LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA ESCUELA. ALGUNAS REFLEXIONES

DrC. Juan E. Nápoles Valdés
MsC. Miguel Cruz Ramírez

Preliminares. En el otoño de 1958, la Organización de Cooperación Económica Europea, congregó en Francia a representantes de 20 países, quienes dedicaron dos semanas al estudio del programa total de Matemáticas de este país, desde L'École Maternelle (3-5 años), hasta L'École Normal Supérieure (de formación de profesores). En conjunto, el programa resultó ser tradicional en extremo, riguroso, selectivo e incapaz de proporcionar el personal necesario, con preparación adecuada en Matemática, para satisfacer las necesidades económicas del país. Y se estuvo de acuerdo que, lo dicho respecto a Francia, era aplicable a casi todos los países europeos.

El Seminario de Royaumont, celebrado en noviembre del año siguiente, sentó, en el informe "New Thinking in School Mathematics", las bases de lo que debía ser un programa de Matemática escolar, genuinamente "moderno". Sin embargo, los resultados de estas "nuevas matemáticas", por diferentes motivos, no fueron los esperados. Los alumnos no solamente no conseguían dominar las matemáticas abstractas del nuevo plan de estudios, sino que tampoco conseguían dominar las operaciones básicas.

Como consecuencia de esto, a finales de la década de los 60, surgió un fuerte rechazo a esta "nueva ola" y apareció el movimiento "de vuelta al dominio de las técnicas básicas". Dicho movimiento, que continuó a lo largo de la siguiente década, puso el énfasis en los ejercicios y en la repetición. Se centró en el dominio de operaciones y algoritmos básicos, suponiéndolos fundamento de estudios posteriores. Sin embargo, se comprobó que dominar lo fundamental no era suficiente. Los alumnos tenían que ser capaces de poder pensar matemáticamente y de poder resolver problemas. Como resultado de todo esto, nació el movimiento en favor de la enseñanza por "resolución de problemas".

Existen intentos en el sentido de entender y enseñar los tipos de habilidades requeridos para resolver problemas de Matemática. Esta clase de trabajo, se basa en gran medida en la obra de George Polya, y en su clasificación de estrategias en la resolución de problemas, conocido como el *Método Heurístico*. La obra de Polya sobre el tema, con sus libros **"How to solve it"**, **"Mathematical Discovery"** y **"Mathematics and Plausible Reasoning"** principalmente, sentó las bases para el estudio de las estrategias heurísticas en la resolución de problemas.

Quizás para algunos podrán parecer exagerados estos planteamientos en relación con las dificultades que históricamente ha experimentado la didáctica de esta ciencia, pero lo cierto es que no distan mucho de lo descrito recientemente por los expertos del proyecto iberoamericano IBERCIMA sobre la problemática en cuestión. En este sentido han señalado: *"Un análisis elemental sobre la situación general de la enseñanza de la Matemática y las ciencias demuestra que ésta es muy deficiente en la mayoría de los países del área..."* (Del Río et al, 1992).

Podemos asegurar que actualmente se experimenta una sensible situación de cambio en los principios metodológicos de la didáctica específica de esta asignatura, motivada por estudios que han penetrado inclusive en la ontología y gnoseología de la Matemática, su enseñanza y su aprendizaje. Es tangible el esfuerzo por introducir desde pregrado las ideas de avanzada que defienden abiertamente la metáfora del profesor investigador, sustentando una postura dinámica de la Matemática, que lleva aparejada como metodología de la enseñanza, la de "resolución de problemas".

Hoy día, parece ser que la difícil etapa de elaboración de programas de estudio y su correspondiente literatura ha sido superada. Dan testimonio de esto el tangible incremento, tanto del número de investigadores e investigaciones pedagógicas, como de la calidad de las mismas, que en el ámbito de la Didáctica de la Matemática están orientadas hacia el trabajo con los métodos y procedimientos de enseñanza. Su fin es único: lograr una enseñanza eficiente y de avanzada, que estimule el desarrollo del pensamiento lógico y la creatividad.

Indudablemente las ciencias matemáticas, así como el ejercicio de su enseñanza, siempre han tenido como principal medio y fin los problemas matemáticos. P. Halmos (1980) no puede ser más elocuente al respecto, cuando afirma que los problemas son *"el corazón de la Matemática"*. La resolución de problemas entraña el engranaje de disímiles recursos cognoscitivos por parte del resolutor. Para este último resolver un problema debe servir no sólo de un simple entrenamiento intelectual, sino también de un sano y agradable entretenimiento. ¿Pero acaso sucede así con cualquier problema?.

En este trabajo, presentamos algunas sugerencias y ejemplos de cómo utilizar la "resolución de problemas" en nuestras clases, sin caer en extremos perjudiciales al trabajo creativo e independiente en el aula, enfatizando los procedimientos heurísticos de Polya, mejorados con los nuevos resultados en esta dirección.

Realmente el propio concepto de problema es ya, por así decirlo, un nudo gordiano. Nosotros antes de manipular algunos términos (problema, ejercicio, resolver un problema, etc.), realizaremos una breve discusión sobre la concepción que tenemos sobre los mismos.

¿Qué son los problemas matemáticos?. Con relativa frecuencia los docentes esgrimimos los términos ejercicio y problema, a veces tan a la ligera que con ambos identificamos, indistintamente, el mismo concepto. Para evitar confusiones queremos precisar qué entendemos en cada caso; asumiendo las caracterizaciones y clasificaciones más plausibles en el contexto de la didáctica específica de la Matemática.

El trabajo con ejercicios no sólo constituye el medio fundamental para la realización de los objetivos de la enseñanza de la Matemática, sino también el instrumento adecuado (y quizás el único) para la medición del rendimiento de los estudiantes. H. Müller (1987) ha planteado que el éxito de la enseñanza de la Matemática depende esencialmente de cuáles ejercicios se plantean, en qué sucesión y con qué función didáctica, y cómo el profesor dirige su proceso de resolución. Según varios autores, un ejercicio es una exigencia que propicia la realización de acciones, solución de situaciones, deducción de relaciones, cálculo, etcétera (Ballester et al, 1992).

De cada acción deben precisarse el objetivo, que nos moverá a transformar una situación inicial (premisa) en otra final (tesis); el contenido, que comprende los tipos de acciones (identificar, comparar, clasificar, fundamentar, etcétera) y por otra parte, el objeto de las acciones (conceptos, proposiciones, procedimientos algorítmicos), la correspondencia entre situaciones extramatemáticas y matemáticas, los procedimientos heurísticos (principios, estrategias, reglas) y los medios heurísticos auxiliares. También es necesario precisar las condiciones para las acciones, es decir, valorar el grado de dificultad que presenta el ejercicio según las exigencias que este plantee al alumno.

Existen muchas clasificaciones de ejercicios, por ejemplo, L. Blanco establece una comparación entre las dadas por T. Butts (1980), R. Charles y F. Lester (1982), así como la de R. Borasi (1986) (véase Blanco, 1991, pp. 61-66); pero no es objetivo nuestro ensayar una discusión al respecto. Nos limitaremos a examinar la más reciente, pues desde nuestro punto de vista, es la más completa de las tres.

Borasi denomina ejercicios a aquellas tareas que pretenden desarrollar algún tipo de algoritmo. Si se trata de un texto formulado con precisión, donde aparecen todos los datos necesarios para obtener la solución, entonces la tarea se denomina

"Word-Problem". Cuando el contexto descubre el potencial recreativo de la Matemática, obligando al resolutor a ser flexible y considerar varias perspectivas, la tarea se denomina "Problema Puzzle". En este último caso la formulación puede resultar engañosa, y la solución no tiene necesariamente que suponer procesos matemáticos. Otra tarea que considera este autor es la "Prueba de Conjeturas" refiriéndose, por ejemplo, a la demostración de un teorema o de cierta propiedad matemática. También habla de "Problemas de la Vida Real" que supone tres procesos básicos: la creación de un modelo matemático de la situación, la aplicación de técnicas matemáticas al modelo, y la traducción a la situación real para analizar su validez. Borasi también destaca las "Situaciones Problémicas", en las cuales el sujeto se enfrenta ante un nuevo resultado matemático sin disponer de toda la información necesaria. En las situaciones problémicas la formulación es regularmente vaga, puesto que en este caso se trata de establecer nuevas conjeturas; los métodos de aproximación suelen ser diversos; y la exploración del contexto, así como las sucesivas formulaciones del problema, son fundamentales. Por último Borasi considera aquellas tareas que facilitan la formulación de conjeturas por parte del alumno, se trata de las "Situaciones". Blanco aporta el siguiente ejemplo de situación:

Consideremos algunas triplas pitagóricas: (3, 4, 5); (5, 12, 13); (8, 15, 17);... ¿Cumplen alguna regularidad?.

A esta interrogante puede seguir toda una nebulosa de ideas. En efecto, podría conjeturarse que en cualquier trío:

a) existe un múltiplo de 3,

b) existe un múltiplo de 5,

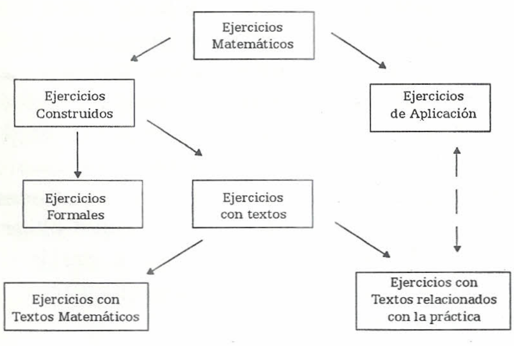
c) un número es par y dos son impares,

d) un número siempre es primo, etcétera.

Está claro que las proposiciones a) y b) son verdaderas. En el caso de c) la conjetura no siempre es cierta, pero subsiste para el caso de triplas primitivas. Si se consideran algunos casos más, pronto d) será descartada, aún para ternas primas entre sí (Sierpinski, 1964).

Como podemos observar, la clasificación aducida por Borasi no solo es interesante, sino que también cubre una amalgama de ejercicios matemáticos. Sin embargo, queremos realizar algunas observaciones. En primer lugar, no queda muy clara la base para la división del concepto, aún cuando sabemos que en estos casos suele ser poco precisa. Así, por ejemplo, podemos encontrar un sinnúmero de "Word-Problems" cuyo propósito fundamental consiste en desarrollar algún tipo de algoritmo, o bien cuya formulación es difícil de interpretar a causa de la complejidad semántica, llegando a ser un "puzzle"; y más aún, ¿acaso un "Word-Problem" no puede ser un problema de la vida real?. En segundo lugar, no queda clara la diferencia entre ejercicios y problemas; tal parece que los más abundantes en la enseñanza de la Matemática son los segundos y ciertamente esto no es así. No podemos negar la valía de los ejercicios destinados a estimular la identificación y fijación de los conceptos, ni tampoco los que estimulan el desarrollo de ciertas habilidades.

W. Jungk (1986) elaboró una clasificación de los ejercicios tomando como base el grado de abstracción en el reflejo de los elementos y relaciones, así como el tipo de reflejo que se realiza. Como superconcepto, este autor eligió el concepto ejercicios matemáticos planteados a los alumnos; a este lo subdivide en dos conceptos subordinados: ejercicios de aplicación (tienen su origen en la práctica) y ejercicios construidos (aquellos que se conciben con fines didácticos; o sea, para ejercitar, profundizar, aplicar, asegurar las condiciones previas, entre otras). Los ejercicios construidos sufren a su vez otra división. Por una parte aparecen los ejercicios formales, donde los "chunks" de G. A. Miller (1956) aparecen declarados; o sea, al entrar en contacto con ellos, el estudiante identifica inmediatamente el tipo de ejercicio (una ecuación, un sistema, etcétera). Por otra parte aparecen los ejercicios con textos conformados por aquellos cuyo texto es puramente matemático o bien se relaciona con la práctica.



Con relación a su clasificación, el propio Jungk señala que las fronteras existentes entre los distintos grupos son movibles. Por ejemplo, tanto en los ejercicios con textos relacionados con la práctica, como en los de aplicación, el ejercicio matemático no desempeña el papel de primer lugar. Por su parte, los ejercicios con textos matemáticos y los de textos relacionados con la práctica no son conceptos completamente disjuntos, sino que también se solapan ya que los primeros suelen ser "formas preliminares" de los segundos; además, en ambos casos debe analizarse inicialmente el texto para hallar el modelo matemático (cf. Jungk, 1986, pp. 109-110, y considere las líneas discontinuas en la figura anterior). En lo adelante asumiremos la clasificación de este autor.

Es notable que algunos autores han efectuado interesantes clasificaciones, que nos conducen a diferenciar los ejercicios atendiendo al dominio matemático a que pertenecen. Así, por ejemplo, F. González habla de "ejercicios geométricos" (1997, pág. 20); N. Malara habla de ejercicios aritméticos de argumentación, inclusive los clasifica en ejercicios de razonamiento condicional, de refutación de conjeturas, de análisis crítico de fórmulas que expresan el procedimiento de solución de un problema, ejercicios para el análisis crítico de ecuaciones, y también de situaciones preparatorias para la demostración (1997, pág. 88). A.S. Posamentier y Jay Stepelman, hablan de Problemas Algebraicos (Geométricos) estándar (ver Posamentier and Stepelman, 1996); Hans Humenberger y Hans-Christian Reichel prefieren hablar de "Problemas en el contexto de Teorías Matemáticas Especiales", en los cuales incluyen Problemas concernientes a números racionales e irracionales, Problemas concernientes a números complejos, etc. (ver Humenberger and Reichel, 1996). Por su parte, L. Campistrous y C. Rizo (1996, pp. 20-28) al tratar los ejercicios para el desarrollo de la habilidad para construir esquemas, tratan cuatro fundamentalmente: las situaciones y problemas sin datos numéricos que requieren de la elaboración de un esquema, los que a determinada formulación se le hacen corresponder varios esquemas, los que exigen de la elaboración de ejercicios a partir de esquemas dados, y los que conducen a transformar esquemas.

Partiendo del concepto de ejercicio, podemos caracterizar los que verdaderamente se consideran problemas. Según A. F. Labarrere (1996) algunos autores conceptualizan el concepto de problema en términos de contradicción que debe ser resuelta, de déficit y búsqueda de información, de transformación de situaciones, etcétera. Es notable que ya en el siglo XVII el matemático y filósofo francés R. Descartes, en la regla 12 de sus **"Reglas para la dirección del espíritu"**, afirmaba: "*Yo no supongo más que los datos y un problema. Sólo en esto imitamos a los dialécticos: así como para enseñar las formas de los silogismos ellos suponen conocidos sus términos o materia, de la misma manera nosotros exigimos previamente que el problema sea previamente comprendido. Pero no distinguimos, como ellos, dos extremos y un medio, sino que consideramos el problema entero así: 1ro, en todo problema debe haber algo desconocido, pues de lo contrario no habría problema; 2do, ese algo debe estar designado de alguna manera, pues de otro modo no habría razón para investigar ese algo y no otra cosa; 3ro, ese algo no puede estar designado sino por algo conocido*".

Por nuestra parte, no coincidimos con Jungk (1986, pág. 110) en asumir los ejercicios con textos y los de aplicación como problemas. Dos años más tarde, en 1983, P. A. House et al se expresaban así: "*La definición común de problema matemático es una situación que supone una meta para ser alcanzada, existen obstáculos para alcanzar ese objetivo, requiere deliberación, y se parte del conocimiento del algoritmo útil para resolver el problema. La situación es usualmente cuantitativa o requiere técnicas matemáticas para su solución, y debe ser aceptado como problema por alguien antes de que pueda ser llamado problema*" (pág. 10). También Labarrere (1996, pág. 6) ha señalado que "*...un problema es determinada situación en la cual existen nexos, relaciones, cualidades de y entre los objetos que no son accesibles directa e indirectamente a la persona; (...) es toda relación en la cual hay algo oculto para el sujeto, que este se esfuerza por hallar*". Concretando, para que una situación se denomine problema es necesario que:

• exista una persona que desea resolverla (resolutor),

• exista un estado inicial y un estado final (meta a alcanzar),

• y que exista algún tipo de impedimento para el paso de un estado a otro.

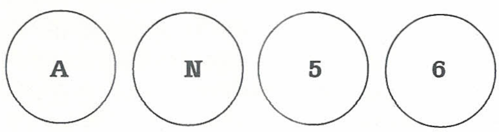
Con esta descripción se comprende que lo que resulta un problema para un sujeto puede no serlo para otro. Cada problema constituye un reto, se desconoce tanto la vía de solución como el tiempo que demorará solucionarlo. No obstante, se necesita confiar en que la inteligencia y habilidades que se poseen son adecuadas y suficientes para abordarlo. Es absurdo admitir que se pueda partir de cero. Según Schoenfeld (1992) el resolutor cuenta con recursos cognoscitivos que irá mostrando al trabajar con el problema como la intuición (conocimiento informal relacionado con el dominio), los hechos, los procedimientos algorítmicos y no algorítmicos así como las comprensiones (conocimiento proposicional) acerca de las reglas admitidas en el dominio.

Resolver un problema consiste en el proceso de ataque, en el abordaje del mismo por parte del sujeto. Nosotros, aún cuando el resolutor no disponga de la idea de solución entendemos, que si se encuentra enfrascado en hallar la respuesta, se encuentra resolviendo el problema. Así parafrasean V. Brenes y M. Murillo: *"Se entenderá que resolver un problema es hacer lo que se hace cuando no se sabe que hacer, pues si se sabe lo que hay que hacer, ya no hay problema"* (1994, pág. 377).

Polya, por su parte, aseveraba que *"...resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no es conseguible de forma inmediata, utilizando los medios adecuados"* (1980, pág. 1). Resolver problemas es una actividad humana fundamental. De hecho, el pensamiento humano trabaja la mayor parte del tiempo sobre problemas. *"Cuando no dejamos la mente a su libre albedrío, cuando no la dejamos soñar, nuestro pensamiento tiende hacia un fin; buscamos medios, buscamos resolver un problema"* (1965, pág. 187).

Según L. Bertoglia (1990, pp. 111-113), actualmente está en boga considerar, básicamente, dos tipos de problemas: los problemas cerrados y los problemas abiertos. En los primeros la solución se deduce en forma lógica a partir de la información que aparece en el planteamiento del problema y que resulta suficiente para encontrar la respuesta correcta. El resolutor dispone de toda la información, sólo necesita integrarla aplicando los recursos de la lógica; por ello suelen llamarse "problemas de inferencia lógica". Posamentier and Stepelman (pág. 126) proponen el siguiente problema en el que, para optimizar su solución, conviene utilizar tanto la implicación aducida, como su contrarecíproco.

Un trabajador de control de calidad afirma estar muy seguro, de que todos los platos de metal manufacturados tienen una vocal impresa sobre una cara, poseen un número par sobre la tra. ¿Cuáles de los siguientes platos deben ser volteados, ara estar seguros de que la regla ha sido seguida?.



Este tipo de problemas, ellos lo denominan "no rutinario".

Por su parte en los problemas abiertos el resolutor necesita ir más allá de la información recibida, utilizándola de manera distinta y/o modificando los significados atribuidos a los elementos del ejercicio. Ahora los recursos lógicos resultan insuficientes y se precisa de creatividad. Los problemas abiertos se aproximan mucho a lo que sucede en la vida real; hay que hacer consideraciones para la respuesta, pues no se da toda la información necesaria. Por este motivo, suelen denominarse "problemas sin los datos necesarios" (Campistrous y Rizo, 1996, pág. 92). Un ejemplo es el caso de una persona que debe descubrir un procedimiento, que le permita distribuir entre tres personas, en forma equitativa, las dos casas que han recibido como herencia. Es justo, desde luego, que nos preguntemos: ¿Existen problemas abiertos en Matemática? Los profesores Campistrous y Rizo, aportan un ejemplo muy sencillo.

Se quiere construir un tanque de agua con una capacidad de 8000L. ¿Qué dimensiones debe tener?

Evidentemente existen condiciones que no están dadas, por ejemplo:

1. La forma del tanque, que puede ser ortoédrica, cilíndrica, cónica, etcétera; y en cada caso las dimensiones están entre sí, en una proporción diferente.

2. La cantidad de material disponible, ya que se gasta más o menos, en dependencia de la forma y dimensiones escogidas (1996, pp. 92-93).

La clasificación de problemas en abiertos y cerrados, no es la única ni mucho menos. Por ejemplo, Polya (1965) trata con regular insistencia dos tipos: los "problemas por resolver" y los "problemas por demostrar". El paralelo establecido ilustra como el propósito de los primeros es descubrir cierta incógnita. Los problemas por resolver pueden ser teóricos o prácticos, abstractos o concretos, serios o simples acertijos; y sus elementos principales son la incógnita, los datos y la condición. El propósito de los problemas por demostrar consiste en probar, de manera concluyente, la exactitud o falsedad de una afirmación; sus elementos principales son la hipótesis y la conclusión. Nosotros consideramos la "clasificación" aducida por este autor como una especificación de la habilidad que principalmente se quiere medir; sin embargo, es justo señalar que no debe descuidarse el desarrollo de otras habilidades.

Aquellos ejercicios que no sean problemas los denominaremos, siguiendo a Polya, como "rutinarios". Así, por ejemplo, podemos hablar de ejercicios rutinarios con textos o de problemas con textos; además, al demostrar una equivalencia, tal vez nos enfrentemos a un problema formal en un sentido y a un ejercicio rutinario formal en el otro.

Después de haber dado respuesta a las interrogantes: ¿es toda tarea un problema?, ¿en qué consiste resolver un problema?, añadamos una tercera: ¿todo problema tiene solución?. Este es, a nuestro juicio, un tema bastante complicado. El destacado matemático alemán D. Hilbert en el II Congreso Internacional de Matemática de París afirmaba en su discurso el 8 de agosto de 1990: *"Esta capacidad de resolver cualquier problema matemático es un fuerte incentivo para nuestro trabajo. Oímos resonar siempre en nuestros oídos el siguiente llamamiento: este es el problema, busca su solución. La puedes encontrar con el pensamiento puro, ya que en Matemática no existe el ignorabimus"*. Así pensaba el máximo exponente del formalismo en Matemática; pensamiento que se reflejó siempre en toda su obra, y aún en el Congreso Internacional de Bolonia, el 3 de septiembre de 1928, todavía señalaba: *"La teoría de la demostración (...) nos proporciona el sentido profundo de la convicción de que a la inteligencia matemática no se le ponen fronteras y de que es capaz de escudriñar hasta las leyes del propio pensar. Cantor ha dicho: la esencia de la Matemática consiste en su libertad, y yo añado gustoso para los buscadores de dudas y los espíritus mezquinos: en la Matemática no existe el ignorabimus..."*.

En Junio de 1696, en la revista matemática "Acta Eruditorum", fundada por G. W. Leibniz, aparecía el siguiente problema compuesto por el matemático suizo Jean Bernoulli:

"Se invita a los matemáticos a resolver UN NUEVO PROBLEMA: Dados dos puntos A y B en el plano vertical y no colocados en la misma recta vertical, asignar a una partícula móvil M el sendero AMB a lo largo de la cual, descendiendo por su propio peso, pasa del punto A al punto B en el tiempo más breve posible.

Para estimular a los amantes de tales tareas el deseo de realizar la solución de este problema, puede señalarse que la cuestión propuesta no consiste, como pudiera parecer, en una mera especulación sin entidad alguna. Contra lo que uno pensaría a primera vista, tiene gran utilidad en otras ramas de esta ciencia, tales como la Mecánica. Mientras tanto, para prevenir, cualquier juicio prematuro, se puede hacer notar que aunque la línea AB es ciertamente la más corta entre los puntos A y B, no es, con todo, el sendero atravesado en tiempo mínimo. Sin embargo, la curva AMB, cuyo nombre yo daré, si nadie lo ha descubierto antes del final de este año, es una curva bien conocida de los geómetras"[1].

Beato (1996) ha enfatizado que merece especial atención la forma de plantear este

---

[1] Por supuesto que se trata del problema de la braquistócrona, y la curva en cuestión es la cicloide.

problema. Bernoulli comienza invitando a los matemáticos, continua afirmando que se trata de un nuevo problema, y finaliza señalando que el problema no es un simple divertimento pues tiene aplicación en otras ciencias. Se han puesto de manifiesto, en el planteamiento del problema, tres aspectos a los que debemos prestar mucha atención a la hora de proponer un problema a nuestros alumnos:

- Propiciar la participación activa de los estudiantes, conscientes de que "aprender Matemática es hacer Matemática" (invitar, no obligar).
- Innovar continuamente tanto en los temas como en su tratamiento.
- Proponer cuestiones justificadas por su aplicación tanto matemática como extramatemática (1996, pág. 408).

En el planteo han de transparentarse las cuatro funciones esenciales de los problemas: la función instructiva, que comprende el sistema de conocimientos acordes con el nivel de aprendizaje; la función desarrolladora, que abarca el sistema de habilidades intelectuales a lograr; la función educativa, que involucra la formación de actitudes; y la función de control, pues se concibe al problema como el medio más eficaz para medir el vencimiento de los objetivos (Ballester et al, 1992). El proceso de formulación de problemas se regula, según Bertoglia (1990, pp. 114-117), atendiendo a cinco principios especiales. Ellos deben:

- ajustarse a los objetivos del aprendizaje;
- reservarse para el momento oportuno;
- tener un nivel de complejidad adecuado;
- favorecer el trabajo reflexivo;
- presentar la información en términos positivos y familiares.

En efecto, los problemas deben ajustarse a los objetivos del aprendizaje; su elaboración debe ser hecha de tal modo que, el encontrar la solución signifique la adquisición del aprendizaje o bien el logro de un conocimiento relevante. De este principio se desprende la necesidad de conducir la actividad de tal modo que, en términos ideales, todos los alumnos puedan encontrar la solución del problema. El segundo principio revela que los problemas deben ser propuestos cuando estén aseguradas las condiciones previas; de esta manera los estudiantes tendrán la oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos, en un final lo que se pretende es que el lleguen a la solución. En cuanto al nivel de complejidad, debemos tener cuidado de no plantear situaciones tan difíciles que excedan la posibilidad de respuesta de los alumnos, pues esto "*...en lugar de favorecer la adquisición del aprendizaje, lo perturba, ya que crea en los alumnos un sentimiento de frustración, al sentirse incapaces de resolver los problemas que se les plantea. En síntesis, se trata de adecuar el nivel de complejidad del problema a las características de los alumnos; sin embargo, esto plantea una dificultad debido a las diferencias individuales que se dan entre los estudiantes, ya que lo que resulta complejo para un alumno, puede no serlo para otro*" (Bertoglia, 1990, pp. 114-115). Sin estar en contra de la ejercitación o práctica de lo aprendido, el cuarto principio nos revela la principal diferencia entre un problema y un ejercicio: en la resolución de un problema el discente tiene la oportunidad real de trabajar reflexivamente. Por último, el quinto principio, nos recuerda que al plantear un problema en forma de negación, se incrementa la probabilidad de que se comentan errores en la interpretación de la información, específicamente del tipo estructural.

En nuestra opinión, el planteo ha de ser preferiblemente lacónico; no contendrá elementos superfluos ni contradictorios, ni debe necesitar información adicional, no se referirá a situaciones prácticas o a conceptos matemáticos desconocidos por el escolar a menos que se definan en el propio ejercicio; estarán matizados con valores estéticos y originalidad. En aras de lograr formulaciones que obliguen a los escolares a la reflexión, se puede incurrir en lo que denominamos "problemas mal planteados". Queremos ilustrar esta clasificación con tres ejemplos:

<u>Problema con datos superfluos.</u> El año en que nació Lope de Vega, está representado por un número **que tiene más de tres cifras, pero menos de cinco**; en fin, por un número de cuatro cifras. Se conoce que la suma de sus dígitos, **no de su producto**, es 14; y la cifra de las decenas es igual al triplo de las unidades. ¿En qué año nació Lope de Vega?. Está claro que si podamos el texto de la información que aparece en negrita, lograremos hacerlo más inteligible (cf. con el

ejercicio 28 en Cuadrado et al, 1991, pág. 40).

Problema con datos contradictorios. Compré 80 artículos entre gomas y lápices por $5.00, 50 lápices a 5¢ y las gomas a 10¢. ¿Cuántas gomas compré?. Evidentemente los datos proporcionados resultan contradictorios. Por una parte, si de los 80 artículos 50 son lápices, entonces 30 son gomas. Por otra parte, de los $5.00, $2.50 representan el precio total de lápices; luego, los otros $2.50 debieron invertirse en la compra de 25 gomas (Campistrous y Rizo, 1996, pág. 93).

Problema con déficit de datos. Un barco lleva 23 ovejas, 13 hembras y 10 machos. ¿Cuál es la edad del capitán?. A pesar de ser extremadamente forzado, este problema ilustra perfectamente nuestra intención y es utilizado en ocasiones, para medir el grado de "madurez" de los estudiantes.

¿Por qué resolver problemas es un tema de interés?. No hay una respuesta fácil, ni única, a esta pregunta. La resolución de problemas, en Francia, nada tiene que ver, por ejemplo, con el trabajo realizado en Inglaterra, Rusia y con el de los Estados Unidos; incluso dentro de un país, se pueden presentar 3 ó 4 enfoques distintos al tratar dicho tema. El que nos interesa es *"el uso de problemas o proyectos difíciles por medio de los cuales, los alumnos pueden aprender a pensar matemáticamente"* (Schoenfeld, 1994).

Es claro que los diferentes enfoques, no están completamente desvinculados unos de otros. Antes que todo, queremos aclarar que este método de enseñanza no es el único o mejor, es solo una de las vías posibles. Por otra parte, el método todavía presenta algunas dificultades que no están satisfactoriamente resueltas en la mente de algunos profesores y, mucho menos, en la forma práctica de llevarlo a cabo. Se trata de armonizar adecuadamente las dos componentes que la integran, la componente heurística, es decir, la atención a los procesos de pensamiento y los contenidos específicos del pensamiento matemático.

Nuestros libros de texto están, por lo general, repletos de ejercicios y carentes de verdaderos problemas, incluso, existe en la actualidad, una buena cantidad de obras cuya atención primordial poner en práctica el principio general de aprendizaje activo. La apariencia exterior puede ser engañosa. También en un ejercicio se expone una situación y se pide que se llegue a otra: *Escribir el coeficiente de x^{32} en el desarrollo de $(1+2x)^{55}$.*

Pero si esta actividad, que fue un verdadero problema para los algebristas del siglo XVI, se encuentra, como suele suceder, al final de una sección sobre el binomio de Newton, no constituye ya ningún reto notable. El alumno tiene los caminos bien marcados. Si no es capaz de resolver un problema semejante, ya sabe que lo que tiene que hacer es aprenderse la lección primero.

La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe en absoluto dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante:

- que el alumno manipule los objetos matemáticos;
- que active su propia capacidad mental;
- que ejercite su creatividad;
- que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente;
- que, a ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental;
- que adquiera confianza en sí mismo;
- que se divierta con su propia actividad mental;
- que se prepare para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana;
- que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.

¿Cuáles son las ventajas de este tipo de enseñanza?. ¿Por qué esforzarse para conseguir tales objetivos?. He aquí unas cuantas razones interesantes (que sin ser suficientes, deben ser necesarias):

- porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestro jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas;
- porque el mundo evoluciona muy rápidamente: los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos;

• porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo;

• porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas;

• porque es aplicable a todas las edades.

¿En qué consiste la novedad?. ¿No se ha enseñado siempre a resolver problemas en nuestras clase de matemáticas?. Posiblemente los buenos profesores de todos los tiempos han utilizado de forma espontánea los métodos que ahora se propugnan. Pero lo que tradicionalmente se ha venido haciendo por una buena parte de nuestros profesores se puede resumir en las siguientes fases:

• exposición de contenidos,

• ejemplos,

• ejercicios sencillos,

• ejercicios más complicados,

• problema.

La forma de presentación de un tema matemático basada en el espíritu de la resolución de problemas debería proceder, más o menos, del siguiente modo:

• propuesta de la situación-problema de la que surge el tema (basada en la historia, aplicaciones, modelos, juegos...);

• manipulación autónoma por los estudiantes;

• familiarización con la situación y sus dificultades;

• elaboración de estrategias posibles;

• ensayos diversos por los estudiantes;

• herramientas elaboradas a lo largo de la historia (contenidos motivados);

• elección de estrategias;

• ataque y resolución de los problemas;

• recorrido crítico (reflexión sobre el proceso);

• afianzamiento formalizado (si conviene);

• generalización;

• nuevos problemas;

• posibles transferencias de resultados, de métodos, de ideas, ...

En todo el proceso el eje principal ha de ser la propia actividad dirigida con tino por el profesor, colocando al alumno en situación de participar, sin aniquilar el placer de ir descubriendo por sí mismo lo que los grandes matemáticos han logrado con tanto esfuerzo. Las ventajas del procedimiento bien llevado son claras: actividad contra pasividad, motivación contra aburrimiento, adquisición de procesos válidos contra rígidas rutinas inmotivadas que se pierden en el olvido.

Sin embargo creo que aún no han surgido intentos serios y sostenidos por producir obras que efectivamente apliquen el espíritu de la resolución de problemas a la transmisión de aquellos contenidos de la Matemática de los diversos niveles que en la actualidad pensamos que deben estar presentes en nuestra educación.

Lo que suele suceder a aquellos profesores genuinamente convencidos de la bondad de los objetivos relativos a la transmisión de los procesos de pensamiento es que viven una especie de esquizofrenia, tal vez por falta de modelos adecuados, entre los dos polos alrededor de los que gira su enseñanza, los contenidos y los procesos. Los viernes ponen el énfasis en los procesos de pensamiento, alrededor de situaciones que nada tienen que ver con los programas de su materia, y los demás días de la semana se dedican con sus alumnos a machacar bien los contenidos que hay que cubrir, sin acordarse para nada de lo que el viernes pasado practicaron. Sería muy necesario que surgieran modelos, aunque fueran parciales, que integraran en un todo armonioso ambos aspectos de nuestra educación matemática.

De todos modos, probablemente se puede afirmar que quien esté plenamente imbuido en ese espíritu de la resolución de problemas se enfrentará de una manera mucho más adecuada a la tarea de transmitir competentemente los contenidos de su programa. Por ello considero importante trazar, aunque sea someramente, las líneas de trabajo que se pueden seguir a fin de conseguir una eficaz preparación en el tema.

La preparación para este tipo de enseñanza requiere una inmersión personal, seria y profunda. No se trata meramente de saber unos cuantos trucos superficiales, sino de adquirir unas nuevas actitudes que calen y se vivan profundamente.

A nuestro parecer, esta tarea se realiza más efectivamente mediante la formación de pequeños grupos de trabajo. El trabajo en grupo en este tema tiene una serie de ventajas importantes:

• proporciona la posibilidad de un gran enriquecimiento, al permitirnos percibir las distintas formas de afrontar una misma situación-problema;

• se puede aplicar el método desde diferentes perspectivas, unas veces en el papel de moderador del grupo, otras en el de observador de su dinámica;

• el grupo proporciona apoyo y estímulo en una labor que de otra manera puede resultar dura, por su complejidad y por la constancia que requiere;

• el trabajo con otros nos da la posibilidad de contrastar los progresos que el método es capaz de producir en uno mismo y en otros;

• el trabajo en grupo proporciona la posibilidad de prepararse mejor para ayudar a nuestros estudiantes en una labor semejante con mayor conocimiento de los resortes que funcionan en diferentes circunstancias y personas.

Algunos de los aspectos que es preciso atender en la práctica inicial adecuada son los siguientes:

• exploración de los diferentes bloqueos que actúan en cada uno de nosotros, a fin de conseguir una actitud sana y agradable frente a la tarea de resolución de problemas;

• práctica de los diferentes métodos y técnicas concretas de desbloqueo;

• exploración de las aptitudes y defectos propios más característicos, con la elaboración de una especie de autorretrato heurístico;

• ejercicio de diferentes métodos y alternativas;

• práctica sostenida de resolución de problemas con la elaboración de sus protocolos y su análisis en profundidad.

Como vemos, no sólo este trabajo adquiere significación práctica para el docente, sino también para el estudiante como resolutor de ejercicios. No obstante, Labarrere (1996, pág. 59) asevera que *"...por lo regular el alumno carece de un marco referencial para someter a juicio valorativo los problemas que enfrenta, desde el punto de vista de su corrección y pertinencia — y más adelante enfatiza: en la actualidad los problemas se presentan más a los escolares como algo para resolver que como algo para someter a juicio".*

Hay un gran problema de fondo, existe una enorme diferencia entre la manera en que nosotros trabajamos la Matemática y la manera en que la ven nuestros alumnos. El trabajo matemático es un proceso de descubrimiento, vital y continuo, de alcanzar a comprender la naturaleza de objetos o sistemas matemáticos concretos. Primero dominamos una parte, según avanzamos, la intuición se desarrolla, comenzamos a creer que vamos por buen camino. Lo verificamos con ejemplos, buscamos contraejemplos, etc. Cuando creemos saber por qué funciona, probamos a demostrarlo. Este ensayo puede tener o no éxito. Podemos comenzar por un camino equivocado, sufrir algún revés, hacer modificaciones, etc. trabajamos por el método "prueba-error".

Desgraciadamente, nuestros alumnos raras veces tienen la idea de que trabajar la Matemática puede ser así. Aunque parezca raro, es a causa de nuestro profesionalismo, debido a la cantidad de materia que tiene que aprender, estos contenidos se presentan de manera organizada y coherente, no genética. Como resultado de esto, pueden "dominar" mejor la materia, pero sufren algunas consecuencias funestas. Como el manejar la Matemática parece fácil en nosotros, al ver lo difícil que es para ellos los alumnos se sienten incapaces y frustrados. No tienen idea de que nosotros, también, hemos de esforzarnos para entender Matemática nueva y, lo que es aún más importante, no tienen idea de que "entender" Matemática, significa hacerse las preguntas hasta que las cosas tengan sentido; en vez de ello, para los alumnos significa reproducir pasivamente lo que se les ha enseñado.

Nos parece que la mejor ayuda que podemos brindarle a los alumnos es el de facilitarles las técnicas mentales que podrán usar *después* de finalizados los exámenes finales. Creemos que la mejor asignatura (aunque no la única) para aprender lo que significa "comprender" es la Matemática. A continuación, exponemos algunas de las maneras que, a nuestro juicio, deben ser tenidas en cuenta por el profesor, a la hora de trabajar en el aula.

1. El papel del profesor como modelo de comportamiento.

2. El profesor como entrenador.

3. Muchas veces, existe más de una solución.

4. Otras veces, no existe solución.

5. Más contenido, no siempre es mejor.

6. Es necesario repetir lo que se les ha dicho.

7. El profesor ¿infalible?.

Un problema matemático, tal y como hemos descrito más arriba, puede ser descrito como un "desafío" al pensamiento creativo, original y a la imaginación. Cada persona, puede encontrar un problema, más o menos difícil, en dependencia de su preparación, su dedicación, etc. Esto nos dice, que el número de estrategias que pueden ser desarrolladas para resolver problemas son, probablemente, tantas como variados sean los problemas mismos.

Algunas de las estrategias comúnmente utilizadas, y que han demostrado su efectividad en diferentes situaciones, son las siguientes:

I. Hacer un dibujo.

II. Trabajando "hacia atrás".

III. Conjeturar y probar.

IV. Encontrar un patrón.

V. Hacer una tabla.

VI. Recoger datos.

VII. Usar una computadora o calculadora.

VIII. Usar razonamientos deductivos y/o inductivos.

IX. Resolver un problema análogo más simple.

X. Usar aproximaciones.

XI. Determinar condiciones necesarias y/o suficientes.

XII. Determinar características del objeto.

Ilustraremos estas estrategias con algunos problemas, lo que permitirá hacer un resumen de toda la exposición anterior. Otros ejemplos y problemas vinculados a la Matemática escolar, pueden consultarlos en Posamentier (1996) y Posamentier y Krulik (1996).

I. Figuras o diagramas, son "mucho" en los problemas geométricos, pero son útiles también en los problemas de movimiento, problemas mixtos y muchos otros que se "resisten" a ser clasificados de algún tipo específico. Veamos un conocido ejemplo que demuestra aquello que *"un dibujo vale más que 100 palabras"*.

Problema. Una hormiga está al final de una escalera de 10 peldaños. Cada día sube tres peldaños y a la noche, cae dos. ¿En cuántos días, la hormiga llegará al final de la escalera ?.

Es indudable que un dibujo como el siguiente, permite al escolar, obtener muy fácilmente la respuesta correcta.

Día 8
...
...
...
...
...
Día 2
Día 1
Noche 2
Noche 1

II. Muchas demostraciones en Geometría pueden ser escritas, asumiendo las conclusiones y determinando entonces, cuáles pasos deben preceder al último; así se continúa asta que se llega al comienzo de la prueba. Una ilustración de la aplicación de esta técnica en un problema no geométrico, es el de resolver una ecuación cuadrática factorizando.

Problema. Escribir una ecuación cuadrática cuyas raíces sean 2 y -3.

III. Remitimos al lector al trabajo Nápoles (1998a), para una aplicación de esta técnica.

IV. Encontrar un patrón en una sucesión de números puede ser muy difícil. No existe una única regla en este caso. Los patrones en una sucesión no siempre son únicos.

Problema. Encontrar el próximo número en la sucesión 2,4,8,16,31.

Escribamos el siguiente triángulo numérico:

2 3 4

2 4 7 11

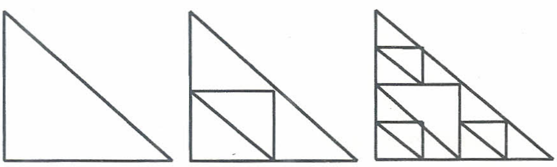
2 4 8 15 26

2 4 8 16 31 **57**

¿Por qué?. Si consideramos el número máximo de regiones formadas al dibujar rectas por puntos dados en una circunferencia, notaremos el siguiente patrón.

Número de punto sobre una circunferencia	Número de regiones formadas
2	3
3	4
4	8
5	16
6	31
7	57

V. Consideremos el triángulo de Sierpinski, obtenido al ir eliminando, en cada paso, el triángulo equilátero central, de cada triángulo equilátero dado. Es decir:



1 2 3 . . .

Problema. ¿Cuál es el área de la región sombreada, en cada etapa?. ¿Cuál es el perímetro total de la región sombreada, en cada etapa?.

Etapa	0	1	2	3	4	n
Área	1	¾	9/16	27/64	81/256	$(3/4)^n$
Perímetro	1	3/2	9/4	27/8	81/16	$(3/2)^n$

La dinámica del cambio, está claramente aquí. Mientras el área decrece, el perímetro crece. Como la iteración continúa, *ad infinitum*, el área tenderá a cero, mientras que el perímetro crecerá sin cota. Este problema permitiría la inserción de manera natural, en el aula, de un tema apasionante: *los fractales*. Algunas observaciones y apuntes históricos, así como sus posibles implicaciones didácticas (sobretodo universitarias), pueden ser consultadas en Nápoles 1998b, 1998c, 1998d y 1998e, así como en Nápoles y Escalona 1999a y 1999b.

VI. Mientras que en ocasiones, podemos contestar los problemas con respuestas aproximadas o no numéricas (como el anterior), otras veces se requieren respuestas exactas. Presentaremos algunas estrategias para organizar los datos, que pueden ser usadas, cuando sumas exactas sean necesarias.

Problema. Un billete de 20 pesos es utilizado en un kiosco para comprar mercancías por ese valor exacto. Si se tiene una lista de precios. ¿Qué compra debemos hacer, para sumar exactamente la cantidad requerida?.

La estrategia para resolver este tipo de problemas, es descubrir una combinación adecuada de precios, para ello primero combinamos aquellos precios cuyas unidades enteras no sobrepasen 10 pesos. Después, encontrar combinación de centavos que sumen 1.00. En ocasiones, existen varias respuestas correctas y puede no existir ninguna.

VII. Es recomendable cuando es necesario asistir al resolutor en problemas cuya solución puede requerir mucho tiempo de cálculo. Entendido estos de una naturaleza repetitiva, lo cual es perfecto para calcular la solución.

VIII. Generalmente usados en problemas de diversa índole, pero con un rasgo común: es necesario este esquema como parte de la solución.

Problema. Encontrar los numerales que hacen la siguiente adición correcta:

XY
YZ
YZY

IX. Tomemos la conocida "Torre de Hanoi", en el que las siguientes reglas deben ser observadas:

• Solo un disco puede ser movido de una varilla a otra, en cada ocasión.

• Un disco mayor, no puede colocarse sobre uno menor.

Problema. ¿Cuál es el número mínimo de movimientos necesarios H(n) para una Torre de n discos?.

Para n pequeño, podemos obtener por manipulación, la siguiente conclusión:

n	1	2	3	4
H(n)	1	3	7	15

Es claro entonces que $H(n)=2^n-1$, la prueba se completa por inducción.

X. En ocasiones, esta estrategia puede ser confundida con las dos anteriores. Presentaremos un problema para ilustrarla.

Problema. ¿Existen números positivos $a,b \in \mathbf{Q}$, pero con $a,b \notin \mathbf{N}$, tal que $a^b=c\in \mathbf{N}$?.

Muchos conocerán la proposición *"la raíz cuadrada de un número natural, es natural o irracional"*. Lo mismo se cumple para la raíz n-ésima, y puede ser probada por reducción al absurdo.

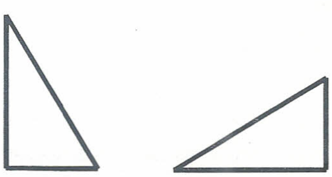
Es indudable la relación de esta estrategia y la creación de problemas matemáticos, cf. Cruz, 1998, así el problema anterior puede ser considerado un caso especial del siguiente.

Problema. ¿Existen números positivos $a,b \in \mathbf{R}$, pero con $a,b\notin \mathbf{Q}$, tal que $a^b=c\in\mathbf{Q}$?.

XI. La solución del último problema, puede servir, perfectamente, a nuestros propósitos.

XII. Es muy útil esta estrategia, en problemas geométricos sencillos, que estén relacionados con propiedades de polígonos, por ejemplo.

Problema. Dados los triángulos (iguales):



¿Cuántas figuras pueden ser formadas ordenando estos triángulos?.

A manera de epílogo. Veamos el siguiente problema.

Problema. Sean P(x) y Q(x) dos polinomios con coeficientes "invertidos":

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+ \ldots +a_2x^2+a_1x+a_0,$

$Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+ \ldots +a_{n-2}x^2+a_{n-1}x+a_n,$

donde $a_0,a_n{}^{1}0$. ¿Cuál es la relación entre las raíces de P(x) y Q(x)?.. Demuestra tu respuesta.

Un procedimiento de trabajo puede ser el siguiente:

1. Examinar algunos ejemplos sencillos, por ejemplo, ecuaciones lineales y cuadráticas.

2. Conjeturar "las raíces de P(x) son las recíprocas de Q(x)", ó

3. Replantear el problema dado, teniendo en cuenta los razonamientos anteriores: "Sean P(x) y Q(x) dos polinomios con coeficientes invertidos. Demostrar que las raíces de P(x) y Q(x) son recíprocas".

4. Escribir una demostración:

Teorema. Si P(x) y Q(x) son como antes. Entonces las raíces de Q(x) son las recíprocas de las de P(x)".

Demostración. Sea r una raíz de P(x), o sea, $P(r)=0$. Obsérvese que $r^{1}0$ pues $a_0{}^{1}0$. Además, $Q(1/r)=P(r)/r^n=0$, por o que 1/r es una raíz de Q(x). Recíprocamente, si s es una raíz de Q(x), entones $P(1/s)=0$. Esto completa la demostración.

El aclarar todos estos pasos, nos facilita, sobretodo, dos cosas:

• Desmistifica la Matemática y la hace más accesible; cuando el alumno ve de dónde proviene la idea, ya no le parece que es como sacarse un as de la manga.

• Las estrategias que subrayábamos anteriormente, se pueden generalizar y ser útiles en otros casos (no matemáticos). El aprender a usarlas, ayuda a los alumnos a mejorar su capacidad de resolver problemas.

Los problemas matemáticos están para resolver, precisamente eso es lo que le da emoción a la Matemática. El introducir a los estudiantes en la resolución de problemas, se lo debemos a aquellos que serán los matemáticos del futuro, a aquellos que utilizarán esta materia, a aquellos que desean desarrollar su intuición matemática y a aquellos que serán los profesores del mañana, es decir, los continuadores de nuestra obra. Esperamos que la resolución de problemas consiga trasmitir a nuestros alumnos la belleza y emoción que encierra la Matemática. En la medida en que adiestremos a nuestros alumnos a pensar independientemente y a *utilizar*los conocimientos de que disponen habremos desarrollado con éxito nuestra tarea como profesores.

Referencias

Ballester, S. et al. (1992)-"Metodología de la enseñanza de la Matemática", t. 1, Pueblo y Educación, La Habana.

Beato, J. (1996)-"La cicloide y su propiedad de braquistócrona: una actividad interdisciplinaria", Épsilon, No. 36, Vol. 12 (3), 407-416.

Bertoglia, L. (1990)-"Psicología del aprendizaje", Universidad de Antofagasta, Chile.

Blanco, L. (1991)-"Conocimiento y acción en la enseñanza de las Matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesores", Manuales Unex, No. 11, Madrid.

Borasi, R. (1986)-"On the nature of problems", Educational Studies in Mathematics, 17, 125-141.

Brenes, V. y M. Murillo (1994)-"Algunos objetos de estudio del constructivismo", pp. 373-378, UNA-UCR-CONICIT, Costa Rica.

Butts, T. (1980)-"Posing problems property", in "Problem Solving in School Mathematics" (Yearbook of the NCTM), Stephen Krulich (Ed.), Reston, 23-34.

Campistrous, L. y C. Rizo (1996)-"Aprende a resolver problemas aritméticos", Pueblo y Educación, La Habana.

Charles, R. and F. Lester (1982)-"Teaching problem solving. What, Why, How", Palo Alto, Dale Seymour Publishers.

Cruz, M. (1998)-"¿Cómo elaborar problemas matemáticos?", Pedagogía'99, ISPJLC, Holguín, Cuba

Cuadrado, Z., R. Naredo y C. Rizo (1991)-"Matemática 12º grado", Parte 2, Pueblo y Educación, La Habana.

González, F. (1997)-"La transformación inversión como recurso para la solución y confección de problemas geométricos", Tesis de Maestría (material didáctico), ISPJLC, Holguín, Cuba.

Del Río, J., L. Hernández y M.J. Rodríguez (1992)-"Análisis comparado del currículo de Matemática (nivel medio) en Iberoamérica", MARE NOSTRUM, Madrid.

Hilbert, D. (1900)-"Mathematische Probleme", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenscaften zu Göttingen, Berlín, 253-297.

Halmos, P. (1980)-"The heart of the mathematics", American Mathematical Montlhy, 87, 519-524.

Hose, P. A., M.L. Wallace and M.A. Johnson (1983)-"Problem solving as a focus. How? when? whose responsibility?, in "The agenda in action", NCTM, Virginia, 9-19.

Jungk, W. (1986)-"Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática 2", t. 2. Pueblo y Educación, La Habana.

Labarrere, A. F. (1989)-"¿Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas?", Pueblo y Educación, La Habana.

Labarrere, A. F. (1996)-"Pensamiento. Análisis y autorregulación de la actividad cognoscitiva de los alumnos", Pueblo y Educación, La Habana.

Malara, N. e L. Gherpelli (1997)-"Argomentazione e demostrazione in Aritmetica: alcuni risultati di una ricerca", in "L' educazione Matematica", Anno XVIII, Serie V, Vol. 2 (2), 82-102.

Miller, G. A. (1956)-"The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information", Psychological Review, 63, 81-97.

Müller, H. (1987)-"Aspectos metodológicos acerca del trabajo con ejercicios en la enseñanza de la Matemática", ICCP, La Habana.

Nápoles, J.E. (1998a)-"La historia y la educación matemática. Notas como (pre)texto", dado a publicar.

Nápoles, J.E. (1998b)-"Ecuaciones Diferenciales y Contemporaneidad", dado a publicar.

Nápoles, J.E. (1998c)-"Cien años de Teoría Cualitativa. Algunas observaciones", dado a publicar.

Nápoles, J.E. (1998d)-"Las Ecuaciones Diferenciales como signos de los tiempos", dado a publicar.

Nápoles, J.E. (1998e)-"El legado histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Consideraciones (auto)críticas", dado a publicar.

Nápoles, J.E. y L. Escalona (1999a)-"La Teoría de las Catástrofes y la determinación de extremos locales en la formación de profesores de Matemática-Computación. Una propuesta para el cambio", dado a publicar.

Nápoles, J.E. y L. Escalona (1999b)-"Matemática y ¿Modernidad?. Apuntes históricos a la Teoría de las Catástrofes", dado a publicar.

Polya, G. (1945)-"How to solve it", Princeton, Princeton University Press (existe traducción al español: "Como plantear y resolver problemas", Trillas, México, 1965).

Polya, G. (1954)-"Mathematics and Plausible Reasoning", 2 vols, Princeton, Princeton University Press.

Polya, G. (1980)-"On Solving Mathematical Problems in High School", in: "Problem Solving in School Mathematics" (Yearbook of the NCTM), Stephen Krulich (Ed.), Reston.

Polya, G. (1981)-"Mathematical Discovery", New York, Wiley.

Posamentier, A.S. (1996)-"Student! Get ready for the Mathematics for SAT I. Problem-solving Strategies and Practice Test", Corwin Press, Inc., A Sage Publications Company Thousand Oaks, California.

Posamentier, A.S. and S. Krulik (1996)-"Teachers' Prepare your students for the Mathematics for SAT I. Methods and Problem-solving Strategies", Corwin Press, Inc., A Sage Publications Company Thousand Oaks, California.

Posamentier, A.S. and J. Stepelman (1996)-"Teaching secondary school mathematics", Prentice-Hall, Inc., A Simon & Schuster Company, Englewood Clifs, New Jersey.

Humenberger, H. and H.-C. Reichel (1996)-"Problem solving as a continuous principle for teaching. Suggestions and examples", in "The Art of Problem Solving. A Resource for the Mathematics Teacher", A.S. Posamentier (de.), Corwin Press, Inc., A Sage Publications Company Thousand Oaks, California.

Schoenfeld, A. H. (1992)-"Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics", in D. Grouws (De.) "Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning", New York, MacMillan.

Schoenfeld, A. H. (1994)-"Ideas y tendencias en la resolución de problemas", OMA, Buenos Aires.

Sierpinski, W. (1964)-"Elementary theory of numbers", Polska Akademia Nauk, Warszawa.

DrC. Juan E. Nápoles Valdés - Universidad de la Cuenca del Plata, (3400) Corrientes, Argentina y UTN-Fac. Resistencia, (3500) Resistencia, Chaco, Argentina.

MsC. Miguel Cruz Ramírez - Instituto Superior Pedagógico de Holguín, Matemáticas, Holguín 81000, Cuba.