Construindo o Conjunto "Z" por classes de equivalência

José Carlos Pinto Leivas

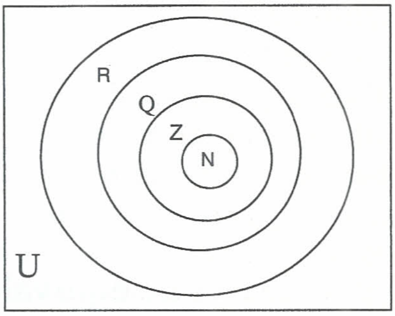
Resumo

Este artigo visa apresentar a linguagem das estruturas algébricas de uma forma mais acessível aos estudantes dos cursos de formação de professores de Matemática que irão atuar no ensino fundamental e médio, os quais, muitas vezes, não percebem por que estudam determinadas relações de equivalência e onde podem aplicá-las, negando muitas vezes a necessidade de estudar tais estruturas em sua formação acadêmica. Apresento relações de equivalência que são trabalhadas no ensino médio e que servem para definir as estruturas dos grupos de base 2 e base 3, caracterizando os pares, ímpares e os múltiplos de 3. Com base nesta fundamentação teórica, apresento dispositivos práticos que podem ser utilizados, mais especificamente, um, para justificar a multiplicação em Z.

Introdução

Uma das questões principais no ensino fundamental e médio é a dos conjuntos numéricos. A princípio surgem questões que deixam em dúvida o professor que inicia sua carreira profissional. Zero é número natural ou não? O que se deve dizer ao estudante desses níveis? Como tantas outras questões que foram surgindo, não devemos ter maiores preocupações com esse fato. Devemos, sim, chamar a atenção para as divergências e apelar para a história do surgimento dos números, onde o zero aparece muito após o homem ter definido seu sistema de numeração decimal.

Uma outra questão que deve chamar a atenção é a que diz respeito à quantidade de elementos dos principais conjuntos numéricos. A representação dos conjuntos por diagramas conduz a uma interpretação errônea de que os conjuntos apresentam cardinais diferentes, dizendo que o conjunto dos números reais **R** tem mais elementos do que o conjunto dos números racionais **Q**, que este tem mais do que o conjunto dos números inteiros **Z** e este mais elementos do que o conjunto dos números naturais **N**.



$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

A relação $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$, porém, o contrário não necessita acontecer. Quando ocorrer que exista um elemento $X \in A$ e $X \notin B$, então $B \not\subset A$ ou $A \neq B$. Isto conduz a um erro freqüente de dizer que o conjunto B é maior do que o conjunto A no diagrama do tipo acima, considerando B=**Z** e A = **N**. A questão em foco é bastante ampla e remete às idéias de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis, que não é objeto de estudo neste momento. Apenas para deixar a questão menos confusa, definamos a bijeção

$$f : Z \to N$$

da seguinte forma: f(n)= $\begin{cases} 2n, & n \geq 0, \\ -2n-1, & n < 0. \end{cases}$

Desenvolvimento Teórico

Partição de um Conjunto

DEFINIÇÃO: Considerando E um conjunto não vazio, uma *partição* de E, é uma coleção de subconjuntos não vazios de E, disjuntos dois a dois e de modo que a união de todos seja E.

EXEMPLO 1: Sendo E={1,2,3} tem-se { {1}, {2,3} }, como uma partição de E, ou então { {1}, {2}, {3} }.

Relação Binária

DEFINIÇÃO: Seja E um conjunto e ExE o produto cartesiano de E por E. Uma *relação binária* em E é qualquer subconjunto de ExE. Usa-se a notação: x R y onde x,y $\in$ E e R é a lei que relaciona x com y em E.

Relação de Equivalência

DEFINIÇÃO: Uma relação binária R em E é dita *relação de equivalência* em E se tiver as seguintes propriedades:

Reflexiva $\forall x \in E, \quad xRx.$

Simétrica $\forall x, y \in E, \quad xRy \quad \Rightarrow \quad yRx.$

Transitiva

$\forall x, y, z \in E, \quad xRy \quad e \quad yRz \quad \Rightarrow \quad xRz.$

Usamos a notação x $\equiv$ y.

EXEMPLO 2:
Igualdade num conjunto de números
$\forall x \in E, \quad x = x.$
$\forall x, y \in E, \quad x = y \Rightarrow y = x.$
$\forall x, y, z \in E, \quad x = y \quad e \quad y = z \Rightarrow x = z.$

EXEMPLO 3:
Congruência módulo m, onde m $\in$ **Z**
x $\equiv$ y (mod m) sse x – y = km onde k $\in$ **Z**.
Exemplificando: x $\equiv$ y (mod 2) sse x – y = k.2, onde k $\in$ **Z**.
Veja que os pares (1,3), (3,9), (3,1), (9,3), (1,9), (9,1), (1,1), (3,3), (9,9) estão nessa relação.
Observe que
(x,x) está na relação para todo x, pois x – x = 0.2.
(x,y) está na relação, o que significa que x – y = k.2 para algum inteiro k, logo y – x

= -k.2 o que implica (y,x) estar na relação.
O fato de os pares (x,y), (y,z) estarem na relação implica que $x - y = k_1 2$ e $y - z = k_2 2$, onde k_1 e k_2 são inteiros. Mas isso acarreta em $x - y + y - z = k_1 2 + k_2 2 = (k_1+k_2)2$ e como $k_1 + k_2$ é inteiro vem que (x,z) também está na relação para todo x, y, z.

Isso nos conduz ao fato de que a relação de congruência define uma relação de equivalência.

Partição definida pela Relação de Equivalência

Toda relação de equivalência em um conjunto E determina uma partição em E. Os elementos equivalentes entre si formam um conjunto chamado classe de equivalência. Duas classes de equivalência são disjuntas e a reunião de todas as classes de equivalência dá o conjunto E. Assim, a relação R classifica e separa ExE em classes de equivalência, que são elementos do *conjunto quociente*

C = ExE/R = { {a},{b},{c},...},

onde cada classe tem a forma {a} = $\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),...\}$

EXEMPLO 4: Considere o exemplo 3 acima e observe que x = y + k2. Fazendo

y = 0, temos que x = 0, ± 2, ± 4, ± 6,...
y = 1, temos que x = ± 1, ± 3, ± 5,...

Atribuindo o valor 2 a y voltamos a obter os mesmos valores do que os obtidos para 0, assim como atribuindo 4, 6,... e atribuindo os valores 3, 5,... voltamos a obter os mesmos obtidos para y = 1, ou seja, na primeira classe temos os pares (0,0), (±2,0), (±4,0),... enquanto que na segunda temos os pares (±1,1), (±3,1), (±5,1)...

Note que **Z** fica separado em duas classes, a dos pares C_0, determinada pelo valor 0 para y e C_1 a dos ímpares, determinada pelo valor 1 para y.

$C_0 = \{..., -4,-2,0,2,4,6,..\}$ e $C_1 = \{...,5,-3,-1,1,3,5....\}$.

$$C_0 \cap C_1 = \phi \qquad e \qquad C_0 \cup C_1 = Z$$

C_0 e C_1 são classes de equivalência e $\{C_0, C_1\}$ forma uma partição de **Z**, a qual caracteriza os pares e ímpares e dá a **Z** uma estrutura de base 2. O conjunto quociente é $\mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^* /_{\equiv} = \{ C_0, C_1 \}$.

EXEMPLO 5: $x \equiv y \pmod 3$ sse $x - y = k.3$, onde $k \in$ **Z**.

$y=0 \Rightarrow x = 0; \pm 3, \ \pm 6, \ \pm 9,... \Rightarrow C_0=\{..., -6,-3,0,3,6,9,...\} = \{...,(0,0),(3,0),(9,3),...\}$;
$y=1 \Rightarrow x = 1 \pm 3m \Rightarrow C_1= \{...,-5,-2,1,4,7,...\} = \{...,(1,1),(1,4),(4,7),(-2,1),(1,10),...\}$;
$y=2 \Rightarrow x = 2 \pm 3m \Rightarrow C_2=\{...,-4,-1,2,5,8,...\} = \{...,(2,2),(2,5),(5,11),...\}$.

De modo similar ao feito com o exemplo 4, atribuindo outros valores para y voltamos a encontrar os mesmos valores acima.

Temos, pois, três classes C_0, C_1, C_2 de modo que C_0 I C_1 = C_0 I C_2 = C_0 I C_2 e C_0 Y C_1 Y C_2 = **Z**, definindo uma partição de Z. O conjunto quociente é $\mathbf{Z}_3 = \{ C_0, C_1, C_2 \}$ e nessa partição a classe C_0 determina os múltiplos de 3, dando a **Z** uma estrutura de base 3.

Adição e Multiplicação de Classes

Considere na congruência módulo m os seguintes pares:
$x_1 \equiv x_2 \pmod m \Rightarrow x_1 - x_2 = k_1 m$ onde $k_1 \in Z \Rightarrow x_1 = x_2 + k_1 m$ ou (x_1,x_2) pertencente a uma mesma classe e

$y_1 \equiv y_2 \pmod{m} \Rightarrow y_1 - y_2 = k_2 m$ onde $k_2 \in Z \Rightarrow y_1 = y_2 + k_2 m$ ou (y_1, y_2) na mesma classe.

Efetuando a adição e a multiplicação membro a membro obtemos:
$x_1 - x_2 + y_1 - y_2 = (k_1 + k_2)m \Rightarrow (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (k_1 + k_2)m \Rightarrow (x_1 + y_1) \equiv (x_2 + y_2)$ ou na forma
$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2) \Rightarrow x_1+x_2 \equiv y_1+y_2$;
$x_1y_1 = x_2y_2+x_2k_2m +y_2k_1m + k_1k_2m^2 \Rightarrow x_1y_1 - x_2y_2 = (x_2k_2 +y_2k_1 + k_1k_2m)m$ onde o termo entre parênteses é um número inteiro. Assim, $(x_1,x_2).\ (y_1,y_2) = (x_1y_1,\ x_2y_2)$ ou $x_1y_1 \equiv x_2y_2$.

Logo, para adicionar duas classes, basta adicionar dois representantes quaisquer de qualquer classe e tomar para soma dessas classes qualquer elemento da classe que contém essa soma. O mesmo ocorre com a multiplicação.

EXEMPLO 6. Considere o exemplo 5.

$C_1 + C_2$:
$4\ \chi\ C_1$ e $2 \in C_2 \Rightarrow 4+2 = 6 \equiv 3 \in C_0$.
Assim, $C_1 + C_2 = C_0$.
C_1C_2:
$4 \in C_1$ e $2 \in C_2 \Rightarrow 4.2 = 8 \equiv 2 \in C_2$.
Assim, $C_1C_2 = C_2$.

O Conjunto N

O tema número natural na base da aritmética, desde as mais remotas horas do homem inteligente, é, sem sombra de dúvidas uma parte extremamente difícil da Matemática.

A numerabilidade e o transfinito, o contínuo e os ordinais-limites assim como tantas outras questões abertas à investigação, apresentam uma dificuldade do essencialmente simples.

Trata-se, pois, de um tema difícil, cujo desenvolvimento em nível de iniciação é tarefa de êxito duvidoso. Por isto mesmo, nos níveis referidos, é notável a confusão, podendo com freqüência, a bem de uma exposição didática elementar, provocar o entendimento de que os naturais são cardinais ou ordinais, segundo o angulo de observação. Entendemos ser um erro que a nada conduz ao que se pode aplicar a frase de Ampére: "Os erros têm vida tenaz, quando o tempo não os destrói, os embalsama. "

Suponhamos conhecida a construção dos números naturais por Peano.

O Conjunto Z

[{N,0},+] tem estrutura de semi-grupo aditivo (isso significa que a operação é associativa). Consideremos nesse conjunto a equação $a + x = b$. Esta equação tem sempre solução em { N,0} ? Obviamente, se $b<a$, então não existe $x \in N$ que satisfaça tal relação. A fim de obtermos solução para tal equação sem condicionantes para a e b, há necessidade de ampliar o conjunto **N**. O processo consiste em simetrizar o semi-grupo [{**N**,0},+], criando o grupo abeliano [**Z**,+].

Para simetrizarmos um semi-grupo é necessário que:

- semi-grupo a simetrizar seja comutativo ou abeliano;
- semi-grupo a simetrizar tem de possuir a lei do cancelamento.

Encaminhamento para a simetrização de [{**N**,0},+]:

1) [**N**,+] tem estrutura de semi-grupo abeliano com lei de cancelamento. (+ é a operação definida em **N**).

2) Efetuamos o produto cartesiano NxN.

3) Criamos uma relação de equivalência R sobre **N**x**N**.

3.1) Estabelecemos a relação R (com a notação ≡): $(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$

3.2) Analisamos R no sentido de verificar se é uma relação de equivalência.

4) Ação de R sobre **N**x**N**, isto é, R classifica e separa **N**x**N** em classes de equivalência, que são os elementos do conjunto quociente

$$Z = NxN/R = \{ \{a\},\{b\},\{c\},...\}$$

onde cada classe tem a forma $\{\alpha\}=\{(a_1,b_1),(a_2,b_2),...\}$ sendo chamada _um número inteiro._

5) Representantes canônicos. São os números inteiros positivos, negativos e nulos. Consideremos os números inteiros dados pelas classes seguintes:

$\{\alpha\} = \{ (10,8) \equiv (8,6) \equiv (7,5) \equiv (2,0) \equiv ...\};$

$\{\beta\} = \{ (4,7) \equiv (6,9) \equiv (1,4) \equiv (0,3) \equiv ...\};$

$\{\gamma\} = \{ (5,5) \equiv (4,4) \equiv (2,2) \equiv (0,0) \equiv ...\};$

Para trabalharmos com números inteiros, é conveniente estamos de acordo, para tomar como representantes deles o par mais característico da classe. Convém chamar *representante canônico de um inteiro* ao par de classe que tenha uma ou as duas componentes nulas. Dessa forma,

$\{\alpha\} = \{ (2,0) \};$

$\{\beta\} = \{ (0,3) \};$

$\{\gamma\} = \{ (0,0) \}.$

No entanto, essa notação não é nada prática, sendo conveniente usar a seguinte notação abreviada.

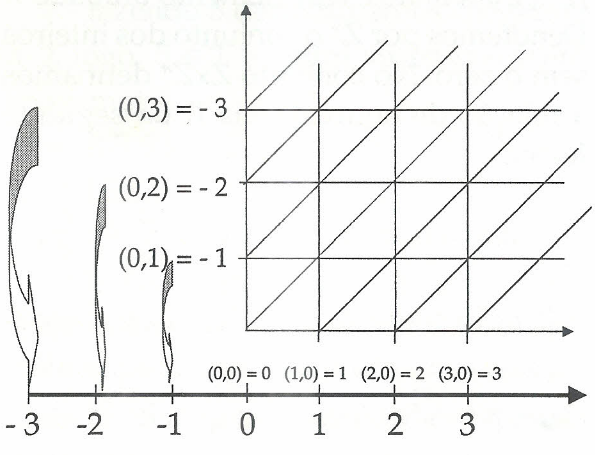
$\{\alpha\} = \{ (2,0) \} = (2,0) = (+2) = 2;$

$\{\beta\} = \{ (0,3) \} = (0,3) = (-3) = -3;$

$\{\gamma\} = \{ (0,0) \} = (0,0) = (0) = 0.$

Cabe salientarmos que os sinais + e – aqui utilizados, de modo algum podem ser confundidos com os das operações de adição e subtração. Eles são, simplesmente, atributos que indicam qual das componentes do elemento canônico é nula, a da direita (+) ou a da esquerda (-).

6) Interpretação geométrica do conjunto **Z.**



A adição de classes é feita da seguinte forma:
$(a,b) \in \{\alpha\}$ e $(c,d) \in \{\beta\} \Rightarrow (a+c, b+d)$ será um elemento de uma certa classe $\{\gamma\}$, enquanto que para a multiplicação temos: $(a,b).(c,d) = (ac+bd, ad+bc)$ e resultará também em um elemento de uma certa classe $\{\gamma\}$ a determinar.

O Conjunto Q

[Z,+,.] tem estrutura de anel sem divisores de zero, isto é, é um anel de integridade. Além do mais, existe o elemento unidade, o que o caracteriza como um domínio de integridade. Consideremos nesse conjunto a equação ax = b. Essa equação tem sempre solução em [Z,+,.]? Obviamente, se b não é múltiplo de a, então não existe x ∈ Z que satisfaça tal relação. Com o fim de obter solução para esta equação sem condicionantes para a e b, há necessidade de ampliarmos o conjunto **Z**. O processo, análogo ao que foi feito no item anterior, consiste em simetrizar o domínio de integridade [**Z**,+,.], criando o corpo comutativo [**Q**,+,.].

Note que o semi-grupo a simetrizar [Z,.] é abeliano e tem elemento unidade 1. Denotemos por Z* o conjunto dos inteiros sem o zero. No conjunto ZxZ* definamos a relação de equivalência R da seguinte forma.

$$(a,b) \equiv (c,d) \Leftrightarrow a.d = b.c \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

cuja ação sobre ZxZ* é classificar e separar esse conjunto em classes de equivalência, formando o conjunto quociente $Q = ZxZ^*/R = \{ \{ \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots \}, \{ \frac{c_1}{d_1} = \frac{c_2}{d_2} = \dots \}, \dots \}$ denominado conjunto dos números racionais. Cada classe de equivalência será denominada de _número racional._

Consideremos os números racionais dados pelas classes abaixo.

$\{\alpha\} = \{(5,10) \equiv (3,6) \equiv (2,4) \equiv (1,2) \equiv \dots\} = \{\frac{5}{10} \equiv \frac{3}{6} \equiv \frac{2}{4} \equiv \frac{1}{2} \equiv \dots\} = \{\frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}.$

$\{\beta\} = \{(0,1) \equiv (0,2) \equiv (0,3) \equiv (0,4) \equiv \dots\} = \{\frac{0}{1} \equiv \frac{0}{2} \equiv \frac{0}{3} \equiv \frac{0}{4} \equiv \dots\} = \{0\} = 0.$

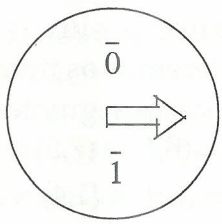
$\{\gamma\} = \{(2,1) \equiv (4,2) \equiv (6,3) \equiv (8,4) \equiv \dots\} = \{\frac{2}{1} \equiv \frac{4}{2} \equiv \frac{6}{3} \equiv \frac{8}{4} \equiv \dots\} = \{2\} = 2.$

$\{\delta\} = \{(-5,10) \equiv (-3,6) \equiv (-2,4) \equiv \dots\} = \{-\frac{5}{10} \equiv -\frac{3}{6} \equiv -\frac{2}{4} \equiv -\frac{1}{2} \equiv \dots\} = \{-\frac{1}{2}\} = -\frac{1}{2}.$

Em virtude de que (-a,b) ≡ (a, -b) ⇔ (-a)(-b) = b.a segue que podemos considerar como representante canônico de cada classe a única fração irredutível de denominador positivo.

Desenvolvimento Prático

Classe de Base 2



■ Aparelho ===> O aluno deve construir o círculo

===> sentido horário ===> partindo do zero com apenas duas classes e movimentar o ponteiro. Quando cair em $\overline{0}$ deverá colocar nessa classe o número correspondente e assim com a próxima classe.

- como não há nenhum deslocamento, saindo da classe do $\overline{0}$, chegamos à classe do $\overline{0}$, logo, $0 \in \overline{0}$.
-fazendo um deslocamento, chegamos em $\overline{1}$, logo, $1 \in \overline{1}$.

-fazendo 2 deslocamentos, chegamos em $\overline{0}$, logo, $2 \in \overline{0}$.
-fazendo 3 deslocamentos, chegamos em $\overline{1}$, logo, $3 \in \overline{1}$, e assim sucessivamente, até chegarmos à
$\overline{0} = \{0,2,4,6,8,10,...\}$ e $\overline{1} = \{1,3,5,7,9,11,...\}$.

Os elementos que pertencem à classe $\overline{0}$ são chamados <u>*números pares*</u>.

Os elementos que pertencem à classe $\overline{1}$ são chamados <u>*números ímpares.*</u>

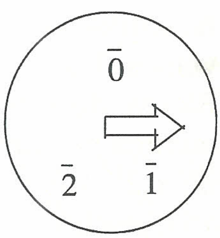
■ No conjunto $\mathbf{Z}_2 = \{\overline{0}, \overline{1}\}$ podemos definir as operações de adição e multiplicação de classes, o que caracteriza o conjunto como grupo, isto é, $(\mathbf{Z}_2,+)$ e $(\mathbf{Z}_2,\cdot)$.

■ Elaboração de tabela para $(\mathbf{Z}_2,+)$ e $(\mathbf{Z}_2,\cdot)$

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Classe de Base 3



■ Aparelho ===> construir o círculo ===> sentido horário ===> partida do zero: apenas três classes. Movimente o ponteiro. Quando cair em $\overline{0}$, coloque nessa classe o número correspondente e assim com as próximas classes.

- como não há nenhum deslocamento saindo da classe do $\overline{0}$, chegamos à classe do $\overline{0}$, logo, $0 \in \overline{0}$,
- fazendo um deslocamento chegamos a $\overline{1}$, logo, $1 \in \overline{1}$,
- fazendo 2 deslocamentos chegamos a $\overline{2}$, logo, $2 \in \overline{2}$,
- fazendo 3 deslocamentos chegamos a $\overline{0}$, logo, $3 \in \overline{0}$,
- fazendo 4 deslocamentos chegamos a $\overline{1}$, logo, $4 \in \overline{1}$,
- fazendo 5 deslocamentos chegamos a $\overline{2}$, logo, $5 \in \overline{2}$, e assim sucessivamente, chegamos a
$\overline{0} = \{0,3,6,9,12,...\}$, $\overline{1} = \{1,4,7,10,...\}$ e $\overline{2} = \{2,5,8,11,...\}$.

Os elementos que pertencem à classe $\overline{0}$ são chamados *números múltiplos de 3.*

Os elementos os quais pertencem à classe $\overline{1}$ são chamados *números côngruos a 1 módulo 3.*

Os elementos pertencentes pertencem à classe $\overline{2}$ são chamados *números côngruos a 2 módulo 3.*

■ No conjunto $\mathbf{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ podemos definir as operações de adição e multiplicação de classes, o que caracteriza o conjunto como grupo, isto é, $(\mathbf{Z}_3,+)$ e $(\mathbf{Z}_3,\cdot)$.

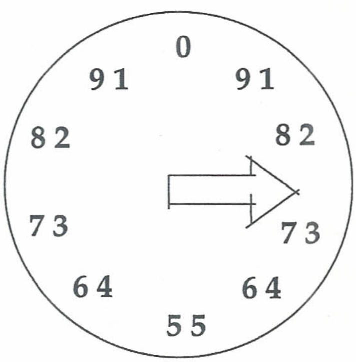
+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$

·	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Seguindo esse caminho podemos chegar ao sistema decimal, usual e ao sistema de base 12 ou o relógio.

Construção Dos Números Inteiros

Regras: Considere no aparelho abaixo um círculo dividido em 10 partes iguais e escreva os números de 1 a 9 na cor azul, no sentido horário. Escreva no sentido contrário os mesmos números, porém, na cor vermelha. Ao zero faça corresponder a cor verde, considerado o ponto de partida do ponteiro a se deslocar.



Aplicação:

Definição do número zero ou classe do zero.

- Não efetuando, com o ponteiro, nenhum deslocamento no sentido horário, escrevemos (0,...). Para chegarmos ao zero, não precisamos efetuar deslocamentos no sentido anti-horário, por isso escrevemos (0,0).

  O primeiro elemento do par ordenado indica o movimento no sentido horário e o segundo elemento o movimento no sentido anti-horário.
- Efetuando, com o ponteiro 1 deslocamento no sentido horário temos (1,...). Para chegarmos ao zero, devemos realizar 1 deslocamento no sentido anti-horário, escrevendo (1,1).
- Efetuando, com o ponteiro 2 deslocamentos no sentido horário temos (2,...). Para chegarmos ao zero, devemos realizar 2 deslocamentos no sentido anti-horário, escrevendo (2,2).

Temos assim, 0={(0,0),(1,1),(2,2),...}

Definição do número 1 (azul) ou classe do 1 positivo (+1).

- Efetuando, com o ponteiro, 1 deslocamento no sentido horário, escrevemos (1,...). Para chegarmos ao *1 na cor azul*, não precisamos efetuar deslocamentos no sentido anti-horário, por isso escrevemos (1,0).
- Efetuando, com o ponteiro, 2 deslocamentos no sentido horário, escrevemos (2,...). Para chegarmos ao *1 na cor azul*, precisamos efetuar 1 deslocamen-

to no sentido anti-horário, por isso escrevemos (2,1).

- Efetuando, com o ponteiro, 3 deslocamentos no sentido horário, temos (3,...). Para chegarmos ao *1 na cor azul*, precisamos efetuar 2 deslocamentos no sentido anti-horário, por isso escrevemos (3,2).

Temos, assim, 1={(1,0),(2,1),(3,2),...}

Definição do número 1 (vermelho) ou classe do 1 negativo (-1).

- Efetuando, com o ponteiro, 1 deslocamento no sentido anti-horário, escrevemos (...,1). Para chegarmos ao *1 na cor vermelha*, não precisamos efetuar deslocamentos no sentido horário, por isso escrevemos (0,1).
- Efetuando, com o ponteiro, 2 deslocamentos no sentido anti-horário, temos (...,2). Para chegarmos ao *1 na cor vermelha*, precisamos efetuar 1 deslocamento no sentido horário, por isso escrevemos (1,2).
- Efetuando, com o ponteiro, 3 deslocamentos no sentido anti-horário, temos (...,3). Para chegarmos ao *1 na cor vermelha*, precisamos efetuar 2 deslocamentos no sentido horário, logo, escrevemos (2,3).

Temos, assim, -1={(0,1),(1,2),(2,3),...}

Definição de outras classes como exercício de fixação.

Operações com classes

1) Adição: Lembremos que (a,b) + (c,d) = (a+c) + (b+d).

(+2)+(+3)=(2,0)+(3,0)=(2+3,0+0)=(5,0)=(+5).

(+2)+(-3)=(2,0)+(0,3)=(2+0,0+3)=(2,3)=(-1).

(-2)+(+3)=(0,2)+(3,0)=(0+3)+(2,0)=(2,1)=+1.

(-2)+(-3)=(0,2)+(0,3)=(0,5)=(-5).

2) Multiplicação: Lembremos que (a,b).(c,d) = (ac+bd,ad+bc).

(+2).(+3)=(2,0).(3,0)=(2.3+0.0,2.0+0.3)=(6,0)=(+6).

(+2).(-3)=(2,0).(0,3)=(2.0+0.3,2.3+0.0)=(0,6)=(-6).

(-2).(+3)=(0,2).(3,0)=(0.3+2.0,0.0+2.3)=(0,6)=(-6).

(-2).(-3)=(0,2).(0,3)=(0.0+2.3,0.3+2.0)=(6,0)=(+6).

Referências Bibliográficas

ZERMIANI, Vilmar J. **Álgebra: brincando, redescobrindo, compreendendo**. Blumenau: Editora da FURB, 1987.

MONTEIRO, Luiz Henrique Jacy. **Elementos de Álgebra**. RJ. Editora L.T.C. 1969.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução a Álgebra linear**. São Paulo: E. Blucher, c1977.

CALAME, André. Matemática **Moderna: tradução de L. H. Jacy Monteiro**. São Paulo. Polígono. 1970. 220p.

NEGRO, Adolfo. e. ZORIO, Valeriano. **Cerca de la matemática(1)-fundamentos, álgebra básica, anexos**. Madrid, Espanha. Editora Alhambra. 1975.

— ❖ — ❖ —

José Carlos Pinto Leivas -Prof. Da Fundação Universidade Federal do Rio Grande - Coordenador da Comissão do Curso de Matemática - (0xx)53-236-3524 - E-mail: leivasjc@terra.com.br e dmtleiva@furg.super.br