



Aprendiendo a “mirar con sentido” el aprendizaje matemático

Ceneida **Fernández** Verdú

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante
España

ceneida.fernandez@ua.es

Salvador **Llinares** Ciscar

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante
España

sllinares@ua.es

Julia **Valls** González

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante
España

julia.valls@ua.es

Resumen

El objetivo de esta investigación fue caracterizar la influencia de la interacción en el desarrollo de una mirada profesional en estudiantes para profesores de matemáticas. Analizamos las interacciones en un debate en línea de un grupo de estudiantes para profesores de matemáticas de educación secundaria cuando estaban intentando dotar de sentido las respuestas de estudiantes de educación secundaria a problemas proporcionales y no proporcionales. Los resultados indican que la interacción en el debate en línea permitió a algunos estudiantes para profesor mejorar su capacidad de identificar e interpretar aspectos relevantes del pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria. Esto fue consecuencia del desarrollo de un discurso progresivo con la incorporación de nuevos aspectos a tener en cuenta en relación al pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria.

Palabras clave: observar con sentido, razonamiento proporcional, formación de profesores, interacción en línea, b-learning

Abstract

The goal of this research was to characterize the influence of interaction on the development of pre-service mathematics teachers professional noticing. We analyzed pre-service secondary school mathematics teachers' interactions in an on-line debate when they analyzed secondary school students' answers to proportional and non-proportional situations. Results show that interactions in the on-line debate improve some pre-service mathematics teachers' ability to identify and interpret important aspects of secondary school students' mathematical thinking. This improvement was due to the progressive development of the discourse in the on-line debate with the incorporation of new aspects to consider in relation to the mathematical thinking of secondary school students.

Key words: professional noticing, proportional reasoning, pre-service mathematics teacher education, on-line interaction, b-learning

“Mirar con sentido” como un aspecto de la competencia docente del profesor de matemáticas

Recientemente las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas subrayan la importancia de la competencia docente denominada “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs, Lamb, & Phillip, 2010; Kersting, Givvin, Sotelo, & Stigler, 2010; Levin, Hammer, & Coffey, 2009) y los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Alsawie & Alghazo, 2010; Lin, 2005; Llinares & Valls, 2010; van Es & Sherin, 2002). La competencia docente “mirar con sentido” (Mason, 2002) permite al profesor de matemáticas ver las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas. Van Es y Sherin (2002) caracterizan la competencia docente “mirar con sentido” considerando tres destrezas: *identificar* los aspectos relevantes de la situación de enseñanza; *usar* el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones en el aula, y realizar *conexiones entre sucesos específicos del aula y principios e ideas más generales* sobre la enseñanza-aprendizaje. Por otra parte, Jacobs et al. (2010) conceptualizan esta competencia como un conjunto de tres destrezas interrelacionadas: identificar las estrategias usadas por los estudiantes, interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes y decidir cómo responder (decisiones de acción) teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

“Mirando con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción

Durante los últimos años los investigadores en Didáctica de la Matemática han aportado conocimiento relevante sobre el pensamiento matemático de los estudiantes y sobre las características del desarrollo del razonamiento proporcional. Los resultados de estas investigaciones han puesto de manifiesto diferentes características de las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver problemas de proporcionalidad (De Bock, Van Dooren, Janssens, & Verschaffel, 2007; Modestou & Gagatsis, 2007). En este contexto y debido a la importancia que tiene que el profesor apoye sus interpretaciones de las situaciones de enseñanza y sus decisiones de acción en su conocimiento del pensamiento matemático de los estudiantes, el desarrollo de la competencia “mirar con sentido” el pensamiento matemático

de los estudiantes es un aspecto clave en el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas. Así, aprender a dotar de sentido la manera en la que los estudiantes de educación secundaria resuelven los problemas proporcionales y no proporcionales puede llegar a capacitar al profesor para poder tomar mejores decisiones en la enseñanza. En este contexto, un aspecto especializado de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes se pone de manifiesto cuando los profesores deben responder a los procedimientos escritos de los estudiantes. Por ejemplo, cuando interpretan las respuestas escritas de los estudiantes a los problemas proporcionales y no proporcionales en relación al desarrollo del razonamiento proporcional.

El desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” del profesor de matemáticas

La conceptualización de la competencia docente “mirar con sentido” como identificar, interpretar y tomar decisiones de acción en la enseñanza ha permitido realizar investigaciones que apoyan la hipótesis de que bajo ciertas condiciones esta competencia puede ser aprendida. La manera en la que las tres destrezas interrelacionadas que conforman esta competencia (identificar, interpretar y tomar decisiones de acción) se configura en el proceso de aprendizaje de los estudiantes para profesor puede aportar información sobre el proceso de llegar a ser un profesor de matemáticas (Friel & Carboni, 2000; Penalva, Rey, & Llinares, 2011; Prieto & Valls, 2010; Sherin, 2001; Start & Strickland, 2007).

Para caracterizar el desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido”, una cuestión importante que se plantea es la relación entre la interacción de los estudiantes para profesor y el desarrollo de esta competencia docente. En particular, considerando la interacción mediada por la tecnología en un contexto b-learning en el que las actividades presenciales se mezclan con las actividades en línea (Schrire, 2006; Strijbos, Martens, Prins, & Jochems, 2006; Weinberger & Fisher, 2006). En estos momentos es un desafío para las investigaciones educativas desarrollar aproximaciones que permitan ir más allá de la descripción de estas situaciones e intentar proporcionar una explicación de los procesos de desarrollo (o ausencia de desarrollo) de la competencia docente “mirar con sentido” generados en dichos contextos.

Desde un punto de vista conceptual, Wells (2002) indica que es en la interacción donde se puede producir progreso en el sentido de que, compartir, cuestionar y revisar opiniones puede conducir a una nueva comprensión de todos los que participan. Una característica adicional a esta hipótesis, esencial para que el discurso sea progresivo, es que el contenido del discurso sea considerado un “artefacto del conocimiento” sobre el que los participantes trabajan colaborativamente para mejorar. Esta hipótesis sobre el discurso y construcción del conocimiento plantea cuestiones en investigación en Educación Matemática que deben ser exploradas. En particular, qué formas debe tomar el discurso para considerarlo vinculado al desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido” y qué tipo de condiciones permiten que esto ocurra de esta manera.

Las cuestiones de investigación

Planteamos las siguientes preguntas de investigación:

- ¿En qué medida los estudiantes para profesor de matemáticas identifican e interpretan los aspectos relevantes del pensamiento matemático de estudiantes de educación secundaria?

- ¿Cómo la interacción en línea apoya el desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido”?

Método

Participantes y contexto

Los participantes del estudio han sido un grupo de 7 estudiantes para profesor de matemáticas de Educación Secundaria que participaban en un programa de post-graduación que capacita para la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria (12-18 años). Este programa ofrece una formación pedagógica, psicológica, y de didáctica de las matemáticas con un periodo de prácticas de enseñanza en los centros de educación secundaria. Este programa de formación tiene una duración de un año (60 créditos, European Credits Transfer System). La parte específica de didáctica de las matemáticas es el 50% (30 ECTS) y está organizada en tres módulos referentes a la enseñanza de las matemáticas, al aprendizaje de las matemáticas, y a la resolución de problemas. La investigación que describimos en este trabajo forma parte de una experiencia desarrollada en el módulo *Aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria*. Este módulo tiene como objetivo que los estudiantes para profesor aprendan a identificar e interpretar las características del pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria. Uno de los contenidos de este módulo está centrado en la relación entre el pensamiento aditivo y el pensamiento multiplicativo en el contexto del razonamiento proporcional en estudiantes de educación secundaria (12-16 años). Para la enseñanza de este contenido, se diseñó un entorno de aprendizaje b-learning en el que se integraban actividades presenciales y no presenciales para los estudiantes para profesor mediante el uso de una plataforma web. Esta plataforma web permitía a los estudiantes para profesor realizar las actividades propuestas, participar en debates en-línea, tener acceso a los documentos con la información teórica y entregar los informes síntesis de las actividades (Figura 1).

La actividad inicial

Para desarrollar el contenido relativo al razonamiento proporcional, la actividad inicial que debían realizar los estudiantes para profesores de matemáticas consistía en identificar características del pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria en relación a la idea de razón y proporción. Para ello se les proporcionó un documento con las respuestas de 4 estudiantes de educación secundaria a 4 problemas con estructura de valor perdido (2 proporcionales [modelizados mediante la función $f(x) = ax, a \neq 0$] y 2 problemas no proporcionales con estructura aditiva [modelizados mediante la función $f(x) = x+b, b \neq 0$]). En total los estudiantes para profesor debían analizar 16 respuestas (4 problemas x 4 estudiantes de secundaria).

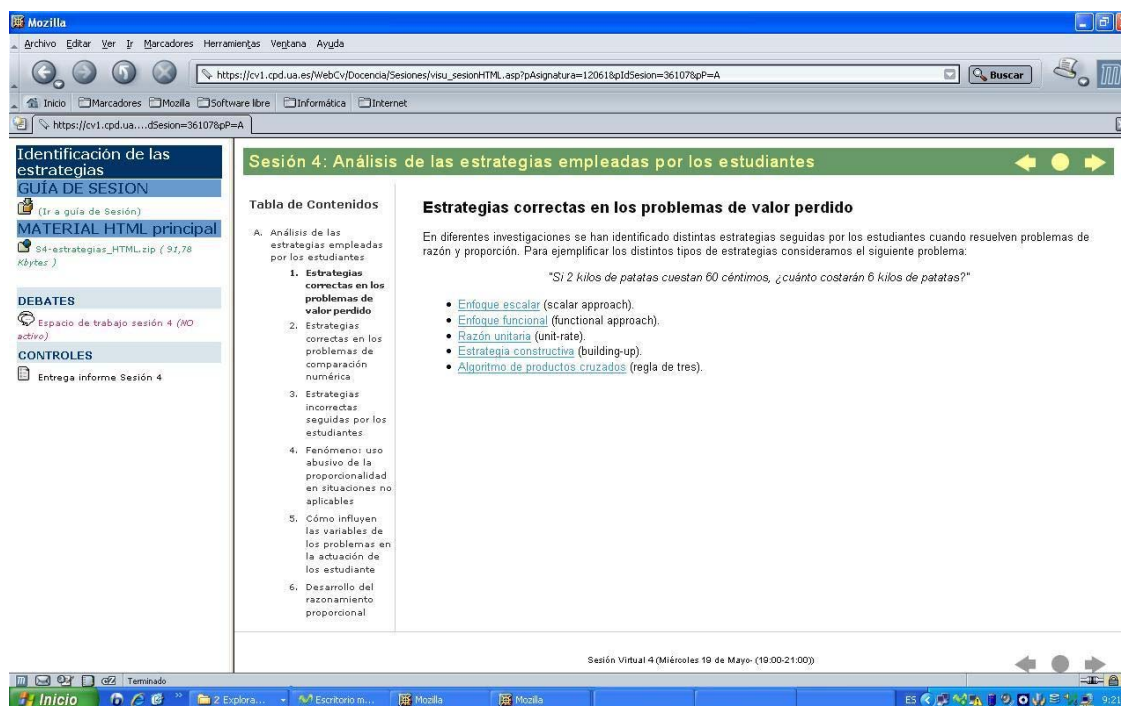


Figura 1. Página de una de las sesiones en-línea en la que participaban los estudiantes para profesor titulada “Sesion4. Análisis de las estrategias empleadas por los estudiantes”.

Las respuestas a los cuatro problemas reflejaban diferentes perfiles de comportamiento de los estudiantes de educación secundaria cuando resuelven problemas proporcionales y no proporcionales identificados por las investigaciones sobre este tópico (Fernández & Llinares, 2011; Van Dooren, De Bock, & Verschaffel, 2010).

La Figura 2 muestra las respuestas de uno de los estudiantes de secundaria que fueron presentados a los estudiantes para profesor como parte de la actividad inicial. En particular, estas respuestas corresponden al perfil del estudiante de educación secundaria que resuelve todos los problemas empleando una estrategia aditiva sin tener en cuenta si el problema es proporcional o aditivo.

Los estudiantes para profesor de matemáticas debían responder las siguientes preguntas

- *Describe detalladamente lo que piensas que hizo cada uno de los estudiantes para resolver cada uno de los problemas.*
- *Indica qué información puedes generar a partir de las respuestas dadas sobre la comprensión que tiene el estudiante de los conceptos matemáticos implicados en cada uno de los problemas.*
- *Si fueras el profesor de estos estudiantes, ante las respuestas dadas, ¿qué harías?*

<p>Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 4 cajas, Tomás ha cargado 16 cajas. Si Pedro ha cargado 8 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?</p> $\begin{array}{r} 16 \\ -4 \\ \hline 12 \\ +8 \\ \hline 20 \end{array}$	<p>Susana y Margarita están remando una canoa. Empezaron al mismo tiempo pero Margarita es más rápida. Cuando Susana ha remado 4 metros, Margarita ha remado 12 metros. Si Susana ha remado 8 metros, ¿cuántos metros ha remado Margarita?</p> $\begin{array}{r} 12 \\ -4 \\ \hline 8 \\ +8 \\ \hline 16 \end{array}$
<p>Raquel y Juan están plantando flores. Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 8 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?</p> $\begin{array}{r} 12 \\ -8 \\ \hline 4 \\ +20 \\ \hline 24 \end{array}$	<p>Ana y David están fabricando muñecas. Fabrican a la misma velocidad pero David empezó antes. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 18 muñecas. Si Ana ha fabricado 30 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David?</p> $\begin{array}{r} 18 \\ -12 \\ \hline 6 \\ +30 \\ \hline 36 \end{array}$

Figura 2. Parte del material de la actividad inicial entregada a los estudiantes para profesor

El debate en-línea

Una vez que los estudiantes para profesor habían entregado su respuesta a esta actividad inicial se abrió un debate en-línea con una duración de 7 días. En este debate los estudiantes debían aportar sus respuestas a las últimas dos preguntas de la actividad inicial, justificarlas y contrastarlas con las de sus compañeros para llegar a una respuesta consensuada. El debate en-línea estaba diseñado para que los estudiantes para profesor pudieran compartir, cuestionar y revisar sus propuestas de manera que la interacción pudiera ayudarles a generar una nueva comprensión de la tarea realizada. Para ello, el debate se apoyaba en las respuestas que los estudiantes para profesor habían dado a la actividad inicial y se organizaba a través de las mismas preguntas. Esta forma de organizar el debate tenía como objetivo conseguir que el discurso generado por los estudiantes para profesor fuera progresivo en el sentido de que el contenido del discurso, es decir, las respuestas a la actividad inicial y las nuevas participaciones generadas en el debate pudieran ser consideradas “artefacto del conocimiento” sobre el que los estudiantes para profesor trabajaran colaborativamente para mejorar su competencia en identificar e interpretar lo relevante en el pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria en relación al razonamiento proporcional. Al finalizar el debate los estudiantes para profesor debían realizar un informe síntesis con las conclusiones obtenidas.

Análisis

Los datos considerados en esta investigación son las respuestas a la actividad inicial y las participaciones en el debate en-línea. Realizamos el análisis en dos fases. En la primera fase, identificamos la manera en la que los estudiantes para profesor describían e interpretaban las respuestas de los estudiantes de educación secundaria. Para ello tuvimos en cuenta si los estudiantes para profesor identificaban las situaciones **proporcionales y no proporcionales**. Es decir, si reconocían que las situaciones proporcionales se modelizan a través de una función lineal $f: R \rightarrow R : f(x) = ax$, que cumple: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ y $f(kx) = kf(a)$; y que las situaciones **no proporcionales** usadas en esta actividad se modelizan a través de la función $f: R \rightarrow R : f(x) = x + b$, y que estas características podían condicionar las estrategias empleadas por los estudiantes de educación secundaria.

Así, en las respuestas de los estudiantes para profesor debían aparecer evidencias de que en sus respuestas discriminaban los elementos que caracterizan las situaciones proporcionales de las no proporcionales.

Además, en nuestro análisis consideramos en qué medida los estudiantes para profesor identificaban e interpretaban diferentes aspectos del razonamiento proporcional en las estrategias utilizadas por los estudiantes de educación secundaria.

Por último, analizamos si los estudiantes para profesor reconocían los diferentes perfiles de comportamiento de los estudiantes de secundaria ejemplificados en la actividad inicial (Tabla 1). Es decir, si eran capaces de identificar las diferencias entre los perfiles de comportamiento que reflejaban las respuestas dadas por los cuatro estudiantes de educación secundaria en la actividad inicial.

Tabla 1

Perfiles de comportamiento de los estudiantes de educación secundaria ejemplificados en la actividad inicial.

Perfiles	Característica
Perfil que depende del carácter de la razón (P1)	Uso de relaciones aditivas cuando la relación entre las cantidades es no entera y uso de relaciones proporcionales cuando la relación es entera
Perfil aditivo (P2)	Uso de relaciones aditivas independientemente del tipo de problema
Perfil proporcional (P3)	Uso de relaciones proporcionales independientemente del tipo de problema
Perfil correcto (P4)	Uso de relaciones proporcionales en los problemas proporcionales y de relaciones aditivas en los problemas aditivos

En la segunda fase analizamos las participaciones de los estudiantes para profesor en el debate en-línea que estuvo activo durante 7 días (Weinberger y Fisher, 2006). Este análisis tenía como objetivo identificar de qué manera la interacción permitía a algunos estudiantes para profesor refinar sus interpretaciones previas sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria en relación al razonamiento proporcional. Analizamos en qué medida, en las aportaciones de los estudiantes para profesor, se tenía en cuenta las características de los problemas, las características de las estrategias empleadas, y las características de los perfiles de comportamiento de los estudiantes de secundaria (Schrire, 2006). Finalmente, tuvimos en cuenta en qué medida esta forma de participar en el debate determinaba el refinamiento de las interpretaciones inicialmente planteadas.

Procedimiento

Para realizar este análisis, tres investigadores analizaron las respuestas de los estudiantes para profesor para generar un conjunto de códigos en relación a los diferentes aspectos del razonamiento proporcional que los estudiantes para profesor identificaban e interpretaban. El análisis conjunto de esta muestra de datos permitió consensuar criterios en relación a los significados que podían ser asignados a las diferentes aportaciones de los estudiantes para profesor. Los resultados de este análisis es lo que se presenta en la siguiente sección, en particular, identificamos y describimos algunas características del papel de la interacción en un debate sobre el desarrollo de la competencia docente “mirar con sentido”.

Resultados

El desarrollo de la capacidad de “mirar con sentido”: el papel de la interacción

Mayoritariamente los estudiantes para profesor, en la actividad inicial, fueron capaces de “ver” aspectos relevantes de las estrategias usadas por los estudiantes de educación secundaria al resolver los problemas, pero sólo en algunos casos, identificaron rasgos del comportamiento global de los estudiantes de secundaria (los perfiles). Sin embargo, a través del debate en-línea los estudiantes para profesor fueron capaces de centrar su atención en las características de las tareas e identificar perfiles no reconocidos con anterioridad. Es decir, en cierta medida la interacción motivada por el objetivo común de dotar de sentido al pensamiento matemático de los estudiantes propició el que los estudiantes para profesor empezaran a mirar de manera conjunta las respuestas a los cuatro problemas realizados por un estudiante. Un ejemplo de esta característica es la interacción entre S1 y S4 (Figura 4). El estudiante para profesor S1 había identificado inicialmente los problemas aditivos y proporcionales subrayando la importancia de “*mantener una misma velocidad habiendo empezado en distintos momentos y empezar al mismo tiempo pero llevando velocidades distintas*”, sin embargo, el estudiante para profesor S4 no había discriminado inicialmente los problemas proporcionales y aditivos, pero la interacción entre ellos le permite empezar a centrar su atención sobre este aspecto al concordar y clarificar diferenciando ambos tipos de problemas.

- COMPRESIÓN DE LOS ESTUDIANTES (Alumno S1 - 09:30:15 23/09/2010)
Los estudiantes tienen un buen dominio en las operaciones elementales (suma, resta, etc.) y hacen uso de éstas. Pero, por lo general, no suelen leer bien el problema e interpretan de la misma forma el hecho de empezar antes y el hecho de ser más rápido o lento.
 - Comprensión del problema (Alumno S4- 11:23:39 23/09/2010)
Estoy de acuerdo en que no han visto la diferencia entre mantener una misma velocidad habiendo empezado en distintos momentos y empezar al mismo tiempo pero llevando velocidades distintas. Habría que descubrir si se produce por no haber leído bien el problema o por no tener claro el concepto de proporcionalidad, cuando se produce y cuándo no.

Figura 4. Interacción entre el alumno S1 y S4 en el debate en-línea.

Centrar la atención sobre la necesidad de discriminar cuando es o no una situación de proporcionalidad resulta clave para empezar a considerar globalmente las respuestas de un estudiante a diferentes problemas. La vinculación entre el tipo de relación entre los números, lo aditivo o proporcional de la situación, y la información que se puede generar sobre el

pensamiento matemático de los estudiantes a partir de las estrategias usadas por los estudiantes de educación secundaria es otra manifestación de cómo la interacción ayudó a algunos estudiantes para profesor. Por ejemplo, la siguiente interacción entre tres estudiantes para profesor (S7, S3 y S1) les permitió identificar el perfil P1, definido por el papel que desempeñan las razones enteras o no enteras en las situaciones proporcionales y aditivas para determinar la respuesta de los estudiantes de educación secundaria (Figura 5), cuando previamente ninguno de estos estudiantes para profesor había identificado este perfil en la actividad inicial.

Esta interacción se inicia cuando el estudiante para profesor S7 centra la atención sobre lo que puede caracterizar de las respuestas del estudiante de educación Secundaria a los cuatro problemas propuestos. En particular, S7 identifica que el estudiante de secundaria resuelve uno de los dos problemas de proporcionalidad correctamente y el otro mal y en los problemas aditivos ocurre lo mismo. La aportación de S3 no resulta relevante en cuanto a la identificación pero permite a S1 centrar su atención sobre la relación multiplicativa entre los números. Para ello S1 indica que el estudiante de secundaria resuelve igual dos de los problemas al darse cuenta de la existencia de la relación de “triple” entre los números, y los otros dos, al no encontrar el número de la relación (ya que es una relación no entera), los resuelve aditivamente.

- *caso del 4 (Alumno S7 – 16:34:09 24/09/2010)*
Siguiendo en la misma línea a los otros casos, este también es curioso, porque hay dos problemas de proporciones, uno lo hace bien y otro mal, igualmente hay dos problemas de comenzar diferente y uno lo hace bien y otro mal. ¿Cómo se explica? O se canso de leer, o no entendió algunos términos que la confundieron o lo hizo al azar y unos le salieron bien y otros mal. De nuevo hay que decir que deben explicar los resultados o escenificar un poco lo que hacen.
 - *Estudiante EPS4 (Alumno S3 – 14:13:36 25/09/2010)*
La verdad es que es extraño que haga uno bien y otro mal de cada caso. Como tú dices si se le obligara a explicar qué representa cada uno de los resultados intermedios que va obteniendo comprendería mejor cuándo usar cada método de resolución. Por ejemplo, que en el problema 1) indicara tras la operación $100-40=60$ lo que representa el 60: “las cajas llevaba Tomás cuando Pedro empezó a cargar cajas”.
 - *Visualización Estudiante 4 (Alumno S1 – 17:26:20 25/09/2010)*
Respecto a este estudiante podría decir que tampoco nota la diferencia entre un problema u otro. Pero por la forma de resolverlos podemos sospechar que tanto el 2-4 y el 3-4 los resuelve de igual forma porque se da cuenta que es el triple, es decir, que aprecia que hay una relación entre los números 25 y 75 y 3 y 9. Sin embargo con los otros dos problemas no los puede hacer así (por ejemplo en el 1-4 no encuentra un número que al multiplicarlo por 40 de 60) y por eso opta por resolverlos de esa forma, buscando la diferencia y luego sumándosela al dato que le dan.

Figura 5. Interacción entre los alumnos S7, S3 y S1 en el debate en-línea.

Lo que muestra esta interacción es la manera en la que los estudiantes para profesor compartían una manera de mirar que les permitía revisar sus planteamientos previos lo que en este caso estaba conduciendo a una nueva comprensión de la situación.

Discusión

Los resultados de esta investigación indican que los estudiantes para profesor tuvieron dificultades inicialmente en interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria. Por ejemplo, les resultó difícil llegar a considerar conjuntamente las cuatro respuestas de un mismo estudiante de educación secundaria para identificar alguna característica del razonamiento proporcional. Sin embargo, la participación en el debate en-línea ayudó a algunos de los estudiantes para profesor a ir más allá de lo inicialmente considerado dando muestras del desarrollo de “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes.

Una característica del discurso generado en el debate en-línea fue que los estudiantes para profesor participaron colaborativamente para refinar el contenido de las aportaciones. Esto permitió que en cierta medida el discurso fuera progresivo en la incorporación de nuevos aspectos a tener en cuenta en relación al pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria. En este sentido, los resultados de nuestra investigación indican que el debate en-línea favoreció la emergencia de un discurso progresivo al facilitar la interrelación e integración de ideas sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de educación secundaria. Como consecuencia, podemos considerar que el debate en línea desempeñó el papel de mediador en la construcción del conocimiento. Un factor que apoyó la emergencia de este discurso progresivo fue el hecho de que el debate tenía un objetivo claramente definido “*Indicar qué información era posible inferir sobre la comprensión de los estudiantes de educación secundaria sobre el razonamiento proporcional a partir de la manera en la que resolvían los problemas*”, y se apoyaba en un material con una estructura clara usado en la realización de la actividad inicial. La conjunción de estas dos características, un objetivo claramente definido y un material de apoyo al debate con una estructura clara y coherente con el objetivo pretendido, parece que facilitaron la generación de este discurso progresivo al proporcionar una referencia clara sobre lo que se debía debatir. Como consecuencia, podemos asumir que la estructura b-learning del entorno de aprendizaje determinó las características de las relaciones entre los estudiantes para profesor y el conocimiento (Llinares & Olivero, 2008).

Los resultados obtenidos contribuyen a la creciente línea de investigación sobre cómo los estudiantes para profesor y los profesores puedan llegar a ver y dotar de sentido las situaciones de enseñanza y cómo determinadas experiencias pueden apoyar el desarrollo de esta competencia (Kersting et al., 2010; Lin, 2005; Llinares & Valls, 2010, Prieto & Valls, 2010; Santagata, Zannoni & Stigler, 2007; van Es & Sherin, 2002). Las evidencias aportadas por la investigación descrita apuntan en la dirección de que esta competencia docente se puede aprender. En nuestro caso además, algunas características del entorno b-learning diseñado parecen apoyar el desarrollo de esta competencia. Aunque en estos momentos es necesario seguir investigando en esta línea, es posible asumir que algunas características de los entornos de aprendizaje en los programas de formación de profesores pueden apoyar el desarrollo de un discurso progresivo de los estudiantes para profesor guiado por la definición de objetivos coherentes con el material de apoyo usado.

Reconocimientos. Esta investigación se ha realizado con apoyo del proyecto de investigación I+D nº EDU2008-04583, del MICINN. España.

Referencias y bibliografía

Alsawie, O. & Alghazo, I. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability

- to analyze mathematics teaching. *Journal of mathematics Teacher Education*, 13, 223-241.
- De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D. & Verschaffel, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement*. New York: Springer.
- Fernández, C. & Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje*, 34(1).
- Friel, S. N. & Carboni, L. W. (2000). Using video-based pedagogy in an elementary mathematics methods course. *School Science and Mathematics*, 100(3), 118-127.
- Jacobs, V.R., Lamb, L.L. & Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Kersting, N.B., Givvin, K.B., Sotelo, F.L. & Stigler, J.W. (2010). Teachers' analyses of classroom video predict student learning of mathematics: Further explorations of a novel measure of teacher knowledge. *Journal of Teacher Education*, 61(1-2), 172-181.
- Levin, D., Hammer, D. & Coffey, J. (2009). Novice teachers' attention to student thinking. *Journal of Teacher Education*, 60(2), 142-154.
- Lin, P. (2005). Using research-based video-cases to help pre-service primary teachers conceptualize a contemporary view of mathematics teaching. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 3, 351-377.
- Llinares, S. & Olivero, F. (2008). Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers. technologies, interactions and new forms of discourse. En K. Krainer & T. Wood (Eds.), *Participants in Mathematics Teacher Education. Individuals, Teams, Communities and Networks* (pp.155-180). Rotterdam /Taipei: Sense Publishers.
- Llinares, S. & Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13 (2), 177-196.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Modestou, M. & Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology*, 27(1), 75-92.
- Penalva, M.C., Rey, C. & Llinares, S. (2011). Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis de un contexto b-learning en didáctica de la matemática. *Revista Española de Pedagogía*, LXIX, 248, 101-118.
- Prieto, J. L. & Valls, J. (2010). Aprendizaje de las características de los problemas aritméticos elementales de estructura aditiva en estudiantes para maestro. *Educación Matemática*, 22(1), 57-85
- Santagata, R., Zannoni, C. & Stigler, J.W. (2007). The role of lesson analysis in pre-service teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 123-140.
- Schrire, S. (2006). Knowledge building in asynchronous discussion groups: Going beyond quantitative analysis. *Computers & Education*, 46, 49-70.
- Sherin, M. G. (2001). Developing a professional vision of classroom events. En T. Wood, B. Scott Nelson, & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy: Teaching elementary school mathematics* (pp. 75-93). Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Start, J. R. & Strickland, S. K. (2007). Learning to observe: Using video to improve pre-service teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 107-125.
- Strijbos, J., Martens, R.L., Prins, F.J. & Jochems, W.M.G. (2006). Content analysis: What are they talking about? *Computers & Education*, 46, 29-48.

- Van Dooren, W., De Bock, D. & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication... and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction*, 28(3), 360-381.
- van Es, E. & Sherin, M.G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571-596.
- Weinberger, A. & Fisher, F. (2006). A framework to analyze argumentative knowledge construction in computer-supported collaborative learning. *Computers & Education*, 46, 71-95.
- Wells, G. (2002). *Dialogic inquiry. Towards a sociocultural practice and theory of education*. Cambridge: Cambridge University Press.