Hacia una caracterización de la competencia algebraica en la formación de profesores

Lilia P. Aké y David A. Páez

El presente estudio, de tipo cualitativo y exploratorio, está centrado en discutir la competencia algebraica exhibida por futuros docentes de bachillerato. En el estudio participaron seis futuros profesores mexicanos que resolvieron dos tareas algebraicas, los datos recopilados se analizaron de acuerdo con los niveles de competencia articulados en tres acciones: resolver, interpretar y validar. Los resultados muestran que los participantes tienen una competencia algebraica en vías de desarrollo, al presentar dificultades para interpretar y validar su actividad matemática. Es fundamental un currículum de formación de profesores que ponga mayor énfasis en estas tres acciones para favorecer la competencia algebraica.

Términos clave: Competencia algebraica; Educación media superior; Experiencia formativa; Formación de profesores; Tarea algebraica

Towards a Characterization Algebraic Competence on Teachers' Training

The present qualitative and exploratory study discusses algebraic competence evidenced by prospective high school teacher. Six prospective Mexican teachers participated in the study when solving two tasks of an algebraic nature, data collected analyzed according to the four competence levels articulated in three actions: solve, interpret and validate. Results show that the prospective teachers have algebraic competence in development process, because they have difficulties interpreting and validating their mathematical activity. Therefore, the mathematics teacher training curriculum must emphasize posing these three actions to favor algebraic competence.

Keywords: Algebraic competence; Algebraic task; Formative experience; High school education; Teacher training

Aké, L. P. y Páez, D. A. (2024). Hacia una caracterización de la competencia algebraica en la formación de profesores. *PNA, 18*(3), 223-253. https://doi.org/10.30827/v18i3.26260

Rumo a uma caracterização da competência algébrica na formação de professores

A presente pesquisa teve caráter qualitativa e exploratória discute a competência algébrica exposta por futuros professores do ensino médio. Seis futuros professores no México participaram do estudo ao resolver duas tarefas algébricas, os dados coletados foram analisados de acordo com os quatro níveis de competência articulados em três ações: resolver, interpretar e validar. Os resultados mostram que os futuros professores possuem competência algébrica em processo de desenvolvimento, pois apresentam dificuldades na ação de interpretar e validar sua atividade matemática. Portanto, o currículo de formação de professores de matemática deve enfatizar a proposição dessas três ações para favorecer a competência algébrica.

Palavras-chave: Competência algébrica; Ensino médio; Experiência formativa; Formação de professores; Tarefas algébricas

Internacionalmente la formación de profesores de matemáticas es un tema actual entre las investigaciones en Educación Matemática, ya que es un factor importante que incide en el desempeño académico de sus futuros estudiantes (Da Ponte y Chapman, 2016; Jaworski y Wood, 2008; Leikin y Zazkis, 2010). La complejidad que implica determinar una formación para que el profesorado lleve a cabo su tarea educativa es un reto, y así lo reflejan diversas propuestas que han emergido en las últimas cuatro décadas (por ejemplo, Ball et al., 2005; Godino, 2009; Hossain et al., 2013; Montes et al., 2013; Shulman, 1986).

Cardoso (2019) menciona que el avance en las investigaciones muestra que la formación de profesores está contextualizada de acuerdo con políticas y reformas educativas específicas y que existen escenarios formativos diversos que influyen en el desarrollo de la red de conocimientos matemáticos y didácticos en los docentes. Asimismo, Aguayo (2004) y Camarena (2015) consideran que la educación continua de los profesores también resulta compleja, ya que se articula con base en las características organizativas y académicas de la institución donde éstos imparten clases.

En México, la diversidad de escenarios formativos es uno de los motivos que justifican que los estudios sobre la formación inicial y continua del profesorado sean escasos, sobre todo en lo que respecta al desarrollo de su conocimiento matemático (Ávila, 2016; Ávila et al., 2013). En este sentido, no hay suficiente evidencia sobre los niveles de competencia que exhiben los docentes de matemáticas sobre el conocimiento de su materia. Esto se debe, por un lado, a que la mayoría de las investigaciones están centradas en los conocimientos sobre pedagogía y metodologías de enseñanza. Por otro, la resistencia de algunos maestros a reconocer las deficiencias en sus conocimientos matemáticos

(Santibáñez, 2007). Esto deriva, según Santibáñez (2007), en que el conocimiento de la disciplina sea una preocupación constante en el ámbito de la formación docente inicial y en servicio, y lo convierte en una problemática que requiere mayor atención. De esta manera, el desarrollo de investigaciones sobre el conocimiento matemático de los profesores de educación básica (preescolar, primaria y secundaria) y educación media superior (o bachillerato) es una cuestión latente y necesaria, al igual que el estudio sobre el conocimiento didáctico para la enseñanza de las matemáticas.

La formación inicial del profesorado es heterogénea en México, por un lado, las Escuelas Normales son las encargadas de la formación docente a nivel de educación básica, pero desde la investigación educativa no se les considera núcleos importantes para generar trasformaciones en los escenarios de aula, ya que están centradas en la instrumentalización de la práctica pedagógica, que en ocasiones es general, y no cuentan con una autonomía que propicie su desarrollo académico e investigativo como sucede en las instituciones de educación superior (Navarrete-Cazales, 2015). Por otro, las instituciones universitarias son las que atienden la demanda de profesores de matemáticas para la educación media superior, donde no necesariamente son formados como profesores de matemáticas, más bien son profesionales con diversa formación académica que se hacen profesores de matemáticas en la práctica (Dolores, 2014).

Las investigaciones en torno a cómo los profesores desarrollan conocimientos matemáticos específicos dan cuenta de lo que estos saben y enseñan sobre un determinado contenido, y su impacto en el aprendizaje. Potari y Da Ponte (2017) mencionan que la investigación muestra que el conocimiento de los profesores sobre contenidos específicos se caracteriza por una baja comprensión conceptual. Por su parte, Hill et al. (2005) y Borko et al. (2005) señalan que existe una relación entre el conocimiento matemático de los docentes y el de sus estudiantes en cuanto a los aprendizajes que estos últimos logran en el salón de clases. Asimismo, Aguayo (2004) y Camarena (2015) coinciden en que las inconsistencias presentes en el conocimiento matemático de los docentes refuerzan los errores conceptuales en sus alumnos.

De acuerdo con Potari y Da Ponte (2017), el estudio y desarrollo de conocimientos matemáticos en los docentes en formación y en servicio es una problemática difícil de abordar, ya que se carece de un marco común sobre el conocimiento disciplinar requerido. Esto se refleja en las investigaciones sobre la enseñanza del álgebra, en particular, Doerr (2004, p. 268) plantea que “uno de los impedimentos para el cambio en cómo el álgebra es enseñada en las escuelas parece ser la falta de un cuerpo sustancial de investigación acerca del conocimiento y la práctica de los profesores en la enseñanza de esta disciplina”. En este sentido, profundizar en el saber que tienen los profesores sobre el álgebra podría contribuir a delimitar el conjunto de conocimientos que se requieren para enseñar matemáticas y plantear acciones formativas.

De lo expuesto previamente emerge el interés de analizar la competencia algebraica de futuros docentes de bachillerato, por lo que se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cuál es la competencia algebraica que tiene un grupo de futuros profesores de matemáticas durante una experiencia formativa?

A continuación, en el siguiente apartado se dan a conocer los principales trabajos desarrollados en torno a la competencia matemática y a los que han referido a la competencia algebraica. En el tercer apartado se presenta un marco de estudio para la competencia algebraica articulado en niveles de desarrollo, el cual es resultado de un trabajo teórico ya publicado (Aké y Olvera-Martínez, 2022). En el cuarto apartado, se describe una experiencia desarrollada con seis futuros profesores, así como la metodología de estudio, la muestra y las tareas que se utilizaron para la recolección de datos. En el quinto apartado se presentan los resultados obtenidos relativos a los niveles de competencia algebraica. Finalmente, las conclusiones se mencionan en el último apartado.

COMPETENCIA MATEMÁTICA Y COMPETENCIA ALGEBRAICA

La competencia matemática ha sido objeto de discusión en las últimas dos décadas desde el punto de vista conceptual y ha sido implementada en contextos específicos. Los trabajos pioneros son los de Niss y colaboradores (por ejemplo, Niss et al., 2016; Niss y Højgaard, 2019) con el proyecto KOM (por su traducción al español Competencias y Aprendizaje de las Matemáticas), una iniciativa danesa cuyo objetivo era plantear una reforma de la educación matemática articulada en competencias. Para estos autores, la competencia matemática es el conjunto de conocimientos fácticos y comprensión matemática, e implica “una disposición para actuar apropiadamente en respuesta a todo tipo de desafíos matemáticos relacionados con diversas situaciones” (Niss y Højgaard, 2019, p. 12), las cuales incluyen una amplia variedad de contextos y situaciones intramatemáticas o extramatemáticas. Además, reconocen ocho tipos de competencia divididas en dos grupos: las relativas a la habilidad de plantear y responder preguntas por medio de las matemáticas (pensamiento matemático, manejo de problemas, modelación matemática y razonamiento matemáticos) y las relacionadas con las habilidades en el manejo del lenguaje, construcciones y herramientas (representación matemática, formalismo, comunicación matemática y herramientas matemáticas). Estas competencias se caracterizan en términos de acciones, es decir, en las formas específicas de proceder por parte del sujeto para evidenciar su quehacer matemático.

Diversos estudios refieren la competencia matemática como alfabetización matemática (traducción del término en inglés *mathematical literacy*), planteada por el proyecto PISA (*Programme for International Student Assessment*) de la OECD (*Organization for Economic Cooperation and Development).* En este marco se define competencia matemática, o alfabetización matemática, como:

> *La capacidad de un individuo para formular, interpretar y utilizar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonamiento matemático y el uso de conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos. Ayuda a las personas a reconocer el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y a emitir juicios y decisiones bien fundados que necesitan los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos.* (OCDE, 2013, p. 25)

En esta misma línea de la OCDE, los trabajos de Rico (Caraballo et al., 2013; Rico, 2007) han discutido los planteamientos teóricos que soportan el significado de la competencia matemática de manera global, y especifican que actualmente conlleva una conceptuación que:

> *[Está] caracterizada a través de siete capacidades generales: razonar y argumentar; comunicar; matematizar; representar; diseñar estrategias para resolver problemas; utilizar lenguaje simbólico, formal y las operaciones; y usar herramientas matemáticas y orientada a tres procesos matemáticos fundamentales: formular situaciones matemáticamente; utilizar conceptos, hechos, procedimientos y razonamiento matemático; e interpretar y evaluar resultados matemáticos.* (Caraballo et al., p. 58)

El NCTM (*National Council of Teachers of Matematics*) no presenta una definición explícita de la competencia matemática. En sus Principios y Estándares (NCTM, 2000), separa el saber y hacer, y a partir de esto propone cinco estándares relativos a los contenidos matemáticos (números y operaciones, álgebra, geometría, medida y análisis de datos y probabilidad) y cinco estándares sobre los procesos matemáticos (resolución de problemas, razonamiento y prueba, conexiones, comunicación y representación). En conjunto, los estándares de contenidos y procesos favorecen la competencia matemática, "… y están indisolublemente unidos, es decir, no se puede resolver problemas sin comprender los contenidos matemáticos" (NCTM, 2000, p. 7).

Las investigaciones de la competencia matemática han llevado a diferentes investigadores a proponer caracterizaciones sobre competencias específicas. Por ejemplo, Solar et al. (2014) asumen las orientaciones de la competencia matemática planteadas en PISA y el proyecto KOM. A partir de ello, proponen el estudio de dos competencias: modelización y argumentación. Para estos autores, la primera competencia implica (a) caracterizar el modelo y validar dichas características, (b) interpretar el modelo, construir la expresión del modelo y validarlo, (c) identificar las propiedades del modelo y aplicarlo, y (d) reflexionar sobre la modelización. Para la competencia de argumentación se reconocen los procesos de (a) identificar datos (b) interpretarlos y validarlos, (c) justificar y fundamentar, y (d) reflexionar sobre la argumentación. El desarrollo de estas dos competencias con base en los procesos matemáticos implica que el estudiante lleve a cabo cierto tipo de acciones.

En la misma línea temática de las investigaciones antes citadas está el trabajo de Fakhrunisa y Hasanah (2020), quienes realizaron un estudio sobre la competencia de modelización basados en el trabajo de Blum (2011). En su propuesta caracterizan la competencia de modelización a partir de cinco subcompetencias, las cuales son: (1) comprender el problema real y configurar un modelo basado en esa realidad, (2) configurar un modelo matemático a partir del modelo real, (3) resolver cuestiones matemáticas dentro del modelo matemático, (4) interpretar los resultados y (5) validar la solución. En la propuesta de Fakhrunisa y Hasanah cada competencia tiene subcompetencias, por ejemplo, para el caso de la primera se tienen: (a) realizar suposiciones a partir del problema y simplificar la situación, (b) reconocer y nombrar las variables que influyen en la situación, (c) construir relaciones entre las variables, y (d) diferenciar información relevante de la irrelevante.

Asimismo, Pande y Chandrasekharan (2017) realizaron un análisis exhaustivo de la competencia de representación, en el cual discuten los diferentes posicionamientos teóricos propuestos. Los autores evidencian que la mayoría de dichos posicionamientos utiliza el término representación de manera ambigua, por lo que consideran la necesidad de una explicación teórica que integre el significado de representación y la competencia de representación, de modo que se tenga una mejor comprensión de estos términos. Los autores concluyen que para el estudio de las competencias se plantean modelos teóricos sin considerar los avances que se han realizado sobre la competencia matemática en general, y competencia de representación en particular.

Los trabajos previos son estudios representativos de la competencia matemática y cómo han originado propuestas de estudio para competencias específicas como la modelización, argumentación y representación; sin embargo, son escasos los que refieren a una caracterización de la competencia asociada a las ramas de las matemáticas como sería la algebraica, geométrica, probabilística, etc. En relación con esta última, el trabajo de Alsina y Vázquez (2016) propone una caracterización de la competencia probabilística articulada desde la propuesta de la OCDE. Los autores destacan la distinción de la competencia para los niveles elementales de educación infantil y primaria, de la competencia probabilística para el nivel de educación secundaria, y la definen como:

> *La capacidad de acceder, utilizar, interpretar y comunicar información e ideas relacionadas con la probabilidad, con el fin de participar y gestionar eficazmente las demandas de las funciones y tareas que implican incertidumbre y riesgo del mundo real; su desarrollo se aborda a partir de dos aspectos interrelacionados: los contextos de enseñanza-aprendizaje y las conexiones entre los conocimientos matemáticos.* (Alsina y Vázquez, 2016, p. 41)

Respecto al álgebra escolar, uno de los planteamientos sobre el desarrollo de la competencia en esta área de las matemáticas es el estudio de Syawahid (2019), quien toma como fundamento la propuesta de PISA para analizar la competencia algebraica en términos de los procesos matemáticos de formular, utilizar, interpretar y evaluar las matemáticas, así como de sus descriptores; además, propone dos problemas en el contexto del pensamiento funcional entendido como generalización de patrones numéricos. De igual forma, Angriani y Herman (2019) plantean una adaptación de estos procesos matemáticos para aplicarlos en diferentes contextos algebraicos, y explicitan sus indicadores (tabla 1).

Tabla 1
Procesos matemáticos relacionados con la competencia algebraica (Angriani y Herman, 2019)

Procesos algebraicos	Descriptores
Formular situaciones algebraicas.	Identificar múltiples variables y aspectos algebraicos que son importantes para las situaciones contextuales.
	Escribir estructuras algebraicas sobre situaciones contextuales.
	Escribir problemas según las situaciones que se conocen, se preguntan y las que se deben responder para facilitar su análisis matemático.
	Identificar restricciones y suposiciones dentro del contexto del problema y también del modelado y simplificaciones algebraicas.
Utilizar conceptos, hechos, procedimientos y razonamientos algebraicos.	Diseñar e implementar estrategias para encontrar soluciones matemáticas algebraicas.
	Utilizar la definición de matemáticas, reglas, algoritmos y estructuras matemáticas durante el proceso de resolución.
Interpretar y evaluar resultados algebraicos.	Interpretar los resultados de la resolución de problemas en un contexto real.
	Explicar las razones de una práctica sensata o irrazonable.
	Manifestar comprensión matemática basada en el contexto del problema.
	Evaluar la idoneidad de las soluciones matemáticas algebraicas en el contexto de los problemas del mundo real.

De los estudios previos se infiere que el concepto de competencia matemática es definido con pluralidad de matices (Abrantes, 2001), y aunque varias propuestas se derivan de los planteamientos de PISA, la mayoría lo hace de manera general en el sentido de que es posible aplicar un conjunto genérico de características a los contenidos de los diferentes dominios matemáticos (Säfström, 2013). Por ejemplo, en la propuesta de Angriani y Herman (2019) hay un énfasis en las situaciones contextuales, y los procesos matemáticos (formular, utilizar, interpretar y evaluar) representan acciones cuyos indicadores son amplios, por lo que debieran definirse de manera individual y con mayor profundidad (por ejemplo, los términos evaluar y evaluar la idoneidad resultan ambiguos en relación con lo que se espera que realice el estudiante). En este sentido coincidimos con Pande y Chandrasekharan (2017), acerca de la necesidad de explicaciones teóricas que permitan entender las implicaciones del desarrollo de competencias específicas, como lo es la algebraica.

De lo anterior se ha identificado, en el caso de la competencia algebraica, la necesidad de discutirla en términos de una caracterización que permita fomentar su desarrollo en los distintos niveles educativos. De esta manera, en el presente documento se aborda esta necesidad a través de un estudio cuyo objetivo es caracterizar la competencia algebraica de seis futuros profesores durante una experiencia formativa.

Marco de estudio para la competencia algebraica

Los elementos teóricos refieren a un marco de estudio para la competencia algebraica desarrollado en estudios propios (Aké y Olvera-Martínez, 2022). En este marco la competencia algebraica se articula en cuatro niveles y se toma como supuestos dos aspectos generales relacionados con la competencia matemática: el carácter pragmático y los procesos matemáticos.

El carácter pragmático en la competencia algebraica se define en el mismo sentido de Säfström (2013), “la competencia es algo en continuo desarrollo […], es construida en entornos y en la práctica” (p. 33). Dicha naturaleza pragmática orienta a la competencia hacia la acción (Niss y Højgaard, 2019; Solar et al., 2014) e involucra conocimiento y comprensión, interpretados como acciones y no como procesos mentales. En relación con esto último, Godino y colaboradores (Godino et al., 2012, 2017) mencionan que, desde el punto de vista pragmático, el conocimiento implica el uso competente de los objetos matemáticos, y la comprensión de estos se hace evidente cuando se relacionan de manera adecuada entre sí y se aplican a la resolución de problemas.

Los procesos matemáticos en la competencia algebraica se definen como las acciones específicas que los estudiantes deben evidenciar en el quehacer matemático (interpretar, resolver, aplicar, argumentar) y que en la literatura son denominados como procesos, capacidades, habilidades, etc. “El desarrollo de estos procesos matemáticos, componente esencial de las competencias, requiere la actuación del estudiante en contextos escolares y extraescolar (Solar et al., 2014, p. 63).

De esta manera, la competencia algebraica tiene una naturaleza pragmática, involucra conocimiento y comprensión, y la manifestación de acciones. Precisamente, la competencia algebraica, al estar orientada hacia la acción, permite retomar las acciones de resolver, interpretar y validar para caracterizarla. Por lo tanto, los cuatro niveles que la conforman quedan articulados por estas tres acciones: *resolver* (R)*, interpretar* (I) y *validar* (V) (figura 1), acciones que no se han estudiado como competencias específicas (competencia de argumentar, competencia de representar, competencia de modelizar, etc.). Las acciones difieren en cada uno de los niveles, a continuación, se describe cada una de ellas.

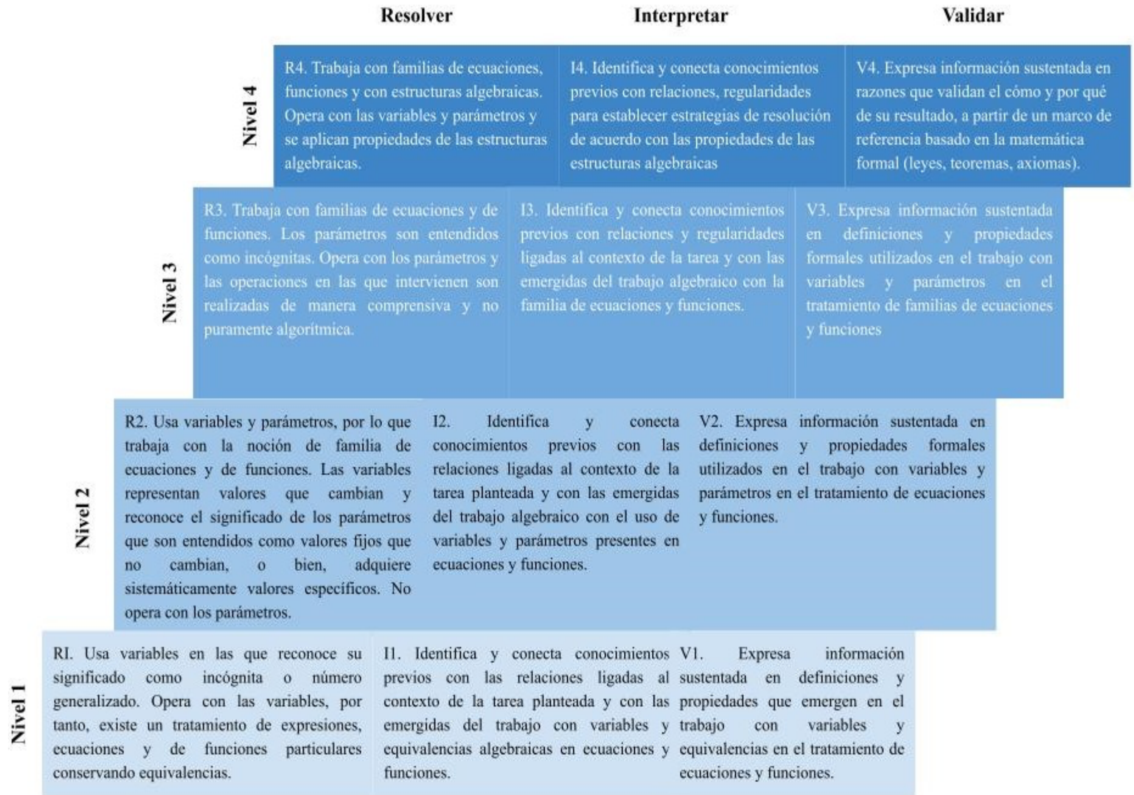


Figura 1. Niveles de competencia algebraica (Aké y Olvera-Martínez, 2022, p. 627)

La acción de resolver está caracteriza por los niveles de algebrización propuestos por Godino y colaboradores (Godino et al., 2015). En este sentido, la competencia algebraica implica un razonamiento algebraico que puede ser desarrollado de forma gradual a partir de los niveles de algebrización tres, cuatro, cinco y seis debido a que los primeros niveles (cero, uno y dos) están relacionados con la educación primaria y el álgebra temprana. Investigaciones sugieren que las inconsistencias en el razonamiento algebraico se mantienen a lo largo de la trayectoria educativa de los aprendices, desde la educación secundaria hasta los estudios universitarios (Booth et al., 2017; Filloy et al., 2008), por lo que su integración como parte una competencia algebraica se justifica, es decir, no se adquiere una competencia algebraica sin tener un razonamiento algebraico.

Por su parte, la acción de interpretar que se propone es coincidente con la postura de la NCTM (2009, 2010), implica una comprensión de la situación matemática, donde se reconocen las relaciones que emergen de la misma situación y se conecta con otros conocimientos. En cambio, la acción de validar propone dar sentido al propio razonamiento, evidenciar qué es lo que se ha llevado a cabo para explicar un resultado emergido de la resolución de un problema (Flores, 2007; Solar et al., 2014). La propuesta de validar se distingue de lo que otros autores definen: explicar, justificar, probar y argumentar (para mayor detalle de análisis ver Aké y Olvera-Martínez, 2022).

Aspectos metodológicos del estudio

El presente estudio parte de una investigación más amplia, tiene un enfoque cualitativo y exploratorio (Creswell, 2009), con un diseño de estudio de casos (Stake, 1999). La recolección de datos se llevó a cabo en México a través de hojas de trabajo individuales y grupales, así como grabaciones de audio. La información que se presenta en este artículo hace referencia a las hojas de trabajo individuales.

Muestra y contexto

La selección de la muestra es intencional, se realizó a partir de una convocatoria para participar en un seminario dirigido a futuros profesores de matemáticas y que tenía como objetivo analizar y resolver tareas algebraicas a partir del marco de estudio aquí propuesto. Durante el seminario asistieron seis futuros profesores de bachillerato, que en ese momento eran estudiantes de posgrado de una universidad mexicana. Se contó con el consentimiento informado de los seis participantes (P1, P2, P3, P4, P5 y P6) que, además, contaban con conocimientos relativos a la didáctica de las matemáticas, esto debido a que, durante la toma de datos, cursaban una maestría profesionalizante para tal fin.

En México, el desarrollo de la competencia está presente en el currículo de bachillerato (que incide en la formación de estudiantes de entre 16 y 18 años de edad) y refiere a la movilización e integración de habilidades, conocimientos y actitudes en un contexto específico. La competencia matemática, es denominada en este contexto como una competencia disciplinar básica y es común a todos los egresados de la educación media superior, es decir, se busca que todos los egresados de este nivel educativo tengan desarrollada esta competencia por lo que representa la base común de la formación disciplinar en el marco del Sistema Nacional de Bachillerato en México (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2017a).

Descripción de las tareas

En el seminario se les pidió a los seis participantes trabajar diversas tareas algebraicas, diseñadas acorde con el marco de estudio para la competencia algebraica; en particular, trabajaron dos de ellas (identificadas como tarea 1 y tarea 2), que son las que se muestran en el presente documento, ya que tienen mayor desarrollo matemático por parte de los informantes. Cada tarea involucra una situación diferente y tres consignas (1, 2 y 3). La tarea 1 hace referencia a la noción de función (figura 2), la cual en México se aborda en la educación secundaria (alumnos de 12 a 15 años de edad) hasta el nivel bachillerato (SEP, 2017b; Subsecretaría de Educación Media Superior, 2017).

Situación 1: Considera un plano, éste queda divido en dos regiones si se considera una recta que lo atraviese, en 4 regiones si se consideran 2 rectas y 7 regiones si se consideran 3 rectas.

Contesta:
1) ¿Cuál es el mayor número de regiones en que queda dividido si se consideran 10 rectas?
2) ¿Es posible determinar alguna regla general que permita interpretar el número de regiones máximo en que queda dividido el plano cuando se consideran n rectas? Si es posible desarrolla tus ideas y si no explica por qué.
3) ¿Por qué tus respuestas previas son correctas? Valida.

Figura 2. Tarea 1 centrada en funciones (Moreno, 1998)

La tarea 1 conlleva el reconocimiento de objetos algebraicos, como la noción de función y el de variable, que se definen a través de un proceso de construcción a partir del análisis y generalización de casos particulares. De acuerdo con el marco de estudio, en la tarea 1, la acción de resolver implica transitar de un lenguaje numérico (para el análisis de los casos particulares) al simbólico-literal (para expresar la regla general), con la finalidad de determinar el número de regiones con 10 rectas. De esta manera, se obtiene una regla general con la cual es posible obtener la respuesta de 56 regiones (consigna 1). En cambio, la acción de interpretar requiere la identificación del patrón y el análisis de las relaciones entre el número de rectas, el número de intersecciones entre éstas y el número de regiones para definir la regla general $f(n)=n(n+1)/2+1$ (consiga 2). Se distingue la consigna 1 de la 2 porque es posible dar respuesta a la primera a partir de casos particulares, es decir, sin el uso de conocimientos algebraicos formales. Por su parte, la acción de validar se da a través de las propiedades de la función y de la regla de correspondencia que subyace en ella. A partir de estas características la tarea promueve las acciones R1, I1, V1 (figura 1).

Por su parte, la tarea 2 involucra el sistema de ecuación lineal (figura 3), contenido que es abordado en el sistema educativo mexicano desde el nivel secundaria hasta bachillerato (SEP, 2017b; Subsecretaría de Educación Media Superior, 2017).

Situación 2: Analiza el sistema de ecuaciones lineales siguiente.

$$ax-3y=3$$
$$2x-by=7$$

Del sistema de ecuaciones previo:

1. ¿Cuál es la solución para el sistema de ecuaciones, es decir, cuáles son los valores de x y de y?
2. ¿Es posible determinar alguna regla para los parámetros a y b que permita interpretar la naturaleza del sistema de ecuaciones como compatible, compatible indeterminado o incompatible? Si es posible indícalo y si no es posible, explica por qué.
3. ¿Tus respuestas previas son correctas? Valida.

Figura 3. Tarea 2 centrada en sistema de ecuaciones lineales

La naturaleza de la tarea 2 implica el uso de parámetros y variables, y exige un análisis de los mismos dentro de la actividad algebraica. Para esta tarea, la acción de resolver alude a una familia de ecuaciones y conlleva operar con las variables considerando a los parámetros, así que existe un tratamiento en las expresiones para obtener los valores: $x=(21+3b)/(6+ab)$; $y=(6-7a)/(6+ab)$ (consigna 1). La tarea también involucra la acción de interpretar a través del análisis de las expresiones encontradas que permiten definir las condiciones para que el sistema tenga algún tipo de solución: el producto $ab\neq-6$ para que el sistema tenga una única solución; el producto $ab=6$ con $b=-7$, es decir, $a=6/7$ para que el sistema tenga infinitas soluciones. Finalmente, para que el sistema no tenga solución se debe cumplir que $ab=-6$ con b diferente a -7 (consigna 2). La acción de validar se realiza mediante las relaciones entre los parámetros y las propiedades del sistema de ecuaciones (consigna 3). Estas características implican acciones R2, I2, V2.

Resultados

A continuación, se expone las características de la competencia algebraica que los seis futuros profesores de matemáticas manifestaron al resolver las dos tareas y al dar solución a las consignas de cada una. Para ello, se toma como referente el análisis realizado sobre las hojas de trabajo individual, el cual se llevó a cabo en dos momentos. En el primero se identificaron las formas de solución de los futuros docentes determinando los conceptos algebraicos utilizados en la resolución, y se caracterizaron las interpretaciones y validaciones que ellos proporcionaron. Posteriormente, como segundo momento, se organizó la información recabada para establecer niveles de competencia algebraica en la actividad matemática desarrollada por los futuros docentes.

Tarea 1 sobre funciones

La consigna 1 solicitaba determinar el mayor número de regiones en que puede dividirse un plano si lo atraviesan 10 rectas. Esta consiga está orientada a la acción de resolver y permite analizar las formas en la que los participantes abordan la situación planteada. Los datos muestran que dos de los participantes (P4, P6) realizaron los procedimientos adecuados con casos particulares para determinar el número de regiones. En relación con esto, el futuro profesor P6 determinó el número de regiones representando el plano y tres rectas de manera visual y, posteriormente contando, para obtener las primeras regiones de las primeras rectas; luego, estableció una relación numérica que le permite asumir que para 10 rectas se tienen 56 regiones (figura 4).

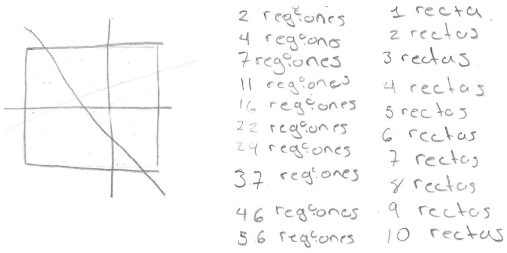


Figura 4. Método de solución por casos particulares correcto de P6

Por su parte, P3 y P5 proporcionan una respuesta parcialmente correcta a la consigna 1, ya que no determinan el número de regiones para 10 rectas. Estos futuros profesores no establecen una relación numérica, recurren a una representación visual del plano y las rectas y utilizan el método de conteo y casos particulares, pero solo hasta cierto número de rectas, de modo que determinan un número de regiones específicos (figura 5).

a) Método de solución de P3 b) Método de solución de P5

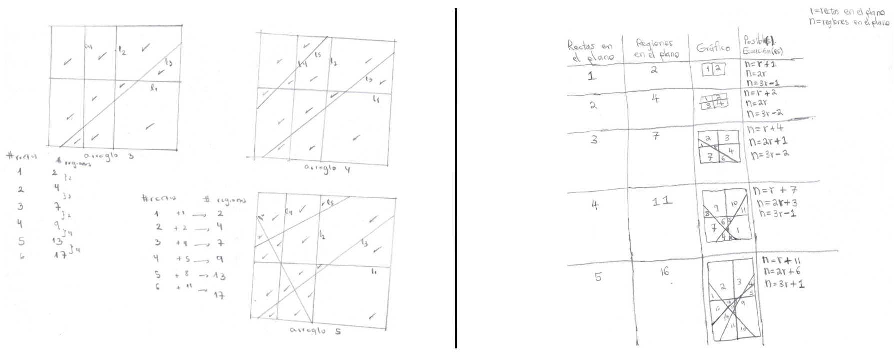


Figura 5. Método de solución por casos particulares parcialmente correcto de P3 y P5

En relación con la figura 5, el futuro profesor P5 intenta establecer relaciones recursivas (que denomina como ecuaciones) entre el número de rectas y el número de regiones, pero sin éxito. Este método de solución es lo que Lannin et al. (2006) denominan como estrategia recursiva, que consiste en usar el término anterior para encontrar el siguiente término. Los autores señalan que suele ser la primera estrategia utilizada por los estudiantes para hallar los primeros términos de una relación funcional, pero que no conduce a la generación de una regla general. Por otro lado, en P3 se advierte que realiza un número determinado de casos, en los que contabiliza las rectas en el plano y el número de regiones que se forman; sin embargo, al incrementar el número de rectas se le dificulta contar las regiones a partir de las figuras que realiza, de modo que identifica 17 regiones al determinar 6 rectas.

Por su parte, se advierte que P3, P4, P5 y P6 proponen dos columnas para relacionar el número de regiones con el número de rectas. En este sentido, Smith (2008) menciona que, en problemas relacionados con las funciones, los estudiantes se orientan creando una tabla para registrar las entradas correspondientes para los valores de las variables de interés, situación que también sucede con los futuros profesores. El resto de los docentes en formación (P1, P2) no dio respuesta correcta, ya que establecieron erróneamente la regla de correspondencia, posiblemente por el tipo de conteo que llevaron a cabo (figura 6). Por ejemplo, P1 comienza con un acomodo “ordenado” de las rectas, colocando diez de forma paralela y otras dos de manera perpendicular, y después las acomoda todas de distinta forma, pero limita su análisis al plano visible sin considerar que las rectas se pueden prolongar más a allá del plano representado.

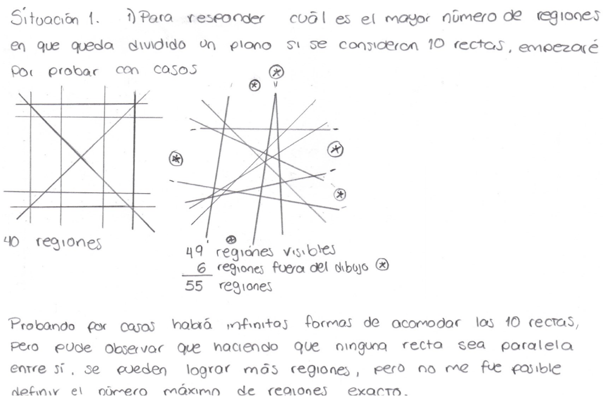


Figura 6. Método de solución por casos particulares incorrecto de P1

Se advierte que todos los participantes utilizaron una representación visual del plano y las rectas. Arcavi (2003) menciona que una representación visual es un elemento que resulta importante para la concreción de un problema verbal, esta conexión entre lo verbal y lo visual favorece el acercamiento a la notación simbólica ya que permite el análisis de la información.

En el caso de la consiga 2) que alude a la acción de interpretar, se solicitó determinar una regla general, el futuro profesor P4 logró generalizar a partir del estudio de las relaciones de los casos particulares. En la figura 7 se advierte que, a partir de trazar las rectas en el plano, P4 determinó la generalización de acuerdo con la expresión $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ para obtener el número de regiones, de modo que lo sustenta y demuestra al sustituir a n en la expresión para calcular el número de regiones para 10 rectas.

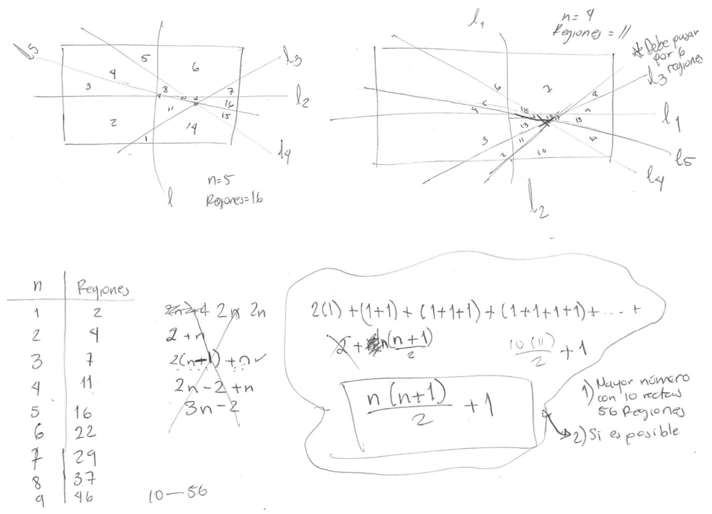


Figura 7. Interpretaciones correctas de P4 que permitieron la generalización

El futuro profesor P4 advirtió que el número de las regiones aumentaba en relación con los números naturales, lo que le permitió encontrar la función, pero sin utilizar una notación adecuada. Llama la atención las respuestas de P3 y P6. La interpretación que proporciona el futuro docente (P3) considera que existen infinitas formas de posicionar la recta en el plano, lo cual hace difícil de determinar el número de regiones que pueden definirse. Esto indica que P3 advierte que la posición en la que tracen las rectas influye en las cantidades de regiones que se forman. Por su parte, P6 interpreta de una forma generalizada a las rectas en el plano, utilizando la expresión $y=mx+b$ en lugar de casos particulares, para definir condiciones que permiten tener el mayor número de regiones. Estas condiciones asocian la influencia de los parámetros en la forma de trazar la recta en el plano y, por consiguiente, en las regiones que pueden formarse.

P3: Considero que no es posible determinar alguna regla general debido a que el número mayor de regiones depende de la manera en la que se tracen las rectas en el plano. Con respecto a esto pienso que debería haber una restricción de acuerdo con la forma en cómo se deben trazar las rectas en el plano.

P6: No me fue posible determinar una regla general para determinar el número de regiones máximo en el que se divide el plano con n rectas, lo único que pide determinar es que para las n rectas deben tener distintas pendientes para lograr dividir el plano en más regiones y si consideramos que las recta sean de la forma $y_i=m_ix + b_i$, el parámetro b_i conviene que sea diferente en las n rectas.

Por su parte, P1y P5 afirman que sí es posible encontrar una regla general para determinar el número de regiones dado el número de rectas que cortan el plano, pero consideran que no pueden hacerlo (figura 8). Tal vez, esto debido a una falta de conocimiento relacionado con la regla general $f(n)=n(n+1)/2+1$. El profesor en formación P2 no contestó la consigan 2.

Es posible determinar una regla general para interpretar el número de regiones máximo. A las regiones que existían anteriormente se suma el número de rectas existentes para obtener el máximo número de regiones

P1

Sí es posible determinar una regla general, pero me faltó tiempo para dilucidar una

P5

Figura 8. Interpretaciones incorrectas que no permitieron la generalización

Finalmente, las validaciones solicitadas en la consigna 3 tienen la misma tendencia encontradas en la tarea 1, es decir, los participantes de este estudio refieren a la comprobación de sus procedimientos (P3, P4, P5), por ejemplo:

P5: Considero que son correctos porque fueron validadas con el gráfico […]

En el caso del profesor en formación P6, aunque no determinó alguna regla general, en su validación estableció las condiciones para obtener el mayor número de regiones, como el valor de la pendiente de cada recta o si las rectas deben pasar o no por el mismo punto. Además, mientras que el resto de los participantes (P1, P2) no contestó la consiga 3, P6 muestra que el número de regiones está determinado por las maneras en que las rectas se intersecan entre sí:

P6: […] la razón por la que pienso que la pendiente y la ordenada al origen deben ser diferentes entre sí para cada recta, es porque sí hay algunas rectas con la misma pendiente o que pasen por el origen o el mismo punto entonces el plano se divide en menos regiones.

A partir de estos resultados, se evidencia que la tarea 1 representa un reto para los seis futuros docentes debido a que la mayoría no logra obtener una solución correcta (R1). De hecho, dos futuros profesores (P4, P6) desarrollaron la acción de resolver al determinar el número regiones dada 10 rectas en el plano. En este sentido se coincide con los hallazgos de Aké y Olvera-Martínez (2022), acerca de que las tareas que implican una generalización a partir del análisis e interpretaciones de casos particulares suelen ser difíciles para los futuros docentes. En el caso de las interpretaciones, solo P4 conecta regularidades para encontrar la regla general involucrada en la tarea 1 (I3), por su parte, P3 y P6 intentan conectar los parámetros de la ecuación de la recta con sus diferentes posiciones, pero sin éxito. El no encontrar una regla general obstaculizó la validación de las respuestas (V1), debido a que, además de proponer explicaciones como la de P6, la mayoría de los participantes (P3, P4, P5) referían principalmente a la descripción del procedimiento realizado para los casos particulares. En este sentido, los futuros docentes no evidenciaron una acción de validar (tabla 2).

Tabla 2
Características de las respuestas dadas por los profesores en la tarea 1

	Actividad algebraica manifestada	Tipo de respuesta		
		Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta
1)	Resuelve			
	Método de casos particulares con apoyo gráfico y tabular	P4; P6	P3; P5	P1; P2
2)	Interpreta los casos particulares para generalizar			
	Regla general	P4	P6; P3	P1; P2; P5
3)	Valida			
	No valida			P1; P2
	Explica con algún conocimiento previo		P6	
	Comprueba procedimentalmente		P3; P4; P5	

Tarea 2 sobre sistemas de ecuaciones lineales

La consigna 1 cuestiona sobre los valores de x e y a partir del sistema de ecuaciones lineales dado (figura 3), y está orientada a la acción de resolver; en este sentido, permite analizar las formas en la que los participantes abordan la situación planteada. Para esta consigna, los participantes P1, P2 y P3 realizaron los procedimientos adecuados para determinar las variables x e y, utilizaron métodos como el de sustitución y determinantes, en los cuales operaron con las variables. P1 utiliza el método de sustitución despejando la variable x de la expresión $ax+3y=3$y sustituyéndola en la expresión $2x-by=7$ (figura 9).

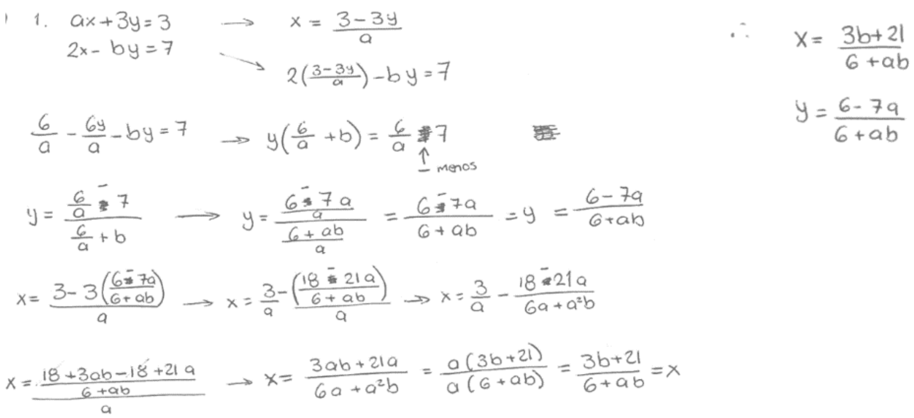


Figura 9. Método de sustitución dado por P1

Una respuesta parcialmente correcta es la de P6, quien obtuvo el valor de la variable *y* a partir de los parámetros *a* y *b,* sin poder determinar el valor de la variable *x*. Se puede observar en la figura 10 que P6, una vez encontrado *y,* sustituye el valor en la expresión *ax+3y=3* y, más que simplificarla, intenta otro tipo de procedimientos, en este caso, despeja el parámetro *b* del sistema de ecuaciones planteado, un procedimiento que no era necesario.

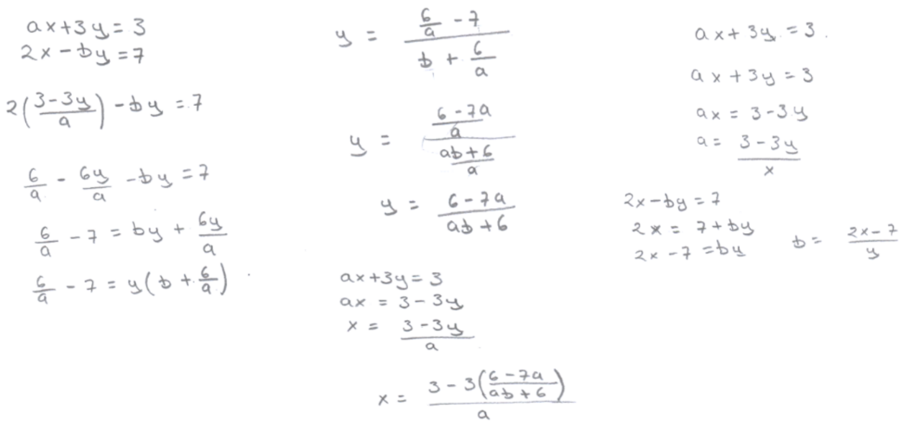
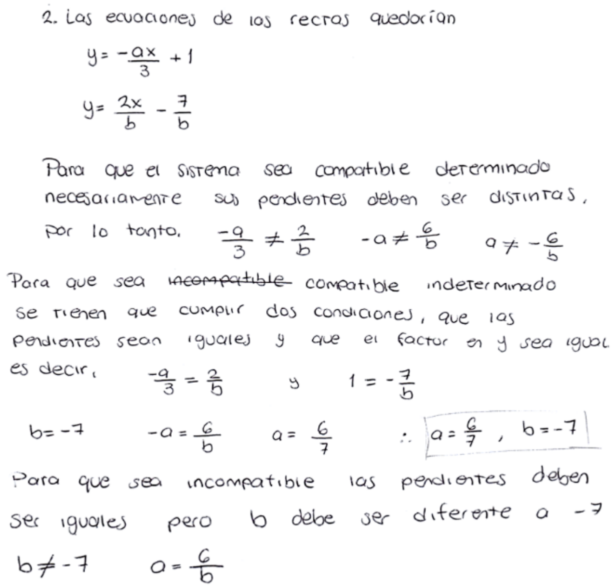


Figura 10. Método de sustitución parcialmente correcto de P6

Los futuros profesores P1, P2, P3 y P6 distinguen las variables y los parámetros inmersos en la tarea 2, conservan la equivalencia y operan con los símbolos sin dificultad; además, despejan los parámetros y obtienen expresiones equivalentes en las simplificaciones. Por el contrario, P4 y P5 no obtuvieron una respuesta correcta, es decir, no determinaron los valores de *x* e *y* en términos de los parámetros *a* y *b,* porque abordaron el planteamiento con casos particulares proporcionando valores a los parámetros. Estos futuros docentes aplicaron el método de Gauss-Jordan.

La consigna 2 cuestiona a los futuros profesores sobre la determinación de relaciones generales para los parámetros *a* y *b*, que permitiera interpretar al sistema de ecuaciones como compatible, compatible determinado o incompatible. Esta consiga está orientada a la acción de interpretar, de modo que permite analizar las relaciones que los futuros profesores establecen entre los parámetros y los diferentes tipos de solución de un sistema de ecuaciones. Para esta consigna, P1 determinó las relaciones que debieran cumplimentar a y b para que tengan solución única, soluciones infinitas y que no tenga solución (figura 11).


2. Las ecuaciones de los rectas quedarían

$$y = -\frac{ax}{3} + 1$$

$$y = \frac{2x}{b} - \frac{7}{b}$$

Para que el sistema sea compatible determinado necesariamente sus pendientes deben ser distintas, por lo tanto, $-\frac{a}{3} \neq \frac{2}{b}$ $\quad -a \neq \frac{6}{b}$ $\quad a \neq -\frac{6}{b}$

Para que sea ~~incompatible~~ compatible indeterminado se tienen que cumplir dos condiciones, que las pendientes sean iguales y que el factor en y sea igual es decir, $-\frac{a}{3} = \frac{2}{b}$ y $1 = -\frac{7}{b}$

$b=-7 \quad -a = \frac{6}{b} \quad a = \frac{6}{7} \quad \therefore \boxed{a = \frac{6}{7},\ b=-7}$

Para que sea incompatible las pendientes deben ser iguales pero b debe ser diferente a -7

$b \neq -7 \quad a = \frac{6}{b}$

Figura 11. Interpretaciones de los parámetros que realiza el P1 para la consigna 2

Se advierte que P1 articula su razonamiento considerando las expresiones para las pendientes de ambas rectas. En el caso de que el sistema no tenga solución P1 omite el signo en la expresión $a=6/b$. Sin embargo, las afirmaciones que sustentan las relaciones son correctas, ya que llega a la conclusión de que las pendientes deben ser iguales. Por su parte, P2 obtiene relaciones parciales entre a y b, su razonamiento considera que si el valor del determinante es diferente de cero entonces el sistema tiene una única solución o, bien, si el valor del determinante es igual a cero entonces el sistema tiene infinitas soluciones o no tiene (figura 12). En este caso, el análisis por determinante no le permite a P2 articular relaciones que lo lleven a distinguir cuándo un sistema tiene infinitas soluciones o cuándo no tiene solución (dicha información pudo obtenerse en el análisis de rango de la matriz y la matriz ampliada).

(2) si con el determinante del sist de ec si el det = 0 ⇒ No son compatible y no existe sol. o puede tener ∞ soluciones ; si el det.
det ≠ 0 ⇒ una unica solucion (compatible determinado).

$\begin{vmatrix} a & 3 \\ 2 & -b \end{vmatrix} = -ab-6$; si $-(a)(b) = +6 \Rightarrow$ Ninguna Sol. (no compatible o ∞ sol. (misma recta)

si $-ab-6 \neq 0 \Rightarrow$ 1 única Sol. o compatible determinada.

Figura 12. Interpretaciones de los parámetros que realiza P2 para la consigna 2

Finalmente, cuatro participantes (P3, P4, P5, P6) obtuvieron una respuesta incorrecta al referir únicamente a casos particulares y dar algunos valores de *a* y *b* para que el sistema tenga algún tipo de solución. Un ejemplo de ello son las interpretaciones dadas por P3 (figura 13).

Aunque es posible conocer los valores de x y de y asignando valores a los parametros a y b, no determine ninguna regla general, aunque por observación sé que para los valores de a = -2 y b = 3 el sistema es incompatible, ya que el sistema de ecuaciones no puede resolverse.

Figura 13. Interpretaciones de los parámetros que realiza el P3

Respecto a las interpretaciones, los seis futuros profesores advierten que las ecuaciones tal como se encuentran definidas representan a una familia de ecuaciones. Aunque no todos alcanzan a establecer las relaciones entre los parámetros y las formas de solución, sí interpretan que al asignar valores específicos a los parámetros se obtienen ecuaciones específicas.

Sobre las validaciones, en relación con la consigna 3, los participantes proporcionaron dos tipos: (a) explicaciones basadas en un conocimiento previo y que expresan que la corrección de las respuestas dadas depende de la sustitución de valores (por ejemplo, P3), y (b) comprobaciones que verifican con procedimientos que el sistema efectivamente tiene algún tipo de solución con determinados valores para los parámetros (dada por P5). En el caso de P3, expresa:

> *P3*: Considero que mis respuestas son válidas ya que al sustituir los valores de *x* e *y*, la igualdad de las ecuaciones se satisface.

A partir de estos resultados, los futuros profesores evidencian conocer el significado del "resolver un sistema de ecuaciones" asociado a encontrar los valores que satisfacen ambas expresiones, lo que permitió encontrar la solución a la tarea (R2) en el caso de P1, P2 y P3. Sin embargo, este significado obstaculizó encontrar las relaciones entre los parámetros para interpretar las soluciones. Dos futuros profesores (P1, P2) orientaron su análisis en las relaciones que podrían establecerse entre los parámetros y los diferentes tipos de solución de un sistema de ecuaciones (I2), el resto de los participantes (P3, P4, P5, P6) interpretan a partir de sus procedimientos, es decir, consideran que se generan ecuaciones distintas al asignar valores específicos a los parámetros. Por otro lado, la mayoría de las validaciones proporcionadas (V2) por el resto de los participantes referían a explicaciones, tal es el caso de P1 y P3, y sustituir valores como lo realizaron P2 y P5 (tabla 3).

Tabla 3
Características de las respuestas dadas por los seis futuros profesores en la Tarea 2

	Actividad algebraica manifestada	Tipo de respuesta		
		Correcta	Parcialmente correcta	Incorrecta
1)	Resuelve			
	Método de sustitución	P1; P2	P6	
	Método de determinantes	P3		
	Método de Gauss-Jordan			P4; P5
2)	Interpreta la relación entre a y b			
	Pendiente	P1		
	Determinante		P2	
	Casos particulares		P3; P4; P5; P6	
3)	Valida			
	No valida			P4; P6
	Explica con algún conocimiento previo		P1; P3	
	Comprueba procedimentalmente		P2; P5	

Los resultados de las tablas 2 y 3 indican que resolver las tareas implicó un reto para los futuros docentes. En el caso de las interpretaciones, permitieron conocer las formas en las que los participantes asocian los elementos que se movilizan en las tareas, algunos intentan conectar su trabajo procedimental, mientras que otros refieren a la conexión entre los conceptos involucrados como el de pendiente y parámetro, pero sin mucho éxito. La validación implicó un mayor reto para los participantes al identificar: (a) explicaciones de carácter descriptivo y cualitativo basadas en experiencias y conocimientos previos, y (b) comprobaciones o verificaciones a partir de definiciones y procedimientos no necesariamente comprendidos, sino que pueden estar mecanizados.

Estos hallazgos pueden ser interpretados desde el punto de vista de Harel y Sowder (1998), cuando aluden a esquemas de prueba empírico y convicción, ya que, por un lado, los seis futuros docentes expresan de manera descriptiva las etapas de los procedimientos que realizaron, por otro, aluden a que se obtendrá la respuesta, aunque no llevan a cabo el procedimiento como tal (validación de P3). Además, no se manifestaron validaciones fundamentadas a partir de un marco de referencia basado en la matemática y sus propiedades, en este sentido, más que expresar la información de manera descriptiva se debe proporcionar razones (Planas y Morera, 2012). Esto coincide con los resultados de Aké y Olvera-Martínez (2022), quienes desarrollaron su estudio con una muestra de alumnos universitarios. Los resultados de esta investigación indican que los estudiantes no tienen un primer nivel de competencia algebraica y que presentan dificultades para interpretar y validar sus propias respuestas. La implicación de este hecho se relaciona con lo que Hill et al. (2005) y Camarena (2015) mencionan cuando aluden a la relación entre el conocimiento de los docentes y los aprendizajes de los estudiantes.

Es importante mencionar que, en términos de competencia algebraica, no se trata de solo resolver en forma adecuada utilizando métodos algebraicos, sino que además es necesario interpretar las relaciones, regularidades y propiedades matemáticas derivadas de la tarea y expresar por qué funcionan para la obtención de respuestas asertivas en una acción de validación. La propuesta de marco de estudio aquí descrito y los resultados encontrados sugieren caracterizar el nivel de competencia algebraica con un grado de desarrollo de acuerdo con cada una de sus acciones (resolver, interpretar y validar), en el sentido de que los participantes del estudio no evidenciaron dichas acciones. Así, se puede denotar como una competencia: en vías de desarrollo si el futuro profesor es capaz de resolver la tarea; parcialmente desarrollada si es capaz de resolver e interpretar la tarea; y competencia desarrollada si es capaz de resolver, interpretar y validar. De esta manera, la competencia algebraica que tienen los seis futuros profesores en este estudio se presenta en niveles: Para la tarea 1, P4 y P6 tienen un primer nivel de competencia parcialmente desarrollada y en vías de desarrollo respectivamente, P1, P2, P3 y P5 no tienen un primer nivel de competencia. Por otro lado, en el caso de la tarea 2, P1 tiene un segundo nivel de competencia parcialmente desarrollada, P2 y P3 cuentan con un segundo nivel de competencia en vías de desarrollo y P4, P5 y P6 no cuentan con un segundo nivel de competencia (tabla 4).

Tabla 4
Competencia lograda en cada tarea y según la actividad algebraica manifestada

Grado de desarrollo	Actividad algebraica manifestada	Tarea 1. Funciones (Nivel de competencia 1)	Tarea 2. Sistema de ecuaciones (Nivel de competencia 2)
Desarrollada	Resuelve, interpreta y valida.		
Parcialmente desarrollada	Resuelve, interpreta y no valida.	P4	P1

Tabla 4
Competencia lograda en cada tarea y según la actividad algebraica manifestada

Grado de desarrollo	Actividad algebraica manifestada	Tarea 1. Funciones (Nivel de competencia 1)	Tarea 2. Sistema de ecuaciones (Nivel de competencia 2)
En vías de desarrollo	Resuelve, no interpreta y no valida.	P6	P2; P3
No desarrollada	No resuelve o resuelve parcialmente, no interpreta, no valida.	P1; P2; P3; P5	P4; P5; P6

La tarea 1 supuso un reto mayor para los participantes, pese a tener un nivel de competencia inferior al de la tarea 2, lo previo debido a las dificultades mostradas en el proceso de generalización inmerso en la obtención de regiones en el plano dado un determinado número de rectas. Además, moviliza la conexión entre la geometría y el álgebra ya que es en el contexto geométrico en donde los futuros docentes concretan la tarea expresada en forma verbal. La tarea 2, al tratarse de un sistema de ecuaciones dispone de procedimientos de resolución por lo que los futuros profesores manifestaron métodos de resolución, unos más sofisticados que otros. En ambas tareas es constante la manifestación de dificultades en los futuros profesores para la interpretación de los parámetros, determinación de una regla general y para expresar validaciones. Esto lleva a pensar que el modo en el que los futuros profesores aplican sus conocimientos depende de las tareas y problemas que les han sido planteados con anterioridad durante su formación. Por lo tanto, es necesario implementar tareas formativas para los futuros docentes que favorezcan el desarrollo de la competencia algebraica, pues ello permitiría que la desarrollen en sus futuros estudiantes.

Conclusiones y reflexiones finales

La literatura evidencia que el desarrollo de estudios sobre competencias relativas a las ramas de las matemáticas, como la competencia geométrica, probabilística, algebraica, etc., no han sido tan exhaustiva como los estudios realizados sobre competencia matemática. Como se ha mencionado previamente, autores como Säfström (2013) afirma que es difícil aplicar el conjunto de características que definen la competencia matemática a los diferentes dominios o ramas de las matemáticas ya que estas contienen particularidades específicas. De esta manera, la caracterización de la competencia algebraica a través de niveles y grados de desarrollo para cada nivel y los resultados obtenidos con estos seis profesores involucrados en el estudio tienen implicaciones importantes.

Una primera implicación está relacionada con el currículum de formación y el tipo de tareas que se les propone a los futuros docentes ya que son sustanciales para entretejer su conocimiento matemático y didáctico. Para Llinares (2012) las tareas en los programas de formación desempeñan un papel crucial en el aprendizaje del conocimiento matemático necesario para enseñar las matemáticas en situaciones prácticas. Por otro lado, la vinculación con la teoría sobre Educación Matemática, y su práctica docente también es relevante al momento de diseñar programas formativos. Aguayo (2004) menciona que, en México, la didáctica o el conocimiento que enseñan los formadores de profesores en los escenarios formativos "... aparece como una especie de consejos para la práctica, como técnicas sugeridas por el formador que se justifican por el uso que él hace de ellas [sin aludir a un marco de estudio articulado]" (p. 54).

Otra implicación relevante tiene que ver con los escenarios de formación para la enseñanza de las matemáticas. Estos escenarios juegan un papel importante en el desarrollo de la práctica profesional de los profesores de matemáticas y tienen implicaciones en el aprendizaje de sus estudiantes por lo que su diseño, implementación y evaluación requieren marcos de estudio congruentes. Lo que se presentó en este artículo va en esa dirección, los niveles de competencia algebraica son coherentes con los posicionamientos sobre competencia matemática. En este sentido, pensar en escenarios de formación tanto inicial como de desarrollo profesional requiere de consensos teóricos que permita a los docentes desarrollar su conocimiento del contenido matemático y didáctico. Wu (2018) menciona que se está lejos de alcanzar esos consensos, pues sostiene que:

> *La formación del profesorado en matemáticas no existe porque no se tienen (todavía) una ruta formativa para proporcionar a los profesores el conocimiento del contenido matemático que necesitan para alcanzar un nivel de competencia en la enseñanza de las matemáticas.* (p. 84)

Las afirmaciones previas, en el contexto mexicano es particularmente importante, dado que para ejercer la docencia en matemáticas no existe un criterio unificado. En el caso de la docencia a nivel bachillerato, los profesores suelen tener distintas profesiones afines a la matemática y sin que los cursos de especialización sean un requerimiento para la enseñanza. Scheiner et al. (2019) mencionan que los programas de formación de docentes de matemáticas deben diseñarse de manera coherente e integrada para ayudar a los profesores a combinar conocimientos de varias disciplinas, empezar por comprender qué y cómo se gesta el conocimiento y la competencia matemática es parte esencial. Lo que se propone en este artículo se focaliza en la competencia algebraica y contribuye a la generación de diseños instruccionales específicos para el álgebra escolar, pero también implica el estudio de diferentes tareas intramatemáticas y de las formas en la que los futuros docentes se aproximan a formas más sofisticadas de resolver, interpretar y validar para fortalecer su competencia algebraica.

Un punto importante de la propuesta de niveles de competencia es que, responde a la necesidad de proponer y establecer marcos que permitan una comprensión común de los principales pasos en el desarrollo de conocimientos de los profesores (Potari y Da Ponte, 2017). En esta misma línea, Solar et al. (2014) consideran que no hay consenso explícito en la noción de competencia matemática y que no se observa un modelo que explique la enseñanza y aprendizaje articulado en competencias. Por su parte, Niss y Jankvist (2022) coinciden en que existe una creciente emergencia de construcciones teóricas y perspectivas en la disciplina de Educación Matemática que muchas se encuentran en aislamiento, en el sentido, que se utilizan de forma muy particular en determinadas investigaciones y que la noción de competencia matemática no es la excepción. De esta manera, este trabajo presenta un avance, y una aportación, en la articulación de la noción de competencia algebraica y abre perspectivas futuras sobre el estudio profundo y sistemático de competencias específicas sobre las ramas de las matemáticas (en este caso, el álgebra) con muestras más amplias.

Finalmente, supone una aproximación como propuesta operativa que permitiría a los profesores de matemáticas, tanto en formación como en servicio, proponer tareas para desarrollar esta competencia en sus estudiantes o futuros estudiantes. En este sentido, las tareas cobran principal relevancia debido a que son el fundamento del aprendizaje matemático (García, 2019), por lo que los elementos para su diseño deben formar parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Esto implica considerar a la propuesta de niveles de competencia algebraica como un recurso para los formadores de profesores de matemáticas.

Referencias

Aké, L. P. y Olvera-Martínez, M. C. (2022). Towards a characterization of algebraic competence: An exploratory study with students. *Uniciencia, 36*(1), 621-638. https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.40

Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: Options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 125-143. https://doi.org/10.1023/A:1014589220323

Aguayo, L. (2004). El "saber didáctico" en las escuelas normales. Un análisis de las praxeologías de formación. *Educación Matemática, 16(*3), 29-57. https://doi.org/10.24844/EM1603.02

Alsina, Á. y Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: Elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *48*, 41-58.

Angriani, V. y Herman, T. (2019). Algebraic literacy as the sustainable development skills. *International Conference on Mathematics and Science Education, 4,*105-109.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 215-241. https://doi.org/10.1023/A:1024312321077

Ávila, A. (2016). La investigación en educación matemática en México: una mirada a 40 años de trabajo. *Educación Matemática, 28*(3), 31-59. https://doi.org/10.24844/EM2803.02

Ávila, A., Carrasco-Altamirano, A., Gómez-Galindo, A., Guerra, M., López-Bonilla, G. y Ramírez, J. L. (Eds.). (2013). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México (2002-2011): Matemáticas, Ciencias naturales, lenguaje y lengua extranjera*. Consejo Mexicano de Investigación Educativa, A.C.

Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 5*(3), 1-10.

Blum, W. (2011). Can Modelling Be Taught and Learnt? Some answers from empirical research. En G. Kaiser, W. Blum, F. R., Borromeo, y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling. International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling* (Vol. 1, pp. 15-30). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-0910-2_3

Booth, J. L., McGinn, K. M., Barbieri, C. y Young, L. K. (2017). Misconceptions and learning algebra. En S. Stewart (Ed.), *And the rest is just algebra* (pp. 63-78). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-45053-7

Borko, H., Frykholm, J. A., Pittman, M., Eiteljorg, E., Nelson, M., Jacobs, J., Clark, K. K. y Schneider, C. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), *37*(1), 43-52.

Camarena, P. (2015). Educación matemática en México: investigación y práctica docente. En X. Martínez, y P. Camarena (Eds.), *Educación Matemática en el Siglo XXI* (pp. 191-216). Instituto Politécnico Nacional.

Caraballo, R., Rico, L. y Lupiánez, J. (2013). Cambios conceptuales en el marco teórico de PISA: el caso de las matemáticas. *Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado, 17*(2), 225-241.

Cardoso, E. (2019). Las actitudes hacia las matemáticas de estudiantes de formación inicial de profesorado en México. *Revista de psicología y ciencias del comportamiento de la Unidad Académica de Ciencias Jurídicas y Sociales, 10*(1), 87-103. https://doi.org/10.29059/rpcc.20190602-83

Creswell, J. W. (2009). *Research Design: qualitative, quantitative, and mixed methods approach* (3.ª ed.). Sage.

Da Ponte, J. y Chapman, O. (2016) Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En L. English, y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in Matemathics* (pp. 275-296). Roudledge.

Doerr, H. M. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. En S. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 267-290). Kluwer. https://doi.org/10.1007/1-4020-8131-6_10

Dolores, C. (2014). La formación profesional de los profesores de matemáticas. En C. Dolores, M. García, J. Hernández, y L. Sosa (Eds.), *Matemática educativa: la formación de profesores* (pp. 13-25). Díaz de Santos.

Fakhrunisa, F. y Hasanah, A. (2020). Students' algebraic thinking: A study of mathematical modelling competencies. *Journal of Physics: Conference Series, 1521*(3), 1-7. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1521/3/032077

Filloy, E. Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theorical and empirical approach.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-71254-3

Flores, Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática, 19*(1), 63-98. https://doi.org/10.30827/pna.v1i4.6207

García, F. (2019). Introducción al diseño de tareas en educación matemática: Una diversidad de marcos teóricos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 15,* 1-4. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i15.264

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática - UNION*, *20,* 13-31.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los co-nocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113. https:// doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D., Neto, T., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 8,* 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 1-21. https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p1

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. H. Shoenfeld, J. Kaput, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education. Issues in Mathematics Education* (Vol. 7, pp. 234-283). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/cbmath/007/07

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406. https://doi.org/10.3102/00028312042002371

Hossain, S., Mendick, H. y Adler, J. (2013). Troubling "understanding mathematics in-depth": Its role in the identity work of student-teachers in

England. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 35-48. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9474-6

Jaworski, B. y Wood, T. (2008). *The mathematics teacher educator as a developing professional*. Sense Publishers.

Lannin, J. K., Barker, D. D. y Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding? *Journal of Mathematical Behavior*, *25,* 299-317. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.11.004

Leikin, R. y Zazkis, R. (Eds.). (2010). *Learning through teaching mathematics*. Springer.

Llinares, S. (2012). Del análisis de la práctica al diseño de tareas matemáticas para la formación de maestros. En N. Planas (Ed.), *Teoría, Crítica y Práctica de la Educación Matemática* (pp. 99-115). Grao.

Montes, M., Contreras, L. C. y Carrillo, J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, N. Climent, y A. Estepa (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 404-410). SEIEM. https://doi.org/10.13140/2.1.3277.5201

Moreno, M (1998). *Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria. Manual para la formación inicial para el profesorado de secundaria*. Universidad de Almería.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and making sense.* National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics (2010). *Focus in high school mathematics: Reasoning and making sense in Algebra.* National Council of Teachers of Mathematics.

Navarrete-Cazales, Z. (2015). Formación de profesores en las Escuelas Normales de México. Siglo XX. *Revista Historia de la Educación Latinoamericana*, *17*(25), 17-34. https://doi.org/10.19053/01227238.3805

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R. y Villa-Ochoa, J. (2016). Survey team on: conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. *ZDM Mathematics Education, 48,* 611-632. https://doi.org/10.1007/s11858-016-0799-3

Niss, M. y Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics, 102,* 9-28. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09903-9

Niss, M. y Jankvist, U. T. (2022). On the mathematical competencies framework and its potentials for connecting with other theoretical perspectives. En U. T. Jankvist, y E. Geraniou (Eds.), *Mathematical competencies in the digital era* (pp. 15-38). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-10141-0_2

Organization for Economic Cooperation and Development (OECD). (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework: mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. OECD Publishing. https://doi.org/10.1787/19963777

Pande, P. y Chandrasekharan, S. (2017). Representational competence: Towards a distributed and embodied cognition account. *Studies in Science Education, 53*(1), 1-43. https://doi.org/10.1080/03057267.2017.1248627

Planas, N. y Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: Dos ejemplos para la formación del profesorado. En E. Badillo, L. García, A. Marbá, y M. Briceño (Eds.), *El desarrollo de competencias en las clases de ciencias y matemáticas* (pp. 275-300). Universidad de los Andes.

Potari D. y Da Ponte J. P. (2017). Current research on prospective secondary mathematics teachers' knowledge. En M. Strutchens, R. Huang, L. Losano, D. Potari, J. Da Ponte, M. Trindade-Cyrino, y R. Zbiek (Eds.), *The mathematics education of prospective secondary teachers around the world* (pp. 3-15). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-38965-3_2

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47-66. https://doi.org/10.30827/pna.v1i2.6215

Säfström, A. I. (2013). *Exercising mathematical competence: Practising representation theory and representing mathematical practice* [Tesis doctoral. Göteborgs Universitet].

Santibáñez, L. (2007). Entre dicho y hecho. Formación y actualización de maestros de secundaria en México. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *12*(32), 305-335.

Secretaria de Educación Pública (SEP). (2017a). *Matemáticas. Planes de estudio de referencia del marco curricular común de la Educación Media Superior*. SEP.

Secretaría de Educación Pública (2017b). *Matemáticas. Educación secundaria plan y programas de estudio, orientaciones didácticas y sugerencias de evaluación.* SEP.

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo J. y Pino-Fan, L. (2019). What makes mathematics teacher knowledge specialized? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education 17,* 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.1177/104438945603700906

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher, y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. Lawrence Erlbaum Associates/Taylor y Francis Group and National Council of Teachers of Mathematics.

Solar, H., García, B., Rojas, F. y Coronado, A. (2014). Propuesta de un modelo de competencia matemática como articulador entre el currículo, la formación de profesores y el aprendizaje de los estudiantes. *Educación Matemática, 26*(2), 33-67.

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS). (2017). *Matemáticas 1. Programa de estudios. Primer semestre.* SEMS.

Syawahid, M. (2019). Mathematical literacy in algebra reasoning. International *Journal of Insight for Mathematics Teaching, 2*(1), 33-46.

Wu, H. (2018). The content knowledge mathematics teachers need. En Y. Li, W. Lewis, y J. Madden (Eds.), *Mathematics matters in education. Advances in STEM education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-61434-2_4

Lilia P. Aké
Universidad Autónoma de Querétaro, México
lake86@gmail.com

David A. Páez
Universidad Autónoma de Aguascalientes, México
david.paez@edu.uaa.mx

Recibido: Octubre de 2022. Aceptado: Julio de 2023
doi: 10.30827/pna.v18i3.26260

ISSN: 1887-3987

TOWARDS A CHARACTERIZATION ALGEBRAIC COMPETENCE ON TEACHERS' TRAINING

Lilia P. Aké and David A. Páez

This study focuses on discussing algebraic competence to characterize the mathematical activity of prospective mathematics teachers. Specifically, the levels of algebraic competence exhibited by a group of six high school teachers' training, when addressing tasks of an algebraic nature, are examined.

Theoretically, four levels of algebraic competence, which is composed of three stages (solving, interpreting, and validating), are proposed. First, solving is based on the algebraization levels. Interpreting implies an understanding of the mathematical situation, where the relationships that emerge from the same situation are recognized and connected with another knowledge. Finally, validating proposes to give meaning to one's own reasoning and to show what has been carried out to explain a result obtained by resolving a problem.

This study is of a qualitative and exploratory nature. It was conducted in Mexico and its participants were convenience chosen. For data collection, two tasks that favored the development of algebraic competence were used and, for data analysis, the four levels of competence were regarded as a study framework.

The results show that the prospective teacher have algebraic competence in development process, since they can solve the problem posed in each task, but most of them have difficulty interpreting the parameters, determining a general rule and validating their mathematical activity. This leads us to think that the way in which future teachers apply their knowledge depends on the tasks and problems that have been posed to them previously during their training. Therefore, the mathematics teacher training curriculum must emphasize posing algebraic tasks where ways of interpreting and validating are mobilized to favor algebraic competence in the prospective high school teacher.

The levels of algebraic competence represent an approach that allows mathematics teachers, both in training and in service, to propose tasks that develop this competence in current or future students. This causes us to consider task design part of the mathematics teachers' specialized knowledge and to propose levels of algebraic competence as a resource for the mathematics teacher educators.