### **TRES PONENCIAS EN ESTE SEMINARIO**

Este seminario está constituido por tres ponencias que abordan tres intereses de investigación. Las dos primeras se centran en el sentido numérico. La primera presta atención a la educación primaria y la segunda a la educación secundaria. La tercera pone el foco en el pensamiento algebraico en educación primaria. Presentamos un breve resumen de cada una a continuación.

Natividad Adamuz, en su trabajo titulado “Treinta años de investigaciones sobre desarrollo de sentido numérico en educación primaria” (Adamuz-Povedano, 2023) realiza un estudio bibliométrico de las investigaciones en desarrollo del sentido numérico en la etapa de educación primaria a través de la revisión de la producción científica publicada en SCOPUS. La autora describe las corrientes temáticas de investigación en sentido numérico, con el fin de orientar futuras investigaciones.

Alicia Bruno, a través de la contribución titulada “Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula de secundaria” (Bruno, 2023) aborda unas temáticas particulares sobre sentido numérico que no se han abordado hasta la fecha y presenta dos investigaciones concretas sobre sentido numérico en educación secundaria. La autora destaca la importancia de desarrollar un sentido numérico creativo y flexible en este nivel educativo y presenta algunas líneas potenciales de investigación para el futuro.

Bárbara Brizuela presenta un trabajo titulado “Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria” (Brizuela, 2023). Con base en años de investigaciones en Estados Unidos y desde el enfoque funcional del *early algebra*, ejemplifica cómo dos de las cuatro prácticas algebraicas (representación y generalización) pueden unificar la educación matemática escolar. La autora enfatiza la relevancia e importancia de enfocarnos en el desarrollo de las prácticas algebraicas en niños en los primeros cursos de educación primaria.

### **Agradecimiento**

Este trabajo se ha realizado en el Proyecto PID2020-113601GB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033.

## Referencias

- Adamuz-Povedano, N. (2023). Treinta años de investigaciones sobre desarrollo de sentido numérico en educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 11-25). SEIEM.
- Almeida, R., Bruno, A. y Perdomo, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(2), 9-34. <https://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.997>
- Alsina, Á. (2016). El currículo del número en educación infantil. Un análisis desde una perspectiva internacional. *PNA*, 10(3), 135-160.
- Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 1(3), 24-35.
- Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2020). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(7), 1271-1291. <https://dx.doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5>
- Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.
- Brizuela, B. (2023). Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI*. (pp. 43-57). SEIEM.
- Bruno, A. y Almeida, R. (2023). Investigaciones sobre el desarrollo del sentido numérico en el aula de secundaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 27-41). SEIEM.
- Bruno, A. y Noda, A. (2019) The concept of tens and hundreds in students with down syndrome. *International Journal of Disability, Development and Education*, 66(2), 171-185. <https://dx.doi.org/10.1080/1034912X.2018.1530343>
- Cañadas, M. C. (2022). *Proyecto investigador*. Documento no publicado.
- Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2009). Using a model to describe students' inductive reasoning in problem solving. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 261-278.
- Cañadas, M. C., Dooley, T., Hodgen, J. y Oldenburg, R. (2012). CERME7 Working Group 3: Algebraic thinking. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 189-190. <http://dx.doi.org/10.1080/14794802.2012.694284>
- Cañadas, M. C., Molina, M. y Del Río, A. (2018). Meanings given to algebraic symbolism in problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 98, 19-37. <https://dx.doi.org/10.1007/s10649-017-9797-9>
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Comares.
- Castro, E. (2008). Pensamiento numérico y Educación Matemática. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds.), *XIV Jornadas de investigación en el aula de matemáticas* (pp. 23-32). Departamento de Didáctica de la Matemática y Thales.
- Castro, E., Cañadas, M. C., Molina, M. y Rodríguez-Domingo, S. (2022). Difficulties in semantically congruent translation of verbally and symbolically represented algebraic statements. *Educational Studies in Mathematics*, 109, 593-609. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10088-3>
- Castro, E. y Frías, A. (2013). Two-step arithmetic word problems. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1,2), 37-64. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1272>
- De Castro, C. (2018). El papel de las imágenes en el proyecto “¡A contar!” para el aprendizaje de las matemáticas en la educación infantil. *Unión*, 53, 138-157.
- Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011a). Algebraic education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Sense Publishers.

- Fernández-Millán E. y Molina, M. (2016). Indagación en el conocimiento conceptual del simbolismo algebraico de estudiantes de secundaria mediante la invención de problemas. *Enseñanza de las Ciencias*, 34(1), 53-71. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1455>
- Gil, N., Blanco, L. y Guerrero, E. (2006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 340, 551-569.
- Gómez, B. y Puig, L. (2014). *Resolver problemas. Estudios en memoria de Fernando Cerdán*. Universidad de Valencia.
- González-Forte, J. M., Fernández, C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2022) Profiles in understanding operations with rational numbers, *Mathematical Thinking and Learning*, 24(3), 230-247. <https://doi.org/10.1080/10986065.2021.1882287>
- González-Marí, J. L., Rico, L. y Gallardo, J. (2009). Diversidad estructural y semiótica en el proceso didáctico de ampliación de los naturales a los enteros: un estudio sobre comprensión en el campo de la relatividad aditiva. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 309-340.
- Gutiérrez, A., Benedicto, C., Jaime, A. y Arbona, E. (2018). The cognitive demand of a gifted student's answers to geometric pattern problems. En F. M. Singer (Ed.), *Mathematical creativity and mathematical giftedness* (pp. 169-198). Springer.
- Howden, H. (1989). Teaching number sense. *Arithmetic Teacher*, 26(6), 6-11.
- Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 21-33). Kluwer Academic Publishers.
- Kieran, C. (2022). The multi-dimensionality of early algebraic thinking: Background, overarching dimensions, and new directions. *ZDM-Mathematics Education*, 54(6), 1131-1150. <http://dx.doi.org/10.1007/s11858-022-01435-6>
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1985). *Routes to roots of algebra*. Open University Press.
- McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the learning of mathematics*, 12(3), 2-8.
- Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2008). Third graders' strategies and use of relational thinking when solving number sentences. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 3, pp. 399-406). Cinvestav-UMSNH.
- Molina, M., Rodríguez-Domingo, S., Cañadas, M. C. y Castro, E. (2017). Secondary school students' errors in the translation of algebraic statements. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(6), 1137-1156. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9739-5>
- Pinto, E., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Functional relationships evidenced and representations used by third graders within a functional approach to early algebra. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 1183-1202. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10183-0>
- Polo-Blanco, I., González, M. J., Bruno, A. y González, M. J. (2021). Teaching students with mild intellectual disability to solve word problems using schema-based instruction. *Learning Disability Quarterly*, Online first. <https://doi.org/10.1177/07319487211061421>
- Puig, L. (2018). Dos errores famosos en la Arithmetica Algebratica de Marco Aurel reconsiderados. En D. Ruiz-Berdún (Ed.), *Ciencia y técnica en la universidad: trabajos de historia de las ciencias y de las técnicas* (Vol II, pp. 215-228). Universidad de Alcalá-Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas.
- Ramírez, R., Brizuela, B. y Blanton, M. (2022). Kindergarten and first-grade students' understandings and representations of arithmetic properties. *Early Childhood Education Journal*, 50, 357. <https://doi.org/10.1007/s10643-020-01123-8>
- Resnick, L. y Ford, W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidós.

- Segovia, I. y Castro, E. (2009). Computational and measurement estimation: curriculum foundations and research carried out at the University of Granada, Mathematics Didactics Department. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17, 7, 499-536.
- Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). SEIEM.
- Sowder, J. (1992). Making sense of numbers in school mathematics. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 1-51). Routledge.
- Torres, M. D., Moreno, A. y Cañadas, M. C. (2021). Generalization process by second grade students. *Mathematics*, 9, 1109. <https://doi.org/10.3390/math9101109>
- Usiskin, Z. (1999). Conceptions of school algebra and uses of variables. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's school-based journals and other publications* (pp. 7-13). NCTM.