PRÁCTICAS ALGEBRAICAS EN LOS PRIMEROS CURSOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Algebraic Practices in Early Elementary School

Brizuela, B.M.

Tufts University

Resumen

En el presente trabajo comparto ejemplos de estudios anteriores, así como también de estudios en curso donde investigamos el uso de prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria en escuelas en el noreste de Estados Unidos. Específicamente, en este trabajo me centraré en dos prácticas clave en estas edades tempranas: la representación y la generalización. Argumento que, así como hemos identificado a las funciones como contenido unificador para el álgebra escolar, las prácticas algebraicas también funcionan como unificadoras para la educación matemática escolar.

Palabras clave: *educación primaria, generalización, prácticas algebraicas, representación.*

Abstract

In this paper I share examples of previous as well as ongoing studies where we have investigated the use of algebraic practices in the first grades of primary education in schools in the Northeast of the United States. Specifically, in this paper I will focus on two key practices in these early ages research: representation and generalization. I argue that in the same way that we have identified functions as a unifying content thread for school algebra, algebraic practices also function as a unifying thread for Kindergarten-Grade 12 school mathematics education.

Keywords: *algebraic practices, elementary education, generalization, representation.*

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo compartiré ejemplos de estudios anteriores, así como también de estudios en curso y futuros donde investigamos e investigaremos el uso de prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria en escuelas en el noreste de Estados Unidos. Específicamente, en este trabajo me centraré en dos prácticas clave en estas edades tempranas: la representación y la generalización. En respuesta al efecto perjudicial de "guardabarrera" de un enfoque tradicional al álgebra, argumentamos que los estudiantes necesitan experiencias sostenidas y a largo plazo con los contenidos y las prácticas algebraicas a lo largo de su escolaridad, desde el comienzo de su educación formal, aprovechando sus intuiciones naturales.

CONTENIDO Y PRÁCTICAS ALGEBRAICAS EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Durante las últimas cuatro décadas distintas investigaciones han apuntado a la importancia de incluir y resaltar tanto el contenido como las prácticas algebraicas desde los primeros cursos de la escolaridad (e.g., Carraher y Schliemann, 2007; Kaput, 2008; Kaput et al., 2008). Estas investigaciones en las últimas décadas han resaltado los efectos tanto a corto como a largo plazo de integrar el contenido y las prácticas algebraicas con los contenidos que típicamente identificamos como aritméticos (e.g., Blanton et al., 2019; Brizuela et al., 2013; Schliemann et al., 2012). Esta área de investigación ha sido llamada *early algebra* en inglés, o álgebra temprana en castellano.

Siguiendo el marco establecido por Kaput (2008) y luego detallado por Blanton et al. (2011), entendemos que el contenido algebraico incluye: (1) la aritmética generalizada; (2) la equivalencia,

Brizuela, B. M. (2023). Prácticas algebraicas en los primeros cursos de educación primaria. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 43–57). SEIEM.

las expresiones, las ecuaciones y las desigualdades (o simplemente las ecuaciones); (3) el razonamiento cuantitativo y (4) el pensamiento funcional. La aritmética generalizada implica generalizar las relaciones aritméticas, incluidas las propiedades del número y las operaciones y razonar explícitamente con estas generalizaciones. Implica razonar sobre la estructura de las expresiones aritméticas más que sobre su valor computacional. Los conceptos asociados con las ecuaciones incluyen una comprensión relacional de la igualdad que permite interpretar las ecuaciones como una expresión matemática que indica la equivalencia de dos cantidades o expresiones. Otros conceptos incluyen, por ejemplo, representar y razonar con expresiones y ecuaciones en su forma simbólica. El razonamiento cuantitativo implica describir relaciones entre cantidades generalizadas que pueden o no ser equivalentes. El pensamiento funcional es el proceso de construir, describir y razonar con y sobre funciones. Incluye la generalización de relaciones entre cantidades covariantes; representar esas relaciones de múltiples maneras usando lenguaje natural, notación algebraica, tablas y gráficos; y razonar con fluidez con estas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de la función. Todos estos dominios de contenido representan vías significativas y fructíferas para el pensamiento algebraico temprano y, de hecho, tienen importantes puntos de intersección entre ellos.

De los cuatro dominios de contenido de la investigación en *early algebra*, en este trabajo me enfoco en el pensamiento funcional. Las funciones, consideradas durante mucho tiempo por los matemáticos como un concepto poderoso en matemáticas, también pueden servir como un hilo unificador en el currículo (Freudenthal, 1982; Hamley, 1934; Schwartz, 1990). Sin embargo, hasta hace pocas décadas, el estudio de las funciones, cuya comprensión históricamente se pensaba que requería el pensamiento formal y abstracto por parte de los alumnos, se trataba en gran medida dentro del dominio del álgebra en los cursos superiores de la educación primaria y en la educación secundaria. Sin embargo, junto con la reconceptualización del álgebra como una rama curricular a lo largo de todos los cursos de la escolaridad (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000), la investigación en *early algebra* ha contribuido a llevar el estudio de las funciones a la educación primaria y a entender *early algebra* como una parte importante de la enseñanza del álgebra. De hecho, el pensamiento funcional en los primeros cursos de la educación primaria es considerado por los primeros investigadores de *early algebra* como una ruta importante hacia el álgebra (Carraher y Schliemann, 2007).

Además de lo que podría describirse como el contenido matemático del *early algebra*, hay cuatro prácticas matemáticas significativas que caracterizan el pensamiento algebraico (temprano): (1) generalizar relaciones y estructuras matemáticas, (2) representar relaciones generalizadas de diversas maneras, (3) justificar relaciones generalizadas y (4) razonar con relaciones generalizadas (Blanton et al., 2011; Kaput, 2008). Estas prácticas han servido como un marco para la investigación del álgebra en educación primaria. Una característica importante de estas prácticas es que no ocurren de forma aislada, sino que están fundamentalmente integradas en las dimensiones del contenido alrededor de las cuales se ha fusionado gran parte de la investigación temprana del álgebra y que representan una extensión de los conocimientos matemáticos (ver, por ejemplo, Cai y Knuth, 2011; Kaput et al., 2008).

Generalizar es el corazón del razonamiento algebraico (Cooper y Warren, 2011; Kaput, 2008) y el núcleo mismo de la actividad matemática (Mason, 1996). Como un proceso de darse cuenta de la estructura y las relaciones, su desarrollo en los cursos de primaria es fundamental porque desvía la atención de los niños de los detalles de las instancias aritméticas hacia las relaciones y la estructura que definen cómo se relacionan las instancias particulares (Blanton, 2008). Es una forma crítica de razonamiento y sentido debido a que requiere que los estudiantes comprendan una situación, la conecten con su conocimiento existente y saquen conclusiones en forma de afirmaciones generalizadas.

Aunque la generalización podría describirse como el corazón del razonamiento algebraico, el proceso de generalización permanece oculto sin sistemas de *representación* que saquen a la luz el pensamiento de los niños (e.g., Fuentes y Cañadas, 2021, 2022). Los niños están razonando algebraicamente mientras representan generalizaciones matemáticas—ya sea a través de palabras, tablas, gráficos, imágenes o través de la notación algebraica (simbólica) — y cuando navegan entre estas representaciones. Además, sus representaciones no son sólo evidencia de las generalizaciones que observan en situaciones en problemas matemáticos, sino que la acción de representar ayuda a moldear la naturaleza misma de su razonamiento. Morris (2009) señala, por ejemplo, que el acto de representar cantidades generalizadas ayuda a desarrollar la comprensión de los niños de que una acción se aplica a un conjunto infinito de objetos, y no a un solo caso. Esto, a su vez, puede ayudar a fortalecer la comprensión de los niños de la naturaleza generalizada de una afirmación, un atributo importante de la generalización.

Quizás la más compleja de estas prácticas matemáticas sea el *razonamiento* algebraico, que implica actuar sobre, o razonar con, generalizaciones como objetos en sí mismos. Si bien las cuatro prácticas reflejan razonamiento algebraico, el razonamiento que actúa sobre una generalización es único en el sentido de que implica razonar con una generalización como objeto. Es decir, una vez que los niños han notado y representado una generalización de un problema matemático, es importante que sean capaces de usar esta generalización como un objeto en su pensamiento cuando resuelven nuevos problemas. Cognitivamente, esto significa una orientación hacia los objetos que es muy avanzada y en la que la generalización ha sido cosificada en el pensamiento del niño (Sfard, 1991). Así, cultivar esta práctica de pensamiento representa un objetivo importante en el aprendizaje del álgebra.

Justificar generalizaciones también es una práctica fundamental del pensamiento algebraico. Nuestra experiencia con esta práctica es que la inversión requerida para desarrollar el pensamiento de los estudiantes más allá de los argumentos empíricos y los argumentos no simbólicos como las pruebas basadas en representaciones (Schifter, 2009) es significativa.

La importancia de estas prácticas de pensamiento algebraico se ejemplifica aún más dadas sus conexiones con las prácticas matemáticas establecidas en los Estándares Estatales Básicos Comunes en Estados Unidos (*Common Core State Standards Initiative* [CCSSI], National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers [NGA Center y CCSSO], 2010), o *Standards for Mathematical Practice* en inglés—en particular, las prácticas de razonar de manera abstracta y cuantitativa, modelar con matemáticas, buscar y hacer uso de estructuras, y buscar y expresar la regularidad en razonamientos repetidos. Las prácticas matemáticas suelen pensarse como *hábitos mentales* que son relevantes más allá del contenido y del curso de escolaridad. Otros investigadores se refieren a las prácticas matemáticas como similares a las prácticas que utilizan los profesionales en su quehacer diario. En nuestro caso diríamos entonces que los matemáticos profesionales utilizan las prácticas de representar, generalizar, razonar y justificar en su quehacer matemático diario y que estas mismas prácticas son las que queremos que los niños de educación primaria desarrollen.

Las dimensiones de contenidos y prácticas algebraicas que aquí describo no deben tomarse como únicas. Hay otras caracterizaciones que se han identificado y que considero como consistentes con las que aquí utilizo. La elección de unas sobre otras es en gran medida pragmática (por ejemplo, ver Blanton et al., 2011; Carraher y Schliemann, 2007; Cooper y Warren, 2011).

GENERALIZACIÓN Y REPRESENTACIÓN

En este trabajo me centraré en las dos prácticas algebraicas en las que nos hemos enfocado mayormente en nuestra investigación: la generalización y la representación. Ambas pueden considerarse como el corazón del álgebra en los primeros cursos de educación primaria. Ambas también pueden considerarse como totalmente integradas a las otras dos prácticas de razonamiento y de justificación. Me atrevería incluso a decir que sin generalización y sin representación no hay álgebra.

Asimismo, entre las representaciones algebraicas me centraré en la notación algebraica, las tablas y los gráficos de coordenadas cartesianas (o simplemente gráficos). Estas tres representaciones también pueden considerarse como las representaciones de tipo algebraico más distintivas. Es decir, estas tres representaciones son también parte del corazón del álgebra y se distinguen de otras posibles representaciones como el dibujo, las expresiones verbales y los diagramas, por ejemplo, por ser específicamente algebraicas y por su capacidad de expresar la generalización de relaciones y estructuras matemáticas.

Notación algebraica

De particular interés para nosotros es la comprensión y el uso de la notación algebraica por parte de niños en los primeros cursos de educación primaria, especialmente la notación algebraica para representar generalizaciones, las dos prácticas algebraicas en las que me enfoco en este trabajo. Los enfoques tradicionales hacia la enseñanza del álgebra retrasan la introducción de la notación algebraica hasta cursos más avanzados de educación primaria o cursos de secundaria. Esos enfoques tradicionales sufren de trampas similares al enfoque de "álgebra tardía", que ha excluido a muchos estudiantes, en particular a los de grupos marginados (e.g., Kaput, 2008; Moses y Cobb, 2001), ejemplificando el efecto de "guardabarrera" mencionado anteriormente. Trabajos más recientes indican que la notación algebraica está al alcance de los niños pequeños (e.g., Brizuela et al., 2015; Dougherty, 2008, 2010; Torres et al., 2018), y que los tipos de interpretaciones que tienen los niños pequeños sobre la notación algebraica no son tan diferentes a las interpretaciones de los estudiantes de cursos más avanzados. Esto nos ha llevado a considerar a la notación algebraica como una herramienta potencialmente poderosa a través de la cual los niños pueden representar la generalización.

Un hallazgo importante en nuestros estudios (e.g., Brizuela et al., 2015) es que en sus entrevistas individuales 4 semanas después del comienzo de un experimento de enseñanza, los estudiantes de primer curso de primaria buscaban identificar cantidades específicas como ejemplos cuando no usábamos notación algebraica. Sin embargo, cuando introdujimos la notación algebraica en estas mismas entrevistas, los estudiantes dejaron de tratar de identificar cantidades específicas. Esto provee evidencia en favor de nuestro argumento de que la introducción de notación algebraica antes de lo habitual podría facilitar la reflexión de los estudiantes sobre cantidades indeterminadas y asimismo su construcción de generalizaciones.

Aquí comparto datos de un trabajo publicado en 2015 (Brizuela et al., 2015) en el cual documentamos los tipos de comprensiones sobre la notación algebraica de niños de seis años, en primer curso de educación primaria. Habíamos trabajado en una escuela pública en una zona urbana en la región noreste de los Estados Unidos. Implementamos 16 sesiones de clase durante un experimento de enseñanza en un aula con 22 niños. Durante las entrevistas individuales llevadas a cabo con cuatro niños de esta clase, obtuvimos evidencia de las compresiones detalladas en la Tabla 1.

Asimismo, al comparar las comprensiones que pudimos documentar con aquellas informadas en estudios anteriores con niños en los cursos más avanzados de escolaridad primaria y en la escuela secundaria (e.g., Knuth et al., 2011; Küchemann, 1981; MacGregor y Stacey, 1997) pudimos observar que las comprensiones expresadas por estos niños de seis años también suelen ser expresadas por niños mayores (ver Tabla 2). Adicionalmente, algunas de las comprensiones menos sofisticadas expresadas por niños adolescentes (e.g., la letra no se evalúa, recurrir inmediatamente a un valor numérico, la letra no se usa, la letra se ignora) no fueron expresadas por los niños de seis años con los que trabajamos.

Tabla 1. Comprensiones sobre la notación algebraica expresada por estudiantes de primer curso de primaria en entrevistas individuales (Brizuela et al., 2015, p. 51).

Comprensiones sobre la notación algebraica	**Zyla**	**Nyah**	**Tia**	**Leo**
Notación algebraica como una etiqueta u objeto	X			
Notación algebraica como representación de una cantidad indeterminada	X	X	X	X
Usan el orden alfabético de las letras para expresar relaciones entre cantidades, aunque la variable independiente no se especifique		X		X
Evitan combinar letras y números en una misma ecuación	X			

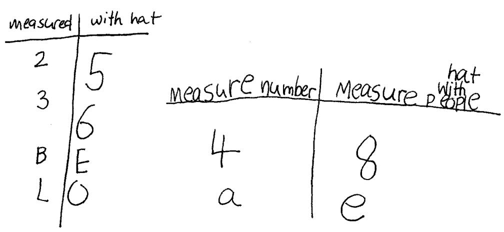
Tabla 2. Comprensiones sobre la notación algebraica expresada por estudiantes de primer curso de primaria y estudiantes adolescentes.

Küchemann 1981 niños de 14 años	**Knuth et al. 2011 niños de 11 años**	**MacGregor y Stacey 1997 niños de 11-12 años**	**Brizuela et al. 2015 niños de 6 años**
La letra se evalúa		Valor numérico	
La letra no se usa	Ninguna respuesta/no se	La letra se ignora	
La letra se usa como objeto	Objeto	Palabra abreviada	La notación algebraica se usa como etiqueta u objeto
		Valor alfabético	Usan el orden alfabético de las letras para expresar relaciones entre cantidades, aunque la variable independiente no se especifique
La letra como cantidad desconocida específica	número específico	Cantidad desconocida	La notación algebraica se usa como una cantidad desconocida específica
La letra como número generalizado	valores múltiples	Cantidad desconocida	
La letra como variable			
		Uso de una letra diferente para cada cantidad desconocida	
	Otro		
			Evita combinar letras y números en una misma ecuación

Ahora comparto, como ejemplo, el caso de Leo en una entrevista individual después de haber participado en el experimento de enseñanza durante cuatro semanas. Se le presentó una situación en la cual había una persona de una altura desconocida que se ponía sombreros de copa de distintas alturas y tenía que representar la altura de la persona sin el sombrero y con el sombrero. La Figura 1 muestra su trabajo escrito cuando trabajaba con una situación en la cual el sombrero medía 3 pies de alto (izquierda) y otra situación en la cual el sombrero medía 4 pies de alto (derecha).

Vemos el trabajo de Leo en la Figura 1, cómo representa y también utiliza la representación, específicamente la notación algebraica, para expresar la relación general entre cantidades en la situación bajo consideración. Por ejemplo, usamos B en la izquierda (usando la primera letra de mi nombre, Bárbara, ya que yo lo entrevistaba) para representar la altura de una persona, no importa qué altura fuera esta. Para representar la altura de la persona con el sombrero de copa de 3 pies de alto, Leo podría haber utilizado cualquier otra letra o podría haber escrito B+3. Sin embargo, representó la altura con el sombrero como E ya que es "3 letras más que *B*": después de B viene C, D y luego E. Asimismo, y utilizando la misma estrategia, utilizó la notación algebraica para generalizar la relación entre cantidades cuando la altura de la persona era representada con *L*: 3 letras más que L es O (M, N, O). Continuó utilizando la misma estrategia de representación para generalizar cuando el sombrero medía 4 pies: si una persona mide *a* pies, entonces su altura total con un sombrero de 4 pies es *e* (4 letras más allá de a: b, c, d, e). Argumentamos que en estos ejemplos del caso de Leo el uso de la notación algebraica le facilitó la representación de la generalización. Al utilizar solo números, como vemos en la Figura 1, la generalización de la relación entre las cantidades no es tan explícita como cuando usó letras.

Figura 1. Trabajo escrito de Leo al trabajar con un sombrero de 3 pies de alto (izquierda) y de 4 pies de alto (derecha). (Brizuela et al., 2015, p. 50)



La evidencia de que la notación algebraica podría haber estado actuando como una herramienta mediadora (Kaput, 1991; Kaput et al., 2008) que facilitó este tipo de reflexiones y generalizaciones entre los estudiantes está alineada con nuestra posición teórica de que las comprensiones conceptuales no necesariamente tienen que preceder a la introducción de símbolos, que los significados y los símbolos pueden co-emerger (e.g., Sfard, 2000) y las formas y funciones de las notaciones pueden cambiar con el tiempo (e.g., Saxe, 1999, 2005; Saxe y Esmonde, 2005). El trabajo de estos estudiantes en los primeros cursos de escolaridad primaria con la notación algebraica nos recuerda al trabajo de Cusi et al. (2011) que hablan del "balbuceo algebraico" (o el "proceso de construcción/interpretación/refinamiento de fórmulas en 'borrador'" [p. 492]). Nuestra posición es que los entornos de enseñanza y aprendizaje pueden brindar a los niños períodos de tiempo prolongados y sostenidos durante los cuales puedan adquirir mayor fluidez y comodidad con la notación algebraica, un aspecto esencial del lenguaje matemático.

Tablas

Entre las representaciones que incluimos en nuestros estudios con niños en los primeros cursos de educación primaria, además de la notación algebraica también utilizamos las tablas. Algunos estudios previos han explorado los usos y la comprensión de las tablas por parte de niños de entre primer y quinto curso de educación primaria (e.g., Brizuela y Alvarado, 2010; Brizuela y Lara-Roth, 2002; Martí, 2009; Schliemann et al., 2007; Torres et al., 2021, 2022). Otros investigadores también han estudiado las comprensiones de los niños sobre las funciones cuando utilizan tablas. Tanisli (2011), por ejemplo, investigó el pensamiento funcional de estudiantes de quinto curso de primaria mientras usaban tablas y concluyó que los estudiantes podían explorar relaciones funcionales y generalizarlas mientras usaban tablas. De manera similar, Schliemann et al. (2001) encontraron que estudiantes de tercer curso de primaria que participaban en actividades que involucraban completar una tabla con artículos y precios para ayudarlos a comprender la multiplicación como una relación funcional, eran capaces de organizar datos en tablas. Además, Blanton y Kaput (2011) encontraron que niños de primer curso de primaria pueden comprender las tablas y también determinar las relaciones funcionales subyacentes a los datos en las tablas.

Al mismo tiempo, las investigaciones sugieren que, aunque las tablas parecen simples, su comprensión no lo es y que aprender sobre tablas es especialmente complejo para los niños pequeños (Martí, 2009). Los estudiantes de segundo y quinto curso de primaria en el estudio de Martí (2009) tendieron a crear listas en lugar de aprovechar la información coordinada de las tablas. Además, Martí (2009) señaló que no es lo mismo la capacidad de interpretar información y datos en tablas que la capacidad de construir y utilizar tablas. Incluso entre los adultos, comprender las tablas no es una tarea sencilla. Ehrenberg (1986) señala que leer una tabla no es fácil de enseñar ni siquiera para los adultos.

En nuestros estudios hemos explorado cómo los niños pueden utilizar la representación de las tablas para generalizar relaciones entre cantidades. Aquí comparto datos de un trabajo publicado en 2021 (Brizuela et al., 2021) en el que presentamos el caso de un niño en educación infantil (5 años), y nos concentramos en los datos de sus entrevistas individuales a lo largo de un experimento de enseñanza en el que participó durante unos dos meses.

En la primera entrevista individual con Max, que tuvo lugar antes de que comenzara el experimento de enseñanza en su salón de clase en una escuela pública en el noreste de Estados Unidos, la entrevistadora y Max trabajaron sobre la relación entre cantidades de perros y cantidades de narices. La entrevistadora dibujó una línea vertical y otra horizontal para documentar distintos pares de valores (ver Figura 2, izquierda). Max fácilmente pudo decir que si hay 1 perro, hay 1 nariz; si hay 2 perros, hay 2 narices; y así sucesivamente para los distintos pares hasta 6. En ese momento la entrevistadora preguntó a Max qué mostraba cada columna en la tabla y él señaló su dibujo de un perro para el lado izquierdo y respondió verbalmente "cuántas narices" para la columna derecha. Sin embargo, cuando la entrevistadora le preguntó a Max si veía algún patrón en los números en la tabla, Max respondió que los números eran los mismos, haciendo un gesto horizontal a lo largo de cada fila de la tabla (ver Figura 2, izquierda):

Entrevistadora (E): ¿Ves alguna relación aquí? ¿Algo que esté diciendo que esté pasando, algún patrón en estos números? Cuéntame sobre ellos.

Max (M): [Mueve el lápiz a lo largo de cada fila.]

E: ¿Qué significa eso?

M: Son iguales...

E: ¿Son iguales?

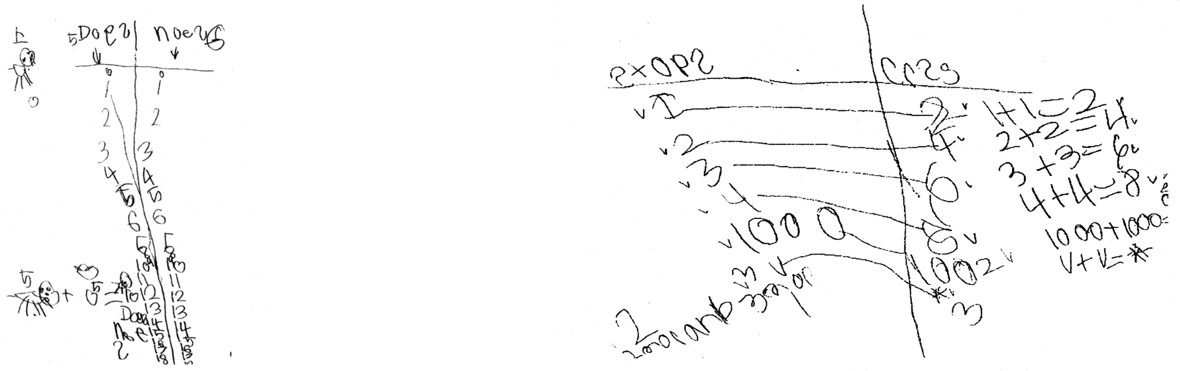
M: …números.

Argumentamos que la tabla actuó como una herramienta representacional que facilitó para Max la generalización entre las cantidades. Visualmente, la tabla despliega los pares de datos y se muestra explícitamente cómo los pares de cantidades de perros y de narices son siempre los mismos.

Después de 16 sesiones de trabajo con nosotros en el experimento de enseñanza, en la entrevista final Max empezó a dibujar una tabla inmediatamente, solo, tan pronto como escuchó el escenario del problema (ver Figura 2, derecha).

E: En la primera parada, [el tren] recoge dos vagones. En la segunda parada, recoge dos vagones más. En la tercera parada, recoge dos vagones más y sigue así. Entonces, en la parada número uno, ¿cuántos vagones recoge?

Figura 2. Izquierda: la primera tabla de Max en la primera entrevista (Brizuela et al., 2021, p. 179). Derecha: la tabla de Max en la entrevista final (Brizuela et al., 2021, p. 184).



Max primero dibujó una línea vertical y luego una línea horizontal para dividir el espacio. Luego, escribió “paradas” (*stops* en inglés) en el lado izquierdo y “vagones” (*cars* en inglés) en el lado derecho (ver Figura 2, derecha). Max se refirió a “número de paradas” y “número de vagones” a lo largo de la entrevista, y entendemos su referencia a “paradas” y “vagones” como abreviaturas de cantidades, no de objetos (Blanton et al., 2017).

> E: Bien, aunque no tengo suficientes vagones aquí para mostrarte [usando un tren de juguete], supongamos que se detuvo cuatro veces. ¿Puedes decirme cuántos vagones tendría después de cuatro paradas?
>
> M: [Escribe 4 en la columna de la izquierda y 8 en la columna de la derecha.]
>
> E: Bueno, cuéntame sobre esto.
>
> M: Uno, dos; dos, cuatro; tres, seis; cuatro, ocho [señalando cada una de las filas en la tabla].

En resumen, durante la primera entrevista, Max recibió apoyo considerable por parte de la entrevistadora para construir su tabla. Cuando llegó el momento de la entrevista final, 8 semanas más tarde, Max construyó una tabla por su cuenta. Además, en esta entrevista, Max pudo escribir una ecuación para representar las relaciones funcionales usando notación algebraica, y articuló las relaciones generales, describiéndolas como “duplicación”. Argumentamos que Max utilizó la representación tabular que él construyó para representar la función de manera general, usando una ecuación que incluía notación algebraica para expresar la generalización.

Gráficos de coordenadas cartesianos

Por último, aquí comparto datos inéditos sobre una investigación en curso en la cual incluimos gráficos en el trabajo con niños en infantil y primer y segundo curso de primaria. No hemos encontrado estudios que trabajen los gráficos con niños de 5-7 años. Schliemann et al. (2013) usaron gráficos con niños de 8-10 años en su trabajo sobre funciones y proporcionaron ejemplos de sus comprensiones. En su trabajo, comenzaron el experimento de enseñanza con rectas numéricas en tercer curso de primaria (8 años) e introdujeron el espacio cartesiano a niños de cuarto curso de primaria representando primero las relaciones en rectas numéricas paralelas y luego colocándolas en ángulos rectos para construir el plano cartesiano, con un fuerte enfoque en los intervalos a lo largo de la recta numérica y a lo largo de los ejes del espacio cartesiano. Después de tres años de trabajo con estudiantes que habían sido introducidos al espacio cartesiano de esta manera, los estudiantes que pertenecían al grupo de intervención del experimento de enseñanza se desempeñaron tan bien como sus compañeros en el grupo control en la identificación de puntos en el plano, pero mostraron una comprensión significativamente mejor de los elementos que involucran representaciones funcionales lineales en el espacio cartesiano. La intervención que describen Schliemann et al. (2013) ayudó a los niños a explorar cuestiones de covariación y promovió la comprensión de las relaciones entre los intervalos a lo largo de los dos ejes en el espacio cartesiano y, aunque la mayoría de los niños preferían concentrarse en los puntos en el gráfico, en lugar de los intervalos a lo largo de la recta numérica, podían usar un enfoque de un punto a otro punto para determinar cómo un intervalo en un eje corresponde a un intervalo en el otro. Al concluir la intervención al finalizar quinto curso de primaria, los estudiantes del grupo de intervención superaron a los estudiantes del grupo control en preguntas de la evaluación escrita que requerían la consideración de intervalos y en la interpretación y comparación de gráficos de funciones lineales.

Recogimos los datos del estudio en curso en una escuela en el noreste de Estados Unidos, en un salón de segundo curso de primaria (en el cual los niños tienen aproximadamente 7 años). En los siguientes ejemplos me enfoco en cómo Mia, una de las niñas que entrevistamos individualmente, usó los gráficos para generalizar relaciones funcionales. En la primera entrevista individual con Mia, antes de que comenzara el experimento de enseñanza en su curso, se le presentó una situación en la cual se consideraba la cantidad de pájaros y la cantidad de alas de pájaro.

Entrevistadora 1 (E1): Vamos a hablar de pájaros. Digamos que tengo un pájaro. ¿Cómo podríamos saber cuántas alas tenemos en total?

Mia (M): Dos.

De ahí, la entrevistadora presentó los casos de dos, tres, cuatro y cinco pájaros y Mia rápidamente pudo responder cuántas alas había en total. Luego, se le pidió que organizara los pares de valores en una tabla (ver Figura 3, izquierda).

Figura 3. Trabajo de Mia en la primera entrevista.

Al finalizar la tabla, la entrevistadora le preguntó sobre la relación entre la cantidad de pájaros y la cantidad de alas, buscando que Mia intentara generalizar la relación. Mia contestó de la siguiente manera: "Porque estamos contando de dos en dos, porque en cada pájaro hay dos alas. Así que estamos contando de dos en dos". Aunque no podemos recurrir a ningún argumento de tipo causal, fue luego del trabajo con la tabla y de su interacción con la representación tabular que Mia generalizó la relación entre la cantidad de pájaros y la cantidad de alas. Luego, la entrevistadora le mostró a Mia el gráfico que se muestra en la Figura 3 (derecha) y las dos tuvieron el siguiente diálogo:

E1: ¿Habías visto esto antes?

M: Nunca en mi vida.

E1: Bien.

M: Sólo como el sexto curso o algo así. … Creo que, como, creo que los estudiantes de séptimo curso hacen esto.

E1: Sí, creo que guardan esto para la secundaria. Hablemos de ello un poco.

La entrevistadora continuó con el diálogo con Mia de la siguiente manera:

E1: ¿Puedes decirme por qué estos puntos están en el gráfico?

M: ¿Qué puntos?

E1: Estos.

M: Ah, los puntos.

E1: Puntos. Sí, llamamos a esos puntos. ¿Puedes decirme por qué están ahí?

M: No sé.

E1: ¿O qué significan?

M: No sé, ¿por qué no lo hacemos (ininteligible) en secundaria? Todavía estoy en segundo grado.

La entrevista parecía haber terminado, pero una segunda investigadora intervino en este momento:

Entrevistadora 2 (E2): Mia qué te parece-, mira-, si miras el primer punto, el primer punto- [E1 señala el punto 1;2].

M: Es un número 2. Está en la línea número 2. Y está en la línea número 1 en la parte inferior.

E2: ¿Qué crees que significan el 1 y el 2?

M: Tres. No sé.

E2: Entonces, ¿crees que tomas, crees que tomas el 1 y el 2 y los sumas?

M: Sí. Espera, ¡eso era como la tabla! [Señala la tabla en la Figura 3.] ¡La tabla de allí! Estamos sumando otro 1 al 2. [E1 le entrega la tabla.] Es como lo hicimos aquí. 1 es igual a 2 [apunta a la tabla y señala la primera fila]. 1 es igual a 2 [señala el gráfico y el punto 1;2]… ¡Es como el gráfico! ¡Estos son como el gráfico! [Apunta a ambos pedazos de papel.]

Mia estaba realmente sorprendida y emocionada al darse cuenta de las conexiones entre la tabla y el gráfico. La entrevista continuó del siguiente modo:

E1: Detengámonos y analicemos uno de estos puntos [apuntando al 5;10 en el gráfico, Figura 3 derecha]. ¿Puedes mostrarme dónde está en la tabla?

M: Número 10 y eso es 5 [usando el gráfico]. El 5 está justo aquí [señala la tabla], hasta el 10.

E1: Número 10 es 5. ¿De qué... de qué estamos hablando? ¿5 que? ¿Y 10 qué?

M: Bueno, si esto dice alas de pájaro, entonces eso equivaldrá a 10 alas de pájaro. Y esto dice número de pájaros, entonces serán 5 pájaros. [Leyendo las leyendas en la tabla.]

E1: Está bien.

M: Es como en el gráfico [señala el gráfico].

E1: Sí, lo veo, ahora que me lo señalas, lo veo-

M: Es sólo-, es así, pero en una versión diferente-

M: Porque, porque estamos haciendo esto: en cada pájaro, hay 2 alas [señala la tabla]… En cada pájaro, no hay 1 ala. …

Aquí, al conectar los datos en la tabla con los datos en el gráfico, Mia volvió a expresar la generalización sobre la relación entre cantidad de pájaros y cantidad de alas: “en cada pájaro hay 2 alas, en cada pájaro no hay 1 ala”. Luego, la entrevistadora y Mia continuaron mirando otros pares de valores y pasaron a enfocarse en el par 7;14. Mia pasó a explicarle a la entrevistadora que había que duplicar el número de pájaros para saber el número de alas. La entrevista siguió del siguiente modo:

E1: ¿Por qué se duplican los números?

M: ¿Números dobles?

E1: ¿Por qué duplicamos?

M: Estamos duplicando porque... no sé.

E1: Este dibujo [señalando un dibujo de un pájaro] te recuerda quizás, ¿por qué estamos duplicando?

M: Tal vez porque hay 2 alas en cada pájaro, así que nos estamos saltando, estamos saltando los números impares a los números pares.

En la segunda entrevista con Mia, ella afianzó sus comprensiones sobre los gráficos. Mia compartió con la entrevistadora, por ejemplo, que el gráfico: “Es exactamente lo mismo que la tabla, pero se muestra de una manera diferente”. También compartió que veía un patrón en el gráfico a la derecha de la Figura 4: “Veo un patrón. Es un doble, tal como dijimos aquí [señala la tabla a la izquierda de la Figura 4]. El número de pájaros y alas de pájaro siempre será el doble [lee su regla]”. Luego, Mia observó que había notado lo siguiente en el gráfico:

M: Es 2, 2, 2, 2 [señalando las coordenadas de cada punto en el gráfico a la derecha de la Figura 4]. Sigue subiendo de a dos.

E1: ¿Qué sube en 2?

M: Sigue siendo un espacio de un 2 [indicando a lo largo de las líneas y el eje vertical, *y*].

E1: Y que-

M: En los bloques. Y se hace más y más y más grande, hasta el 14 y el 7.

E1: ¿Crees que siempre crecerá de a 2?

M: [Asiente.]

E1: ¿Y por qué siempre crecerá de a 2?

M: Porque estamos contando de 2 en 2.

E1: ¿Y por qué contamos de 2 en 2?

M: Porque los pájaros tienen 2 alas.

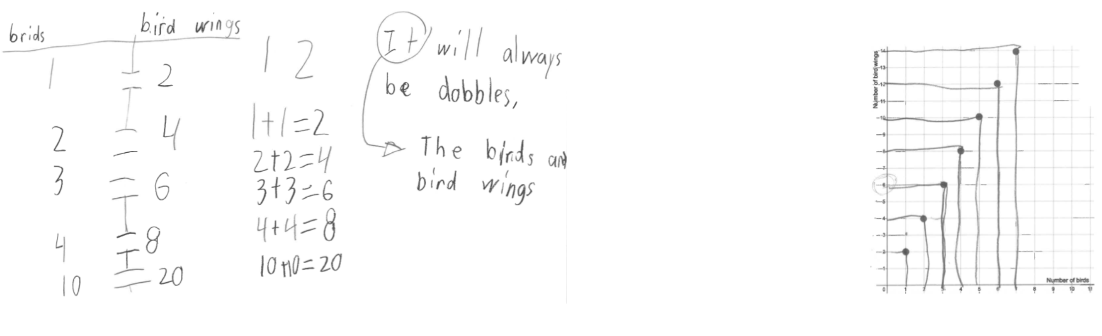
Finalmente, la entrevistadora y Mia acabaron la entrevista del siguiente modo:

E1: ¿Cuál te gusta más [la tabla o el gráfico]?

M: Este [señala el gráfico a la derecha de la Figura 4) porque es igual a este [señala la tabla a la izquierda de la Figura 4]. Hicimos esto [la tabla] mucho tiempo. Quiero probar-, me gusta probar algunas cosas que son nuevas.

Similar a lo que indiqué sobre el uso de la notación algebraica y de las tablas, Mia pudo generalizar con el gráfico como representación algebraica de la relación $y = 2x$. El uso que hizo Mia de los gráficos indica que están a su alcance y que, como ejemplo de la práctica algebraica de la representación, pueden ser utilizados por los niños en los primeros cursos de escolaridad primaria para generalizar relaciones funcionales.

Figura 4. Trabajo de Mia en la segunda entrevista.



Discusión y Conclusiones

A través de los datos compartidos en este trabajo mi objetivo ha sido enfatizar la relevancia e importancia de enfocarnos en el desarrollo de las prácticas algebraicas en niños en los primeros cursos de educación primaria. Especial y particularmente en las prácticas algebraicas de la representación y la generalización. Tal como lo indicaron en sus trabajos Blanton et al. (2011) y Kaput (2008), estas prácticas están interconectadas.

Las tres representaciones en las que me enfoqué en este trabajo—la notación algebraica, las tablas y los gráficos—han sido consideradas por muchos autores como dominio de los grados superiores de la educación primaria o incluso como dominio de la educación secundaria. Sin embargo, en este trabajo enfaticé la importancia de brindar acceso a los niños a estas representaciones lo más pronto que sea posible. Utilizando el ejemplo paralelo del aprendizaje de la lengua o lengua extranjera como hemos hecho en trabajos anteriores (e.g., Brizuela y Earnest, 2008), cuando consideramos el aprendizaje de la lengua o de una lengua extranjera, jamás nos atreveríamos a pensar en postergar el aprendizaje o a esperar hasta que los niños estén "listos". Imaginen el furor que podría llegar a causar que planteáramos esperar a enseñar a los niños a hablar su primera lengua, o una segunda lengua, hasta que estén listos, y negarles acceso a dichas lenguas hasta ese momento. Sin embargo, esa es la actitud que tomamos cuando consideramos el acceso que damos a los niños a las representaciones que están en el corazón del álgebra como la notación algebraica, las tablas y los gráficos. Como indicaron Cusi et al. (2011), de la misma manera que fomentamos el balbuceo en los niños cuando están aprendiendo a hablar, así debemos fomentar su balbuceo algebraico con distintas representaciones algebraicas.

En nuestros próximos trabajos planeamos detallar las trayectorias de aprendizaje sobre tablas y sobre gráficos en niños en estos primeros cursos de primaria, similar a lo que hemos hecho con la notación algebraica (e.g., Blanton et al., 2017; Ventura et al., 2021). Nuestro objetivo es mostrar de qué son capaces los niños, así como su proceso gradual de aprendizaje. O sea, sus primeros balbuceos con las tablas y los gráficos.

En conclusión, no solo debemos enfocarnos en el contenido matemático que incluimos en la escolaridad de nuestros niños, sino también en su desarrollo de prácticas algebraicas. El desarrollo de hábitos mentales a través de las prácticas es tan importante como el aprendizaje del contenido. Asimismo, tal como ciertos contenidos algebraicos como las funciones pueden pensarse como conectando la totalidad de la escolaridad de los niños, también las prácticas algebraicas como la representación y la generalización, como también la justificación y el razonamiento, pueden servir como hilos conectores para la educación matemática de los niños, desde los primeros grados de su escolaridad.

Agradecimiento

Las investigaciones fueron llevadas a cabo con el apoyo de DRK-12 DRL #1154355 y DRK-12 #2201095 de la National Science Foundation de Estados Unidos. Agradezco a Susanne Strachota, Sophia Raymond, Mary Caddle, Maria Blanton y Angela Gardiner, colaboradoras en el proyecto DRK-12 #2201095.

Referencias

Blanton, M. (2008). *Algebra and the elementary classroom: Transforming thinking, Transforming practice*. Heinemann.

Blanton, M., Brizuela, B. M., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics, 95*, 181–202. DOI: 10.1007/s10649-016-9745-0

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as route into algebra in elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 5–23). Springer.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. NCTM.

Blanton, M., Stroud, R., Stephens, A., Gardiner, A. M., Stylianou, D. A., Knuth, E., Isler-Baykal, I. y Strachota, S. (2019). Does early algebra matter? The effectiveness of an early algebra intervention in Grades 3 to 5. *American Educational Research Journal, 56*(5), 1930–1972. DOI: 10.3102/0002831219832301

Brizuela, B. M. y Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE Nueva Época, 21*, 37–43. https://doi.org/10.35305/revistairice.v21i21.506

Brizuela, B. M., Blanton, M. y Kim, Y. (2021). A Kindergarten student's uses and understandings of tables while working with function problems. En A. G. Spinillo, S. L. Lautert y R. E. Borba (Eds.), *Mathematical reasoning of children and adults: teaching and learning from an interdisciplinary approach* (pp. 171-190). Springer International Publishing.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Newman-Owens, A. y Gardiner, A. M. (2015). Children's use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*, 1-30. DOI: 10.1080/10986065.2015.981939

Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2008). Multiple notational systems and algebraic understandings: The case of the "best deal" problem. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 273-301). Lawrence Erlbaum and Associates.

Brizuela, B. M. y Lara-Roth, S. (2002). Additive relations and function tables. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 309–319. DOI: 10.1016/S0732-3123(02)00076-7

Brizuela, B. M., Martinez, M. V. y Cayton-Hodges, G. A. (2013). The impact of early algebra: Results from a longitudinal intervention. *Journal of Research in Mathematics Education/Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas (REDIMAT), 2*(2), 209-241. DOI: https://doi.org/10.4471/redimat.2013.28

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 669–706). Information Age Publishing.

Cooper, T. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalize: Models, representations, and theory. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series* (pp. 187-214). Springer.

Cusi, A., Malara, N. A. y Navarra, G. (2011). Theoretical issues and educational strategies for encouraging teachers to promote a linguistic and metacognitive approach to early algebra. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series* (pp. 483-510). Springer.

Dougherty, B. (2008). Measure up: A quantitative view of early algebra. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 389-412). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Dougherty, B. J. (2010). A DavydovaApproach to early mathematics. En Z. Usiskin, K. Andersen y N. Zotto (Eds.), *Future curricular trends in algebra and geometry* (pp. 63–69). Information Age Publishing.

Ehrenberg, A. S. C. (1986). Reading a table: An example. *Applied Statistics, 35*(3), 237–244.

Freudenthal, H. (1982). Variables and functions. En G. V. Barneveld y H. Krabbendam (Eds.), *Proceedings of conference on functions* (pp. 7-20). National Institute for Curriculum Development.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2021). Funciones f(x)=3x y f(x)=5x en primero de primaria: estrategias y representaciones utilizadas por alumnos. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 269–277). SEIEM.

Fuentes, S. y Cañadas, M. C. (2022). Evidencias de pensamiento funcional en una niña de 4 años: Estrategias y representaciones. En T. F. Blanco, C. Núñez-García, M. C. Cañadas y J. A. González-Calero (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXV* (pp. 269-276). SEIEM.

Hamley, H. R. (1934). *Relational and functional thinking in mathematics: The 9th Yearbook of NCTM*. Bureau of Publications, Teachers College, Columbia University.

Kaput, J. (1991). Notations and representations as mediators of constructive processes. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 53-74). Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Kaput, J., Blanton, M. y Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. En J. Kaput, D. W. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 19-56). Lawrence Erlbaum Associates/Taylor & Francis Group.

Kaput, J., Carraher, D. y Blanton, M. (Eds). (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum Associates.

Knuth, E. J., Alibali, M. W., McNeil, N. M., Weinberg, A. y Stephens, A. C. (2011). Middle school students' understanding of core algebraic concepts: Equivalence and variable. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education Monograph Series* (pp. 259-276). Springer.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics* (pp. 102-119). Murray.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19.

Martí, E. (2009). Tables as cognitive tools in primary education. En C. Andersen, N. Scheuer, M. P. Pérez Echeverría y E. Teubal (Eds.), *Representational systems and practices as learning tools* (pp. 133–148). Sense Publishing.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Kluwer Academic Publishers.

Morris, A. K. (2009). Representations that enable children to engage in deductive arguments. En D. Stylianou, M. Blanton y E. Knuth (Eds.), Tea*ching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 87-101). Routledge.

Moses, R. y Cobb, C. (2001). *Radical equations: Civil rights from Mississippi to the algebra project*. Beacon Press.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Autor.

National Governors Association Center for Best Practices & Council of Chief State School Officers. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Council of Chief State School Officers. Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf

Saxe, G. B. (1999). Cognition, development, and cultural practices. *New Directions for Child and Adolescent Development, 83*, 19-35. DOI: 10.1002/cd.23219998304

Saxe, G. B. (2005). Practices of quantification from a sociocultural perspective. En A. Demetriou y A. Raftopoulos (Eds.), *Cognitive developmental change: Theories, models, and measurement* (pp. 241–263). Cambridge University Press.

Saxe, G. B. y Esmonde, I. (2005). Studying cognition in flux: A historical treatment of fu in the shifting structure of oksapmin mathematics. *Mind, Culture, and Activity, 12*(3-4), 171-225. DOI: 10.1207/s15327884mca123&4_2

Schifter, D. (2009). Representation-based proof in the elementary grades. En D. Stylianou, M. Blanton y E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K–16 perspective* (pp. 71–86). Taylor & Francis Group.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2001). When tables become function tables. En M. van der H.-P. (Ed.), *Proceedings of the 25th conference of the International Group for the PME* (vol. 4, pp. 145-152). Freudenthal Institute.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Lawrence Erlbaum and Associates.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W. y Brizuela, B. M. (2012). Algebra in elementary school. En Coulange, L., Drouhard, J.-P., Dorier, J.-L. y Robert, A. (Eds.) *Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives* (pp. 103-118). La Pensée Sauvage.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W. y Caddle, M. (2013). From seeing points to seeing intervals in number lines and graphs. En B. Brizuela y B. Gravel (Eds.) *Show me what you know: Exploring representations across STEM disciplines* (pp. 223-243). Teachers College Press.

Schwartz, J. (1990). Getting students to function in and with algebra. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 261-289). Mathematics Associations of America.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, K. E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design* (pp. 37-98). Erlbaum.

Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *The Journal of Mathematical Behavior, 30*(3), 206–223. DOI: 10.1016/j.jmathb.2011.08.001

Torres, M. D., Brizuela B., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2021). Primeras experiencias con una tabla en segundo de Educación Primaria. Aproximación funcional al pensamiento algebraico. En P. D. Diago, D. F. Yáñez, M. T. González-Astudillo y D. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 603 – 611). SEIEM.

Torres, M. D., Brizuela, B. M., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2022). Introducing tables to second-grade elementary students in an algebraic thinking context. *Mathematics, 10*, 56. https://doi.org/10.3390/math10010056

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). SEIEM.

Ventura, A. C., Brizuela, B. M., Blanton, M. Sawrey, K., Gardiner, A. M. y Newman-Owens, A. (2021). A learning trajectory in kindergarten and first grade students' understanding of variable and use of variable notation to represent indeterminate quantities. *Journal of Mathematical Behavior, 62*. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2021.100866