

Construção dos Números Relativos e de suas Operações

Vera Kern Hoffmann

Resumo

O artigo aborda a metodologia para a construção de números relativos e de suas operações. A autora descreve jogos e outras atividades que utiliza para realizar esta construção. A proposta baseia-se em atividades simples e no uso de materiais de baixo custo. Enfatiza a diferença entre operação e o número na operação adição e subtração. Utiliza-se da operação adição para a construção do conceito da operação de multiplicação sem se fixar na regra de sinais.

Números inteiros relativos

A introdução dos números relativos, em nossa época, parece ser um fato simples e corriqueiro. Normalmente, nós, professores de Matemática, não nos damos conta das dificuldades que estão subjacentes à compreensão dos números relativos e não explicamos aos nossos alunos o porquê de negativo vezes negativo ser igual a positivo. Será que sabemos explicar o motivo? Ou simplesmente falamos aos alunos que é assim e pronto? Necessitamos, portanto, de um modelo matemático que possa ser utilizado tanto na adição como na multiplicação de números relativos.

A introdução conceitual dos números relativos foi surpreendentemente lenta. Durante mais de 1500 anos, de Diofantes (fim do século III d.C.) aos nossos dias, os matemáticos traba-

lharam com os números, tendo deles uma compreensão parcial com algumas lacunas. Ao longo da História, encontramos exemplos da utilização dos números relativos, mas sempre com a necessidade de se "livrar" dos números negativos.

René Descartes (1596-1650), com a utilização do sistema de coordenadas cartesianas, considerava separadamente as semi-retas a partir do zero, sabendo que a negativa dirigia-se em direção oposta à semi-reta positiva. Após o século XVII, os números negativos aparecem naturalmente nos trabalhos científicos. Eles são aceitos em razão de uma espécie de convenção: a eficácia dos cálculos é suficiente para assegurar a sua legitimidade.

A dificuldade que os matemáticos sentiram é a mesma que nossos alunos enfrentam ao estudarmos os números relativos e suas operações. Além disso, a passagem do estágio das operações concretas para as abstratas, com todas as implicações que elas trazem, acentua a necessidade de estudo e de um aprofundamento didático em números relativos. Precisamos de um modelo que seja familiar aos alunos. Um modelo com que se possa explicar simultaneamente a adição e a multiplicação dos números relativos, bem como as operações inversas. O modelo matemático precisa permitir que os alunos façam transferências de aprendizagem e que não sejam condicionados a exemplos que tolham sua autonomia. Apresento uma série de atividades que visam auxiliar nossos alunos a

superar as dificuldades que encontram ao estudarem os números relativos. Todas as atividades foram por mim aplicadas em sala de aula, em minicursos e em encontros de professores de Matemática desde 1988.

Atividade 1:
Jogo do Vermelho-Azul

Material: Confeccionar sete cartões vermelhos e sete cartões azuis, ambos com a escrita de um numeral natural de 0 a 6; uma folha quadriculada (“casas”) como o modelo abaixo ampliada para pelo menos cinco jogadas por aluno e fichas ou outro material que possa servir como arcador.

Procedimento: Formar duplas para realizar o jogo. Cada dupla recebe uma folha quadriculada e deve preencher todas as jogadas.

6v	5v	4v	3v	2v	1v	0	1a	2a	3a	4a	5a	6a	Par orde nado
				Paulo									(4,6)
								Helena					(4,1)

O aluno que vai jogar deve colocar seu marcador sobre o ponto zero de uma linha e tirar um cartão azul e outro vermelho do monte. Se, como no exemplo, ele tirar o cartão 4 azul, então deve deslocar seu marcador quatro “casas” para a direita a partir do ponto zero; em seguida, como ele tirou o cartão 6 vermelho, deve deslocar o marcador, saindo da “casa” 4 em direção à esquerda, seis “casas”. Seu marcador deve ficar na “casa” 2 vermelha. Ele coloca as iniciais de seu nome no local onde chegou o marcador e anota, no final da tabela, o par ordenado que usou para chegar na “casa” 2 vermelha, como no exemplo. Recolocam-se as fichas

no jogo, e o outro jogador faz sua jogada, sempre iniciando do zero. Como no exemplo acima, a aluna Helena tirou o cartão 4 azul, ela desloca o seu marcador até a “casa” 4 azul e, como tirou o cartão 1 vermelho, ela desloca o marcador uma “casa” para a direção do vermelho (esquerda), ficando na “casa” 3 azul. Vencerá quem estiver mais à direita nas duas jogadas. No exemplo, Helena será a vencedora da jogada. Deve-se preencher toda a folha. Após a realização do jogo, solicita-se aos alunos que escrevam as observações que fizeram a partir do jogo. A importância desta atividade está no fato de os alunos anotarem as idéias que tiveram ao realizar o jogo.

Atividade complementar ao jogo: Solicitar que escrevam os pares ordenados que poderiam ser obtidos para chegar a determinadas “casas”.

Atividade 2:
Jogo dos Triângulos e dos Quadrados

Material: 50 quadrados (4x4 cm); 50 triângulos equiláteros (4cm de base); dado e quatro marcadores e folha quadriculada semelhante à do jogo anterior.

Procedimento: Os alunos jogam em grupos de quatro. Recebem figuras recortadas nas formas triangulares e quadradas e um dado. Além disso, uma folha semelhante à do jogo anterior.

6▲	5▲	4▲	3▲	2▲	1▲	0	1■	2■	3■	4■	5■	6■	Par orde nado
			Helena										(3,6)
								Paulo					(5,2)

Cada aluno, na sua vez, joga o dado e recebe o número de quadrados que foi indicado

pelo dado. Procede a nova jogada e recebe o número de triângulos que o dado indicou. Estabelece-se a regra de que um quadrado e um triângulo se anulam. Anota-se o número de figuras que restaram da jogada, bem como o par ordenado formado pelo número de quadrados e triângulos sorteados (observar bem a ordem do par ordenado – quadrados, triângulos). Vence a jogada o jogador que tiver mais quadrados.

Analisemos as jogadas do quadro: Helena obteve nesta jogada, três quadrados e seis triângulos, ficando com saldo de três triângulos ou, podemos também dizer, ela tem três quadrados a menos. Paulo obteve, na sua jogada, cinco quadrados e dois triângulos, sendo o seu saldo de três quadrados, ou por outra, obteve três quadrados a mais.

Neste jogo, devemos cuidar para falar somente do número de quadrados a mais ou a menos do que triângulos que temos na jogada.

Atividades complementares: Analisar todas as possibilidades de preencher o quadro. Ampliar a estratégia, imaginando o que aconteceria se o dado apontasse outros números. Anotar a relação encontrada entre os dois jogos efetuados. Analisar as diferentes respostas encontradas.

Atividade 3:
Chegando ao Conjunto dos Inteiros Relativos

Material individual de cada aluno: fichas de papel (3x3 cm); 13 envelopes confeccionados pelo aluno.

Procedimento: Solicitar que os alunos escrevam em cada ficha um par ordenado do último jogo. Pedir que organizem as fichas sobre a mesa de tal maneira que as fichas que representam a mesma “casa” (quantidade) fiquem juntas. Pedir igualmente que coloquem, em um mesmo envelope, todas as fichas que representam a mesma quantidade e que dêem “nome” ao envelope, indicando, por um lado, a quantidade que ele está representando em relação aos quadrados e, por outro, se há quadrados a mais ou a menos do que zero.

EXEMPLIFICANDO:

O envelope 1■ a mais pode conter as fichas (1,0); (2,1); (3,2); (4,3); (5,4); (6,5) = +1

O envelope 2■ a menos pode conter as fichas (0,2); (1,3); (2,4); (3,5); (4,6) = -2

O envelope 0 pode conter as fichas (0,0); (1,1); (2, 2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6) = 0

Estabelecer o conjunto de todos os números que houver nos envelopes. Reconhecer que seria possível ampliar o número de envelopes e, por conseqüência, o conjunto de envelopes que até o momento é finito, poderia ser infinito. Nomear o novo conjunto reconhecido como conjunto Z: conjunto dos números inteiros relativos. Estabelecer com os alunos os subconjuntos possíveis. A notação de módulo e a comparação entre números relativos pode ser trabalhada neste momento.

Atividade 4:
Construindo a Adição com os Quadrados e Triângulos

Material: Um dado normal; um dado com os sinais de “+” e de “-”; os quadrados e triângulos da atividade 3 e uma ficha a ser copiada no caderno.

Procedimento: Estabelecer que as figuras quadradas representarão as quantidades positivas, e os triângulos, as quantidade negativas. Cada aluno joga, na sua vez, os dois dados e pega as peças correspondentes ao resultado e preenche a tabela. Cada aluno partirá do saldo zero. Ao final, vencerá quem ficar com o maior saldo.

Nº da jogada	Saldo anterior	Pontos obtidos	Representação	Saldo
1	0	+3	■ ■ ■	+3
2	+3	-5	■ ■ ■ ▲ ▲ ▲ ▲ ▲	-2
3	-2	-3	▲ ▲ ▲ ▲ ▲	-5
4	-5	4	▲ ▲ ▲ ▲ ▲ ■ ■ ■ ■	-1
5	-1	+2	▲ ■ ■	+1

Após concluir a atividade, pedir que escrevam a frase matemática obtida no seu jogo, observando a coluna dos pontos obtidos:

$$0 + (+3) + (-5) + (-3) + (+4) + (+2) = +3 - 5 - 3 + 4 + 2 = +9 - 8 = +1$$

Este jogo deve ser repetido várias vezes porque permite que os alunos cheguem à conclusão de como podem somar os números relativos.

VARIAÇÃO DO JOGO: Cada jogador joga o dado cinco vezes consecutivas e anota, na ficha em seu caderno, os pontos obtidos por ele e pelos seus colegas. Vencerá o aluno que tiver o maior saldo.

Nome	Pontos	Resultado
Paulo	+3+5-3-2+2	-5
Helena	-2-3+5+6-1	+5
Rosane	-3+2-1+2-3	-3
Cláudia	+6-5-4+2+1	0

O aluno pode utilizar o material dos quadrados e triângulos para solucionar as questões. O professor deve verificar as diferentes maneiras que os alunos utilizam para encontrar os resultados e comentar a facilidade que existe em juntar, inicialmente, as quantidades positivas e as negativas para depois estabelecer a diferença.

Após estas atividades, outros exercícios de adição poderão ser realizados.

Atividade 5:
Construindo a Subtração com o Jogo do “é” e do “não é”

Material: um dado com os sinais positivo e negativo(dado da operação); um dado com os numerais +1; +2; +3; -1; -2; -3 e figuras quadradas e triangulares.

Procedimento: O aluno joga os dados e anota os resultados na tabela.

N da jogada	Sinal	Pontos obtidos	Representação	Saldo da jogada
1	+	+2	■ ■	+2
2	-	+3	▲ ▲ ▲	-3
3	-	-2	■ ■	+2
4	-	-1	■	+1
5	+	-3	▲ ▲ ▲	-3

O sinal “+” do dado dos sinais significa que “é” o número positivo ou o número negativo que ele obteve no dado dos numerais. O sinal “-” do dado dos sinais representa que “não é” o número positivo ou o número negativo obtido no dado dos números. O aluno retira as peças conforme os pontos da jogada. Ao final das cinco rodadas, ele verifica o seu saldo final.

Na tabela acima, podemos realizar a leitura: é o 2 positivo, que representam nas peças as figuras quadradas. Na segunda jogada temos que: não é o 3 positivo (quadrados), então serão os 3 negativos (triângulos).

Cada aluno deve escrever a frase matemática do jogo e determinar o seu resultado. Vencerá quem tiver o maior saldo.

Frase matemática com os parênteses: $+(+2) - (+3) - (-2) - (-1) + (-3)$ e, de forma simplificada, sem os parênteses: $+2 - 3 + 2 + 1 - 3 = +5 - 6 = -1$

Este jogo deve ser bem explorado para que os alunos tenham condições de definir a diferença entre o sinal do número que expressa uma quantidade e o sinal de operação.

Atividade 6 :
Trabalhando com mais Numerais

Material : Dados e peças do jogo anterior
 Procedimento: Cada aluno do grupo faz uma tabela em seu caderno onde registrará os resultados de suas jogadas e de seus colegas.

Aluno	Sinal	Pontos	Resultado
Paulo	+	(+3-1+2-3-2)	-1
Helena	-	(-1-2-3-3+2)	+7
Rosane	-	(+2+3-1-2-2)	0
Cláudia	?	(-2+3+3+2-1)	?

Cada aluno faz cinco jogadas consecutivas com o dado dos números e recebe as peças correspondentes aos valores sorteados. Ao final, deve jogar o dado da operação que determinará se a operação “é” ou “não é”.

Na jogada de Cláudia, não sabemos o que vai acontecer, porque, se ela sortear o sinal “+”, terá resultado 5 positivo (+5). Caso o sinal for “-” (negativo), o resultado será 5 negativo (-5), porque “não é” o 5 positivo.

É importante discutir com os alunos qual é a maneira mais fácil de resolver a questão das peças, caso tiver sido sorteado o sinal negativo. Devemos trocá-las uma a uma ou resolver primeiro os parênteses e só depois realizar a operação completa? Muda alguma coisa, se o sinal for positivo? Estas discussões permitem que o aluno fale sobre suas idéias e chegue à solução esperada.

Atividade 7:

Construindo a Multiplicação dos Números Relativos

Material: quadrados e triângulos; um dado com os numerais: +1; +2; +3; -1; -2; -3; um dado com +1x; +2x; +3x; -1x; -2x; -3x; ficha copiada no caderno.

Procedimento: Cada aluno joga os dois dados ao mesmo tempo, interpreta-os conforme a regra e retira o número de quadrados ou triângulos. A regra é que o dado do “x” é o operador que determina quantas vezes devemos, ou não, retirar quadrados ou triângulos.

Jogada	Dado do x	Dado do número	Dese-nho	Resul-tado
1	+2 x (é 2 vezes)	(-2) (2 negativo)	▲▲/▲▲	-4
2	+3 x	(+1)	■/■/■	+3
3	-1 x (não é 1 vez)	(+3) (o 2 positivo)	▲▲▲/	-3
4	-2 x	(-3)	■ ■ ■ / ■ ■ ■	+6
5	-3 x	(-1)	■/■/■	+3
			TOTAL	+5

Exemplificando:

$-2 \times (+3) = -6$ significa não é duas vezes o 3 positivo (quadrados), logo serão 6 negativos (triângulos).

$+2 \times (-3) = -6$ significa é duas vezes o 3 negativo (triângulos), logo serão 6 negativos (triângulos).

$-2 \times (-3) = +6$ significa não é duas vezes o 3 negativo (triângulos), logo serão 6 positivos (quadrados).

O jogo da multiplicação pode ser realizado com diferentes materiais, tais como: piões ou roletas que possibilitem o trabalho com quantidades maiores.

A multiplicação é introduzida como soma de parcelas e, por isso, a adição deve estar bem trabalhada. Utilizando esta metodologia, não haverá necessidade de o professor apresentar a regra da operação multiplicação, nem é conveniente fazê-lo. O aluno realiza estas associações, que facilitam o seu aprendizado e evita a dificuldade da utilização dos sinais nas operações.

A operação divisão pode ser introduzida com um jogo, mas ela é melhor compreendida como a inversa da operação multiplicação. O jogo da divisão, neste momento, é uma situação desnecessária pela construção de sua operação inversa, que foi proposta anteriormente.

Conclusão

Os números relativos não são números que podemos ver (naturais) ou representar (racionais positivos). Precisamos determinar uma metodologia que permita a sua compreensão e o seu aprendizado, sem esquecer que este ocorre de forma diferente em tempos distintos para cada aluno.

A sistematização do que ocorreu nos jogos é fundamental para a construção dos números relativos. O importante nestas atividades é per-

mitir que os alunos analisem os resultados e cheguem à conclusão das regras.

Referências bibliográficas

1. BIGODE, Antônio José Lopes. *Matemática Atual 6ª série*. São Paulo: Ed. Atual, 1994, 230 pp.
2. BOLETIM GEPEM, n 17, 1985.
3. GROSSI, Esther Pillar. *Metodologia para introdução dos números inteiros*. Porto Alegre: GEEMPA, 1972.
2. IMENES, Luiz Márcio e outro. *Matemática 6ª série*. São Paulo: Ed. Scipione, 1997, 365 pp.



Vera Kern Hoffmann – Professora na Escola Evangélica Ivoti, Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Ciências: ênfase em Desenvolvimento Sustentável na ULBRA. E-mail: verahoff@geocities.com