CONEXIONES MATEMÁTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE UNA TAREA DE ÁREA POR ESTUDIANTES DE 13-14 AÑOS[i]

Mathematical connections in solving an area tasks by 13-14 year-old students

Caviedes, S[a]., De Gamboa, G[b]. y Badillo, E[b].

[a] Universidad de Los Lagos, [b]Universitat Autónoma de Barcelona

Resumen

Este estudio busca identificar las conexiones matemáticas que establecen estudiantes de secundaria cuando resuelven tareas de área. Siguiendo un enfoque de tipo cualitativo y, mediante el uso de métodos mixtos, se analizan las justificaciones escritas y los procedimientos que los estudiantes utilizan para resolver una tarea de área de un cuestionario. Los resultados muestran que los estudiantes que logran resolver con éxito la tarea establecen conexiones intra-matemáticas entre distintos objetos matemáticos, lo que les permite coordinar de manera simultánea diferentes representaciones, propiedades y procedimientos.

Palabras clave: *conexiones matemáticas, área de figuras planas, métodos mixtos*

Abstract

This study seeks to identify the mathematical connections that secondary school students establish when solving area tasks. Following a qualitative approach and using mixed methods, the written justifications, and procedures that students use to solve an area task from a questionnaire are analyzed. The results show that students who manage to successfully solve the task establish intra mathematical connections between different mathematical objects, allowing them to simultaneously coordinate different representations, properties, and procedures.

Keywords: *mathematical connections, area of flat figures, mixed methods*

INTRODUCCIÓN

El término conexión matemática puede hacer referencia a una relación entre ideas matemáticas, una relación que construye el alumno, o a un proceso que forma parte de la actividad de hacer matemáticas en el aula (Businskas, 2008), entre otras. Al establecer conexiones matemáticas, los estudiantes desarrollan competencias clave, por ejemplo, vincular el conocimiento conceptual y procedimental (Hiebert y Carpenter, 1992) o reconocer múltiples representaciones de un mismo concepto (Businskas 2008; De Gamboa et al., 2022), competencias fundamentales para resolver con éxito tareas de área. Diversos estudios han enfatizado los aspectos conceptuales a desarrollar para mejorar la forma en que los estudiantes resuelven tareas de área y su abanico de estrategias, (p.e., Clements et al., 2018; Zacharos, 2006), sin embargo, aún no está claro cómo se establecen las conexiones matemáticas en un proceso de resolución. Así, este estudio es una aproximación hacia aquellas conexiones matemáticas necesarias para resolver con éxito tareas de área y busca responder a la pregunta ¿qué tipo de conexiones matemáticas establecen los estudiantes para resolver con éxito tareas de área? Para responder a esta pregunta, se busca caracterizar las conexiones matemáticas que establecen los estudiantes en la resolución exitosa de una tarea de área.

MARCO TEÓRICO

Conexiones matemáticas

Existe consenso en la literatura al identificar dos grandes tipos de conexiones: las conexiones intra-matemáticas y las conexiones extra-matemáticas. Las conexiones intra-matemáticas se forman

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2023). Conexiones matemáticas en la resolución de tareas de área por estudiantes de 13-14 años. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 187–194). SEIEM.

dentro del contexto de las matemáticas y, en concordancia con De Gamboa y Figueiras (2014) se diferencian dos tipos: conexiones intra-matemáticas de tipo conceptual y conexiones intra-matemáticas relacionadas con procesos. Las primeras se refieren a una relación entre diferentes objetos matemáticos. Las segundas son conexiones que enfatizan explícitamente procesos transversales a la actividad matemática (p.e., heurísticas de resolución de problemas). Debido al objetivo de este estudio, nos centramos en las conexiones intra-matemáticas de tipo conceptual. Para esto, tomamos en consideración el modelo propuesto por Rodríguez-Nieto et al. (2022) y refinado por De Gamboa et al. (2022), quienes introducen la noción de conexión elemental. En términos generales, las conexiones intra-matemáticas pueden entenderse como relaciones entre dos objetos matemáticos O_1 y O_2. En muchos casos, estas conexiones son desencadenadas por otras conexiones, y la coordinación entre ellas puede entenderse, a su vez, como una conexión más compleja (De Gamboa et al., 2022). Por tanto, las conexiones intra-matemáticas pueden entenderse como una red de conexiones más simples entre dos objetos O_1 y O_2, que llamamos conexiones elementales (De Gamboa et al., 2022). Se toman en consideración las siguientes categorías de conexiones elementales:

Representación equivalente: La conexión elemental se establece entre dos representaciones de un mismo objeto matemático ($R_1 \rightarrow R_2$). Relaciona representaciones equivalentes (tratamientos dentro de un mismo registro de representación). Por ejemplo, cuando un alumno conecta el trazado auxiliar de líneas con la visualización de unidades figurales que componen una figura para resolver una determinada tarea (Businskas, 2008).

Representación alternativa: La conexión elemental se establece entre dos representaciones del mismo objeto matemático ($R_1 \rightarrow R_2$). Relaciona representaciones alternas (cambio de registro de representación). Por ejemplo, representar el área geométrica y simbólicamente. Es propuesta por Businskas (2008) en relación con la noción de transformación de conversión (Duval, 2017).

Procedimiento: La conexión elemental se establece entre un concepto y un procedimiento ($C \rightarrow P$) que puede utilizarse al tratar el concepto. Por ejemplo, el uso de la descomposición en unidades congruentes para trabajar el concepto de superficie (Dolores-Flores y García-García, 2017; Businskas, 2008).

Implicación: La conexión elemental se establece entre dos proposiciones ($PR_1 \rightarrow PR_2$), se refiere a implicaciones o argumentos *si-entonces*. Por ejemplo, si un rectángulo tiene una longitud l y una anchura w, entonces su área es $l \times w$. Así, si una forma es un cuadrado, entonces su área se puede encontrar multiplicando la longitud de un lado por sí misma (Businskas, 2008).

Justificación: La conexión elemental se establece entre dos proposiciones ($PR_1 \rightarrow PR_2$), donde (PR_1) representa una premisa y (PR_2) una conclusión que justifica prácticas matemáticas. Por ejemplo, dos polígonos son congruentes si sus lados y ángulos son respectivamente congruentes. Por lo tanto, dos polígonos congruentes tienen áreas iguales (De Gamboa et al. 2022).

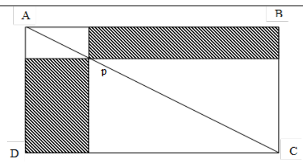
Elementos que intervienen en la resolución de tareas de área

Sarama y Clements (2009) señalan que la enseñanza y construcción del área y sus procesos de medición implican el aprendizaje y construcción de diversos conceptos, propiedades y procedimientos, tales como el área como atributo, la unidad de medida, la conservación, la acumulación y aditividad, la transitividad, la estructuración espacial, y la partición equitativa. La comprensión y coordinación de los elementos mencionados, podría potenciar una comprensión más sólida en los estudiantes (Barret et al., 2017). En este sentido, Sarama y Clemens (2009) señalan que el desarrollo de conceptos, propiedades y procedimientos es de naturaleza interactiva, esto es, que se refuerzan mutuamente (Clements et al., 2018; Sarama y Clements, 2009). Así, Clements et al. (2018) sostienen que los procedimientos pueden aprenderse de manera significativa si están vinculados al conocimiento conceptual, o de memoria si son de naturaleza mecánica. En este sentido, diversos estudios reportan que los estudiantes de los primeros años de Educación secundaria presentan dificultades al resolver tareas de áreas (Caviedes et al. 2020; Douady y Perrin-Glorian, 1989; Kamii y Kysh, 2006), relacionadas con una comprensión limitada de los elementos que subyacen al uso de fórmulas, y a escasas estrategias de resolución. Atendiendo dichas dificultades, Caviedes et al. (2021) proponen una caracterización de distintos significados parciales del área, a fin de identificar aquellos objetos que deben ser coordinados en los procesos de medición de áreas. Otros estudios ponen en evidencia las dificultades de los estudiantes con la propiedad de conservación del área (Kospentaris et al., 2011, Zacharos, 2006), cuyo estudio implica un conocimiento amplio sobre la variedad de procedimientos que puede admitir una tarea, además del estudio y análisis de otras propiedades geométricas (Sarama y Clements, 2009), así como el uso de diferentes registros de representación y sus transformaciones (Duval, 2017).

MÉTODO

El estudio se sitúa en un paradigma interpretativo con un enfoque mixto exploratorio y confirmatorio (Rocco et al., 2003). Se utiliza un enfoque cualitativo y un análisis de contenido (Krippendorff, 2004) para identificar las conexiones matemáticas que se establecen en las resoluciones de los estudiantes. Además, se utiliza un enfoque cuantitativo y un análisis estadístico implicativo (Gras et al., 2008) para profundizar en las relaciones entre los objetos matemáticos definidos en el análisis cualitativo. Se realiza la recogida de datos en el tercer trimestre del curso escolar 2018-2019. Los participantes fueron 83 estudiantes de 13-14 años de un centro concertado de España. Se diseñó un cuestionario semiestructurado con siete tareas de medida y comparación de áreas de figuras planas que debían resolverse de forma anónima, individual y por escrito, en una única sesión de 90 minutos. Se pidió a los estudiantes justificar por escrito sus resoluciones. Con el fin de comprobar la claridad del cuestionario, y eliminar ambigüedades, se llevó a cabo una prueba piloto que permitió realizar mejoras en los enunciados de las tareas y en el formato global del cuestionario. Las tareas del cuestionario se ordenaron desde aquellas que admiten un tratamiento únicamente cualitativo (sólo procedimientos de naturaleza geométrica), hacia aquellas que admiten un tratamiento cualitativo y cuantitativo, con procedimientos de naturaleza numérica y geométrica de forma complementaria (Douady y Perrin-Glorian, 1989). Así, el uso de fórmulas se incorpora gradualmente y como último paso. En esta comunicación se presenta el análisis de las resoluciones a la Tarea 6 (Tabla 1).

Tabla 1. Tarea propuesta al grupo de estudiantes.

Enunciado	**Representación gráfica de la tarea**
Tarea 6: Por el punto *p* **de la diagonal** AC **del rectángulo** ABCD **se trazan las paralelas de los lados de esta figura.** Así, se obtienen dos rectángulos sombreados. **¿Cuál de los dos rectángulos sombreados tiene mayor área? ¿cómo los sabes?**	 (Adaptado de Castelnuovo, 1981)

Análisis cualitativo de las resoluciones de los estudiantes

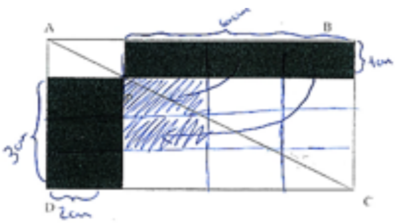
Se realiza un análisis de contenido (Krippendorff, 2004) para identificar las conexiones intra-matemáticas de tipo conceptual que establecen los estudiantes. Se utilizan categorías de análisis previamente definidas y adaptadas. Dichas categorías se corresponden con los objetos matemáticos de Caviedes et al. (2021) y que presentan una reinterpretación de elementos matemáticos señalados por Sarama y Clements (2009) -Tabla 2-. Las resoluciones de los estudiantes se codifican deductivamente utilizando el software MAXQDAplus. Cada objeto matemático de la Tabla 2 contiene códigos diferentes. Un grupo de códigos forma una categoría. Por ejemplo, la categoría procedimiento (P) contiene seis códigos (P1... P6) que detallan diferentes procedimientos utilizados por los estudiantes. Además, se consideran las aportaciones de Duval (2017). Dado que el objetivo del estudio es identificar las conexiones matemáticas que los estudiantes necesitan establecer para resolver con éxito la tarea, el énfasis está en aquellas resoluciones que responden con éxito a la demanda de la tarea. En total se analizaron los protocolos escritos de 41 estudiantes (27 estudiantes responden con dificultad y 15 estudiantes no responden la Tarea). En esta comunicación ejemplificamos el proceso de análisis con los protocolos de dos estudiantes, pues sus resoluciones se consideran representativas del conjunto de estudiantes que resuelve con éxito la Tarea 6 (41 estudiantes).

Tabla 2. Categorías de análisis para la Tarea 6.

Categorías	Descriptor
Procedimientos (P)	(P1) Comparar dos o más superficies de manera directa e indirecta
	(P2) Descomponer dos o más superficies de manera conveniente, gráfica o visualmente
	(P3) Ejecutar movimientos de rotación, traslación y superposición de figuras
	(P4) Estructurar superficies en filas y columnas considerando las medidas de longitud
	(P5) Calcular áreas de manera aditiva contando unidades y/o subunidades que recubren la superficie
	(P6) Medir dimensiones lineales y utilizar fórmulas
Propiedades (Pp) y proposiciones (Pr)	(Pp1) Conservación
	(Pp2) Transitividad
	(Pp3) Acumulación y aditividad
	(Pr1) Todo triángulo es equidescomponible a un paralelogramo
	(Pr2) Dos figuras equivalentes tienen áreas iguales
Conceptos (C)	(C1) Estructuración espacial
	(C2) Unidades de medida no estándar
	(C3) Cantidad de superficie
Representaciones (R)	(R1) Escrita: uso de adjetivos como ‘igual’, ‘más delgada’ ‘más ancha’, ‘el doble’, ‘la mitad’, en relación a las superficies.
	(R2) Manipulativa: uso de objetos físicos (tangram, recortables)
	(R3) Geométrica: uso del trazado auxiliar de líneas para comparar y/o estimar cantidades de superficie.
	(R4) Simbólica: conjunto de los números reales para comparar dos o más superficies o calcular su área. Uso de expresiones algebraicas como el teorema de Pitágoras para obtener las medidas de longitud de un triángulo rectángulo $h^2 = a^2 + b^2$

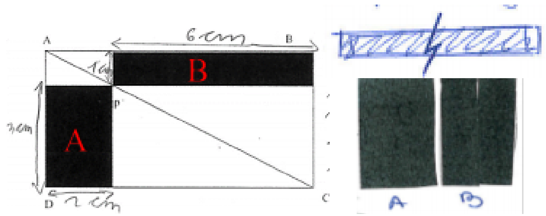
La Figura 1 muestra el proceso de resolución seguido por la estudiante 12 (E.12) y el estudiante 13 (E.13). El E.13 establece diferentes conexiones elementales de procedimiento. La primera conexión se establece entre el concepto de estructuración espacial (C1) y el procedimiento de estructuración en filas y columnas en relación con las medidas de longitud (obtenidas por medición directa) del rectángulo grande (P4), pues E.13 utiliza las dos dimensiones de los rectángulos negros como base para la división del rectángulo grande en rectángulos de 2 cm alineados en 4 filas y 4 columnas. La segunda conexión se establece entre el concepto de unidades de medida no estándar (C2) y el procedimiento de obtención del área aditivamente (P5). Una conexión elemental de implicación entre un proceso de visualización y una proposición (Pr2) permite a E.13 concluir una equivalencia de áreas para los rectángulos negros. Esta última también está asociada a una conexión elemental de justificación entre la propiedad de conservación (Pp1) y el procedimiento de comparación de áreas que dicha propiedad justifica. Por su parte, la E.12 establece tres conexiones elementales de procedimiento. La primera conexión se establece entre el concepto de cantidad de superficie (C3) y el procedimiento de medida directa e indirecta -mide dimensiones lineales y pone en correspondencia los valores utilizando la fórmula- (P6). La segunda conexión se establece entre el concepto de cantidad de superficie (C3) y el procedimiento de descomponer la superficie de forma conveniente (P2). La tercera conexión se establece entre el concepto de cantidad de superficie (C3) y el procedimiento que involucra movimientos de rotación y traslación (P3). Esto con el fin de concluir la equivalencia de superficies mediante una conexión elemental de implicación entre un proceso de visualización y una proposición (Pr2). Como en el caso del E.13, la E.12 establece una conexión elemental de justificación entre la propiedad de conservación (Pp1) y el contexto de comparación de áreas al que se aplica. Además, ambos estudiantes establecen una conexión elemental de representación equivalente entre un proceso de visualización (R3) y la posterior descomposición de las figuras (R3). Se trata de una transformación de tratamiento dentro de un registro de representación de tipo geométrico, mediado por las líneas auxiliares de las representaciones gráficas de las figuras y el trazado auxiliar de líneas que permite realizar descomposiciones estrictamente homogéneas sobre los rectángulos. El uso del registro de representación de tipo geométrico (R3), escrito (R1) y simbólico de tipo numérico (R4), permite a los estudiantes realizar una transformación de conversión y, por tanto, una conexión elemental de representación alternativa. En el caso del E.13, la conexión se establece cuando utiliza el trazado auxiliar de líneas (R3) para descomponer el rectángulo grande y obtener su área mediante un proceso aditivo (R4). En el caso de la E.12, la conexión se establece cuando utiliza, además, el trazado auxiliar de líneas (R3) para descomponer el rectángulo negro y la fórmula del área (R4), para comprobar la equivalencia de áreas.

Figura 1. Resoluciones para la Tarea 6 del cuestionario.



E.13 *"Sus áreas son iguales porque si dividimos los rectángulos negros en rectángulos iguales hay la misma cantidad de estos rectángulos. También uno es el doble de ancho y otro el doble de largo, su área es 6cm²".*

E.12 *"Sus áreas son iguales, he calculado lo que mide cada uno y luego he calculado el área que es 6 cm². He llegado a la conclusión que son exactamente iguales, lo que pasa es que su forma es diferente. He cortado el rectángulo, por la mitad y lo he puesto encima y al lado del otro".*



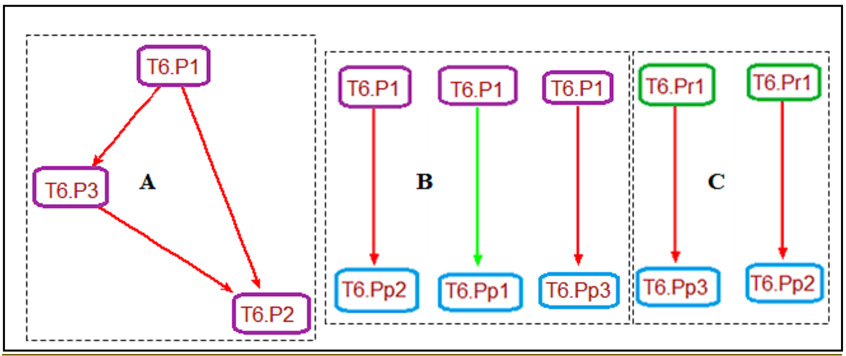
Análisis cuantitativo de las resoluciones de los estudiantes

Para profundizar en el análisis de las conexiones se realiza un análisis estadístico implicativo -SIA- (Gras et al., 2008). Este análisis permite identificar y organizar las relaciones de cuasi implicación mediante un gráfico con flechas que relaciona las variables con las implicaciones más fuertes. La cuasi implicación entre las variables A → B indica que, si los estudiantes responden afirmativamente a A, es probable que respondan a B. En este estudio, se utiliza la flecha → para indicar una relación de cuasi implicación según el significado descrito anteriormente. La doble flecha ↔ indica una relación de cuasi implicación recíproca. En lo sucesivo, se utiliza el término implicación en lugar de cuasi implicación, en aras de la simplicidad. Las variables consideradas para el análisis implicativo son de tipo binario y coinciden con las presentadas en la Tabla 2. Se asigna un valor de 1 a cada variable movilizada en las respuestas de los estudiantes y un valor de 0 a cada variable no movilizada. Se utiliza el paquete C.H.I.C versión 0.27 en la consola R versión 3.5.2. Para diferenciar cada variable movilizada se utilizan colores. Así, los procedimientos (P) se ilustran en morado, las propiedades en celeste (Pp), las proposiciones (Pr) en verde y las representaciones (R) en naranja. Los gráficos presentados contemplan la totalidad de estudiantes que resuelve con éxito la Tarea 6 (41 estudiantes). Los resultados se focalizan en este análisis.

RESULTADOS

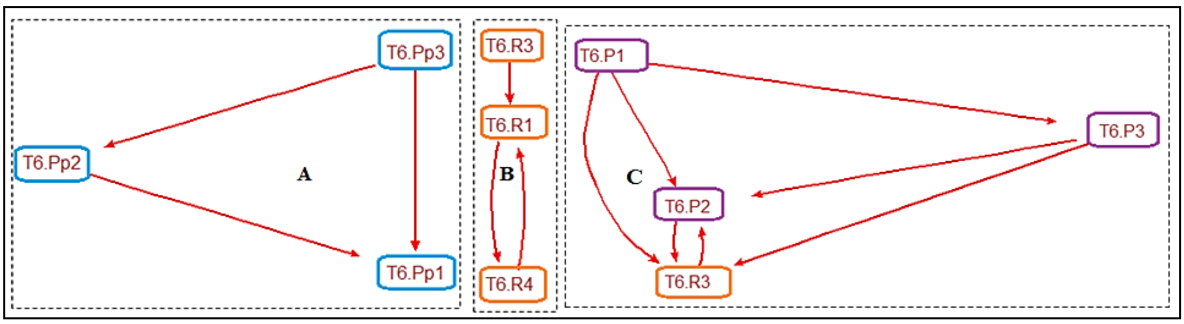
Los gráficos implicativos de la Figura 2 muestran diferentes relaciones con un 98% de significancia indicada por las flechas rojas y 95% por la flecha verde. La Figura 2A muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de implicación entre los procedimientos de comparación, descomposición y reorganización de superficies (P1→P2/P1→P3). Los estudiantes que utilizan este último procedimiento establecen una conexión elemental de implicación con el procedimiento de descomposición de superficies (P3→P2). La Figura 2B muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de justificación entre el procedimiento de comparación de superficies y las propiedades de conservación, transitividad y acumulación y aditividad (P1→Pp1/ P1→Pp2/ P1→Pp3), lo que indica que dicho procedimiento desencadena el uso de las propiedades implicadas en la medición de áreas. La Figura 2C muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de justificación entre una proposición (todo triángulo es equidescomponible con un paralelogramo) y las propiedades de transitividad y acumulación y aditividad (Pr1→Pp2/ Pr1→Pp3), indicando que el uso de dicha proposición justifica ciertas propiedades.

Figura 2. Relaciones implicativas entre procedimientos, propiedades y proposiciones para la Tarea 6.



Los gráficos implicativos de la Figura 3 muestran relaciones con un 98% de significancia indicada por las flechas rojas. La Figura 3A muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de implicación entre la propiedad de acumulación y aditividad, y la propiedad de conservación y transitividad (Pp3→Pp1/Pp3→Pp2). Así, se evidencia que el uso de la propiedad de acumulación y aditividad (Pp3) es un aspecto clave, y precursor, para que los estudiantes sean capaces de utilizar la conservación (Pp1) y la transitividad (Pp2) al resolver tareas de medición de áreas.

Figura 3. Relaciones implicativas entre propiedades, representaciones y procedimientos para la Tarea 6.



La Figura 3B muestra que los estudiantes establecen una conexión elemental de representación alternativa entre el registro de representación de tipo geométrico y de tipo escrito (R3→R1). Esto indica que aquellos estudiantes que utilizan el trazado de auxiliar de líneas en sus resoluciones justifican por escrito lo que hacen en la Tarea 6. El registro de representación de tipo escrito y simbólico se conectan recíprocamente mediante una conexión elemental de representación alternativa. La Figura 3C muestra que los estudiantes establecen conexiones elementales de implicación entre los procedimientos de comparación, descomposición y reorganización de superficies, y el registro de representación de tipo geométrico (P1→R3/P2→R3/R3→P2/P3→R3). Así, para que estos procedimientos se ejecuten los estudiantes necesitan visualizar las unidades figurales que componen una figura, y realizar el trazado auxiliar de líneas para descomponerla.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados sugieren que los estudiantes que logran responder con éxito a la demanda de la Tarea 6 establecen diferentes conexiones elementales. El establecimiento de conexiones elementales de representación equivalente/alternativa permite la coordinación de los registros de representación de tipo geométrico y simbólico, lo que se presenta como un aspecto clave en la resolución de las tareas, pues permite a los estudiantes realizar descomposiciones y transformaciones sobre las figuras. Esto último permitiría a los estudiantes comparar áreas y calcularlas (Caviedes et al., 2021). Así, el establecimiento de estas conexiones elementales posibilita a los estudiantes reconocer y coordinar múltiples representaciones de un mismo concepto (Businskas 2008; De Gamboa et al., 2022), y hacer más robustas sus resoluciones (Barret et al., 2017). Los procedimientos relacionados con la comparación, descomposición y reorganización de superficies están conectados entre sí mediante conexiones elementales de implicación, lo que subraya la importancia del uso coordinado de procedimientos de naturaleza geométrica y numérica para resolver con éxito tareas de área (Caviedes et al., 2020, 2021; Douady y Perrín-Glorian, 1989). El análisis implicativo permite ilustrar la manera en que los procedimientos se coordinan en un proceso de resolución, evidenciado que hay procedimientos que anteceden a otros. Los procedimientos mencionados, a su vez, se asocian a conexiones elementales de justificación, específicamente, cuando las propiedades de conservación, transitividad y acumulación y aditividad se aplican a contextos de comparación y descomposición de superficies. Esto sugiere que las conexiones elementales de justificación permiten a los estudiantes visualizar figuras geométricas y realizar descomposiciones sobre ellas. El análisis implicativo ilustra la manera en que las distintas propiedades se conectan, evidenciando que la acumulación y aditividad, en este tipo de tareas, desencadena el uso de la conservación del área y la transitividad. Esto sugiere que las propiedades geométricas deben abordarse de manera conjunta en la resolución de tareas de área (Sarama y Clements, 2009). Aunque diversas investigaciones abordan las dificultades de los estudiantes en la comprensión de la propiedad de conservación del área (Kospentaris et al., 2011, Zacharos, 2006) no lo hacen relacionando dicha propiedad con otras, lo que pone de manifiesto la relevancia de este estudio. Estos resultados son un ejemplo de la importancia de las conexiones en el aprendizaje de los procesos de medición de áreas, y apuntan a la necesidad de seguir explorando cómo dichas conexiones pueden ayudar a los estudiantes a resolver con éxito tareas complejas.

Referencias

Barrett, J. E., Clements, D. H., y Sarama, J. (2017). Children's measurement: A longitudinal study of children's knowledge and learning of length, area, and volume. En B. Herbel-Eisenmann (Ed.), *Journal for Research in Mathematics Education* (Vol. 16, pp. 254). National Council of Teachers of Mathematics.

Businskas, A. (2008). *Conversations about connections: how secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections*. Unpublished dissertation, Faculty of Education, Simon Fraser University.

Castelnuovo, E. (1981). *La geometría*. Ketres.

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2021). Mathematical objects that configure the partial area meanings in task-solving. *International Journal in Mathematics Education, Science and Technology*. 1-20. https://10.1080/0020739X.2021.1991019

Caviedes, S., De Gamboa, G. y Badillo, E. (2020). Procedimientos utilizados por estudiantes de 13-14 años en la resolución de tareas que involucran el área de figuras planas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 34*(68), 1015-1035. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a09

Clements, D. H., Sarama, J., Van Dine, D. W., Barrett, J. E., Cullen, C. J., Hudyma, A., Dolgin, R., Cullen, A., y Eames, C. L. (2018). Evaluation of three interventions teaching area measurement as spatial structuring to young children. *Journal of Mathematical Behavior*, *50*, 23-41. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.12.004

De Gamboa, G., Caviedes, S., y Badillo, E. (2022). Mathematical connections and the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge. *Mathematics, 10*(21), 1-24. https://doi.org/10.3390/math10214010

De Gamboa, G. y Figueiras, L. (2014). Conexiones en el conocimiento matemático del profesor: propuesta de un modelo de análisis. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 337-344). SEIEM.

Dolores-Flores, C., y García-García, J. (2017). Conexiones intramatemáticas y extramatemáticas que se producen al resolver problemas de cálculo en contexto: un estudio de casos en el nivel superior. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 158-180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a08

Douady, R., y Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics, 20*(4), 387–424.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking – The registers of semiotic representations.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F., y Spagnolo, F. (2008). *Statistical implicative analysis*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-540-78983-3

Hiebert, J., y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65–97). Macmillan.

Kamii, C., y Kysh, J. (2006). The difficulty of "length x with": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior, 25,* 105-115. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.02.001

Kospentaris, G., Spyrou, P., y Lappas, D. (2011). Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks. *Educational Studies in Mathematics, 77*(1), 105-127. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9303-8

Krippendorff, K. (2004). *Content Analysis: An Introduction to its Methodology*. Sage.

Rocco, T., Bliss, L., Gallagher, S., Pérez, A., y Perez-Prado, A. (2003). Taking the next step: Mixed methods taking the next step: Mixed methods research in organizational systems research in organizational systems. *Information Technology, Learning, and Performance Journal, 21*(1), 19-29.

Rodríguez-Nieto, C. A., Font Moll, V., Borji, V., y Rodríguez-Vásquez, F. M. (2022). Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(9), 2364-2390. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071

Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. Routledge. https://doi.org/10.4324/9780203883785

Smith, J., Males, L. y Gonulates, F. (2016). Conceptual limitations in curricular presentations of 546 area measurement: One nation's challenges. *Mathematical Thinking and Learning*, *18*(4), 239–270. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1219930 548

Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 224-239. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2006.09.003

[i] Estudio financiado por ANID- Chile/2018-72190032, PID2019-104964GB-I00 y GIPEAM, SGR-2017-101.