Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O CASO JONATHAN O COMPLEXO DE ÁLGEBRA[1]

Le Cas Jonathan Le Complexe De L'algèbre

Jean-Claude RAUSCHER

Trad. Méricles Thadeu Moretti

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Este estudo apresenta o acompanhamento realizado durante três anos, que vai do *quatrième*[2] ao *seconde,* de um aluno com muitos problemas de aprendizagem em álgebra. O jovem confundia os escritos de expressões numéricas e algébricas, assim como todos os termos que designavam operações de cálculo a serem feitas. Inicialmente, o acompanhamento consistiu em ajudá-lo nos deveres escolares que tratavam de três categorias de atividades matemáticas: transformação de expressões algébricas, resolução de equação, equacionamento[3] de um problema para resolvê-lo. Essas três categorias pareciam-lhe sem relação. Para ajudá-lo na aprendizagem, foi necessário inventar atividades que tratavam de substituições das escritas de expressões no cálculo algébrico, no cálculo com números e na articulação da linguagem com as escritas correspondentes. Isso promoveu-lhe uma grande mudança de atitude e foi, desse modo, possível começar a fazê-lo compreender o equacionamento de um problema e a sua resolução. O objetivo deste estudo clínico é, por um lado, ouvir a voz de um aluno face às atividades e às tarefas algébricas propostas em sala de aula e, por outro lado, evidenciar a complexidade semiocognitiva dessas atividades e tarefas. Para tanto, escrevo a evolução de Jonathan abordando os pontos seguintes: análise semiocognitiva de atividades em álgebra, as transformações de expressões algébricas, resolução de equação, o equacionamento de dados do enunciado de um problema, análise retrospectiva da análise do equacionamento de um problema e os primeiros passos em álgebra feitos por Jonathan. Finalizo com uma perspectiva que a evolução de Jonathan pode trazer aos professores na maneira de como fazer com que os alunos entrem na compreensão da álgebra e a utilização de equações.

Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica, Aprendizagem da Álgebra, Complexo de Álgebra

---

[1]Texto publicado em português e em francês em: Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semio-cognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval. (Orgs. Méricles T. Moretti, Celia F. Brandt). Florianópolis : Revemat/UFSC, 2020. Disponível em : https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/209074

[2]O ensino básico francês obrigatório é composto de 12 anos: 5 anos do nível de ensino *primaire (école élémentaire)* (6 a 10 anos de idade) (CP, CE1, CE2, CM1, CM2); 4 anos do *collège* (11 e 14 anos de idade) (sixième, cinquième, quatrième, troisième) e; 3 anos do *lycée* (15 a 17 anos de idade) (*seconde, premier*, *terminale)*. A denominação utilizada pelo autor será mantida.

[3]Usaremos o termo "equacionamento" para o termo francês *mise en équation*, cujo significado é transformar em equação elementos matemáticos que constam na formulação em língua natural de um problema.

RESUMÈ

Cette étude présente l'accompagnement durant trois ans, de la quatrième à la seconde, d'un élève qui était complètement bloqué en algèbre. Il confondait toutes les écritures d'expressions numériques et algébriques, ainsi que tous les termes désignant des opérations de calcul à faire. L'accompagnement a d'abord consisté à l'aider dans ses devoirs qui portaient sur trois champs de tâches mathématiques : transformation d'expressions algébriques, résolution d'équation, mise en équation pour résoudre des problèmes. Ces trois champs lui paraissaient sans rapport. Pour l'aider à comprendre, il a fallu inventer des activités portant à la fois sur des substitutions d'écritures d'expressions dans le calcul numérique et algébrique et sur l'articulation du langage avec les écritures correspondantes. Cela a entraîné un changement complet d'attitude. Il a alors été possible de commencer à lui faire comprendre la mise en équation et la résolution de problème. Le but de cette étude clinique est, d'une part, de faire entendre la voix d'un élève face aux activités et aux tâches algébriques proposées en classe, et, d'autre part de mettre en évidence la complexité sémio-cognitive de ces activités et de ces tâches. Pour cela nous décrirons l'évolution de Jonathan en abordant les points suivants : l'analyse sémio-cognitive des activités en algèbre, les transformations d'expressions algébriques, les résolutions d'équations, la mise en équation d'un énoncé de problème, l'analyse rétrospective de la complexité de la mise en équation des données d'un problème et les premiers pas en algèbre faits par Jonathan. Nous terminerons par les perspectives que l'évolution de Jonathan peut ouvrir aux 457 enseignants sur la manière de faire entrer leurs élèves dans la compréhension de l'algèbre et dans l'utilisation des équations.

Most Cles: Registres De Représentation Sémiotique, Apprentissage De L'algèbre, Algèbre Complexe

O CONTEXTO

Tudo começou, fortuitamente, em janeiro de 2016, Jonathan era um estudante com dificuldades escolares, especialmente em matemática. Eu o conheci através dos seus pais quando ele cursava o *quatrième* (ver nota de rodapé 2) e me ofereci para acompanhá-lo nos estudos escolares de uma forma flexível (é claro, não remunerada). E eles aceitaram. O pedido inicial dos pais era que ele tivesse "ao menos a nota mínima de aprovação".

Jonathan, por outro lado, reclamava com muita veemência que não gostava dessa disciplina e que não percebia a serventia dela. Não obstante, ele era um aluno "aplicado". No início da nossa caminhada, ele disse-me várias vezes que aceitava esse trabalho de acompanhamento na esperança de não ser notado negativamente pelos seus professores e de obter notas que agradassem aos seus pais. Foi assim que me reuni regularmente, semana após semana, em períodos escolares e, por vezes durante as férias, com Jonathan. E, na oportunidade, não imaginávamos que os encontros ocorreriam por três anos: de janeiro a junho de 2016, quando o jovem estava no *quatrième*. Depois, em 2016/2017, no *troisième,* ao final do qual obteve o "*Diplôme National du Brevet*"[4]. Tinha, então, o desejo de fazer uma aprendizagem nos ofícios da pintura, mas foi-lhe recusada por ser demasiado jovem. Ele não queria repetir também o *troisième,* conforme era o desejo de seus pais, para que pudesse se preparar melhor para o que vinha pela frente. Finalmente, em 2017/2018, no *seconde* de uma escola secundária profissional, na seção

[4] É um diploma que é conferido ao aluno após a aprovação no último ano do *collège* (*troisième*) e de uma prova bem-sucedida.

“colaborador de arquiteto”, depois de um curso dito de imersão[5], foi aceito, em abril, em uma seção de preparação para as profissões de pintura, um tipo de formação que correspondia bem ao seu desejo.

Isso foi para mim uma verdadeira aventura, pude observar a profundidade das dificuldades que Jonathan enfrentava quando da abordagem da álgebra elementar. Acima de tudo, pude ver que, mês após mês, ano após ano, nada tinha mudado realmente para Jonathan. As mesmas dificuldades profundas reapareciam, quaisquer que fossem as atividades ou tarefas matemáticas propostas em sala de aula. E isso levou-me, gradualmente, a desenvolver atividades e tarefas muito diferentes para o estudante na esperança de que o ajudasse a superar aquele primeiro limiar invisível que torna a álgebra incompreensível para muito mais alunos do que se pode imaginar. E para Jonathan isso foi um processo muito lento na conscientização do modo de trabalhar com os escritos simbólicos. A evolução do desenvolvimento de nossas reuniões e o que provocaram é o que vou apresentar neste trabalho.

1 O DESENROLAR DOS ENCONTROS

Em geral, quer seja frente a frente ou lado a lado no convívio, o trabalho foi feito, prioritariamente, conforme os “deveres escolares” do estudante, muitas vezes de urgência, como: um trabalho de casa, exercícios no livro de teste ou na preparação para uma avaliação etc.

Já no começo, percebi que o caminho seria enorme, pareceu-me até assustador. Pude observar, de imediato, que Jonathan estava completamente sem ação nos cálculos com números inteiros. Essas dificuldades inibiam-no nas tarefas matemáticas propostas em sala de aula. Desde o início e, por vezes, durante as férias escolares, propus a Jonathan tarefas no conjunto dos inteiros, tarefas que eram independentes das solicitadas nas aulas. Confiando em mim, ele estava feliz por fazê-las. Mais tarde, como era de se esperar, essas atividades paralelas também se aplicavam ao domínio da álgebra. Jonathan viu-se, assim, confrontado com duas fontes de atividades ou tarefas: as encontradas na escola, que o preocupavam principalmente; e àquelas inventadas por mim à medida que nos encontrávamos, observações e minhas análises. Foi assim que se instalou e se desenvolveu o acompanhamento de Jonathan desde o *quatrième* até o final do *seconde*

[5] É um estágio onde o aluno não vai à escola por uma semana ou duas, mas vai trabalhar para um artesão profissional.

profissional no *lycée* (ver a nota 2 de rodapé).

A necessidade de registrar as observações após cada sessão de trabalho para poder bem acompanhar o estudante impôs-se. A partir destas notas relatarei a trajetória do jovem ao longo de quase três anos. Foi necessário voltar às dificuldades encontradas e não ultrapassadas, nas atividades numéricas, no cálculo com números negativos e depois com os escritos algébricos. Evidentemente, tarefas específicas seriam necessárias para ajudarem-me a compreender as razões que levavam o rapaz a bloqueios e confusões, bem como permitissem-lhe compreender as tarefas matemáticas exigidas em aula. Essas anotações permitem-me hoje descrever a evolução de Jonathan na sua aprendizagem matemática, compreendendo-se tal evolução pela relação de confiança estabelecida e afirmada entre nós, numa mudança gradual de atitude, baseada em primeiro lugar, "resistir" e, segundo aceitar as inovações propostas, interessando-se por elas; algo que, ao fim, permitiu-lhe acessar verdadeiras atividades matemáticas.

A primeira etapa (janeiro de 2016 a junho de 2017 nas séries do *quatrième* e *troisième*) foi aquela em que, com paciência, tentei devolver a confiança a Jonathan, acompanhando-o no percurso escolar prescrito por seus professores. Foi o período no qual, apesar da sua boa vontade aparente, o jovem mostrou-se, ao mesmo tempo, relutante e ansioso. Naquele período, o estudante encontrava pretexto em tudo para fugir do trabalho (em um SMS de algum de seus colegas de turma, na ida à toalete etc.). Foi, também, uma época em que eu estava bastante perdido, tendo em vista as suas dificuldades, mas não deixou de ser um período precioso e fundamental, uma vez que, com o recuo necessário, permitiu-me analisar o que não ia bem nas nossas trocas e, assim, elaborar e apresentar novas tarefas extracurriculares. Além disso, foi um momento inestimável para compreender como se ensina álgebra a uma grande parte dos alunos, começar a olhar o ensino da álgebra no *collège* de uma forma diferente e considerar atividades que levem, de fato, os alunos a compreensão e utilização da álgebra. A segunda fase é o último ano (de setembro de 2017 a junho de 2018, *seconde* em *lycée* profissional). Na verdade, essa etapa começou com a minha leitura do artigo de Duval e Pluvinage (2016) o qual deu origem a trocas sobre o que eu já tinha observado e tentado fazer durante os dois primeiros anos. Desde então, pude, em consulta com eles, propor e testar novas tarefas para Jonathan. As propostas inovadoras poderiam ser testadas e modificadas de acordo com as reações do estudante. Foi durante esse período que a atitude do aluno em relação à aprendizagem mudou realmente para melhor. As suas táticas dilatórias em relação aos trabalhos de casa tornaram-se raras e quase desapareceram, dando lugar a um entusiasmo, moderado é verdade, mas real nas suas manifestações.

2 JÁ NO COMEÇO, OS MAL-ENTENDIDOS E BLOQUEIOS COM O CÁLCULO COM NÚMEROS

Jonathan ficava completamente travado com o cálculo com números inteiros. Tinha até mesmo dificuldades com a adição, subtração e multiplicação de números inteiros com apenas um único dígito. Quando lhe pedia para calcular 4 × 6 sem a calculadora, ele jogava o jogo da adivinhação à espera da minha aprovação. Para subtrações de números com dois dígitos, o estudante utilizava a calculadora ou realizava a operação subtraindo em cada coluna o menor do maior dígito: “43 - 17= 34”. *A escrita de números inteiros parecia-lhe apenas uma justaposição de dois dígitos,* uma vez que não estava ciente do princípio da escrita posicional de base 10. Isso o impedia, obviamente, de fazer a operação mentalmente (ou mesmo, com um suporte material) de adições simples como 17 + 23. E quando se tratava de calcular 54 – 41, sem a utilização da calculadora ou operação armada (em que 41 é colocado sob 54 com um traço), e que eu propunha questionando a diferença entre 41 e 54: “41 + ? = 54”, ele permanecia com ares de dúvida.

A distinção entre “expressões incompletas” (54 – 41 ou 24 : 8) e “expressões completas” (41 + ? = 54 ou 41 + 13 = 54) (Duval, 2019, p. 107) permite-nos compreender por que razão essas operações numéricas têm, de alguma forma, o mesmo funcionamento que os escritos literais utilizados em fórmulas ou nos escritos simbólicos da álgebra elementar: baseia-se no fato de que duas expressões equivalentes poderem ser substituídas uma pela outra. Para Jonathan, não havia nenhuma relação entre “54 - 41 = ? ” e “41 + ? = 54”, eram expressões totalmente diferentes, pois ele não tinha ideia da equivalência das duas proposições, em que uma das quais poderia ser obtida a partir da outra, apenas passando um termo de um membro para o outro de igualdade numérica. Ele, também, enfrentava essas mesmas dificuldades com multiplicações e divisões: “8 × ? = 24 e 24 ÷ 8 = ?”. No entanto, a possibilidade de considerar esse tipo de substituição está na base de qualquer atividade do cálculo.

Jonathan já apresentava dificuldades no ensino *primaire*, razão a mais para que apresentasse dificuldades crescentes em noções sobre números com os quais se deparava no *collège*: confusão entre o quadrado e o dobro de um inteiro, decomposição de inteiros em produtos de inteiros para simplificar frações, para facilitar os cálculos ou para realizar linhas de cálculos onde as operações +, × e parênteses aparecem misturadas. Por exemplo, confundia $3 + 2 \times 5$ e $(3 + 2) \times 5$, efetuando uma sequência de operações que, em ambos os casos, correspondia a uma leitura da esquerda para a direita, como em uma leitura de uma frase. Outro bloqueio, igualmente crucial, dizia respeito aos termos matemáticos que descrevem cálculos numéricos complexos, escritos sequencialmente em uma linha: “soma”, “diferença”, “produto”. Para Jonathan, não havia articulação ou coordenação entre essas palavras que descrevem operações frequentemente referidas por verbos, como “adicionar”, “subtrair”, “multiplicar” e os símbolos das operações para os números inteiros.

Todas essas dificuldades no âmbito dos escritos e cálculos aritméticos pareciam dificultar a sua entrada no mundo dos escritos e dos cálculos algébricos onde encontram-se o mesmo funcionamento de substituições entre expressões completas e incompletas.

Assim, propus tarefas que implicavam em substituições de expressões no cálculo numérico, na articulação da linguagem e da escrita numérica: tabelas multiplicativas ou aditivas a serem completadas, designação verbal qualificando listas do dobro ou do quadrado de números inteiros etc. Pouco a pouco, Jonathan progredia no campo numérico. Ao retomar os deveres de aula, a referência a essas tarefas diferenciadas permitia-lhe ultrapassar certos percalços no campo dos cálculos e de sua formulação. Por exemplo, às vezes, para desbloqueá-lo, eu fazia com que ele recitasse a tabela do quadrado e do dobro.

3 ANÁLISE SEMIOCOGNITIVA DAS ATIVIDADES EM ÁLGEBRA

Regularmente, Jonathan confrontava-se em sala aula com tarefas as quais se deparava com expressões simbólicas que misturavam letras desprovidas de sentido, números e símbolos de operações e relações. Os seus deveres de casa e cadernos de apontamentos cobriam três áreas de tarefas matemáticas e pareciam-lhe não estar relacionadas. Essas áreas foram feitas com o objetivo de ensino visando **a aquisição das equações, como instrumento de resolução de problemas,** ao final do *troisième*. Em um primeiro momento, eu deixava-o exausto com tantos exercícios de transformação de expressões algébricas; para formular as instruções, utilizava o vocabulário das operações de álgebra elementar (“fatoração”, “desenvolvimento”, “redução”) e o das operações aritméticas (“soma”, “produto”). O segundo momento consistia em exercícios de resoluções formais de equações e, o terceiro momento, de resolução de problemas “concretos” por meio da álgebra, em que uma equação é contextualizada em uma situação familiar. Por conseguinte, a linguagem natural fora utilizada para descrever essa situação e os dados necessários para resolver o problema concreto, mediante resolução de uma equação. A tarefa solicitada ao aluno é, então, equacionar os dados do problema, ou seja, encontrar a equação que estrutura matematicamente o enunciado do problema.

Seguiremos essas áreas de tarefas para analisar o comportamento de Jonathan quando confrontado com os seus trabalhos de casa. Veremos que lançando-o em três momentos de atividades de matemática que lhe pareciam sem relação, tentava valentemente sobreviver à sua maneira, agarrando-se o melhor que podia nos recortes que havia retido, ao menos, nos momentos em que não estava tão desanimado. As suas reações revelaram muitos mal-entendidos e confusões acerca das tarefas matemáticas. Para compreendê-las, será preciso primeiro fazer-se três questões:

1) O vocabulário das operações aritméticas e o das operações algébricas elementares faz sentido para os alunos? Ou, dito de uma forma mais precisa, e, sobretudo, mais fácil de ser controlada pelo professor e pelo próprio aluno: podem eles, de modo *quasi-reflexo,* passar de um desses termos matemáticos à escrita de uma expressão numérica incompleta (3 - 2), ou uma expressão literal incompleta (4a + 2), *e inversamente*?

2. *Esse é o mesmo trabalho que se pede ao aluno* em uma resolução formal de uma equação e no equacionamento de um problema?

3. Por que a resolução de problemas concretos *não permite reconhecer em uma situação real,* fora de um contexto muito local de treinamento, *a possibilidade de utilizar uma equação ou uma fórmula*? Essa questão também pode ser feita para os alunos com “sucesso” nesses tipos de exercícios.

A resposta a essas três perguntas desagua em uma exigência incontornável. Para adquirir conhecimentos matemáticos, ou seja, para aprender matemática e ser capaz de utilizar tais conhecimentos, *é necessário, em primeiro lugar, CONSCIENIZAR-SE da maneira como se trabalha para fazer matemática.* Porque a forma de fazê-la (explicá-la, raciociná-la, vê-la etc.) é totalmente diferente da forma de trabalhar-se em outros campos do conhecimento, pois consiste em um funcionamento semiocognitivo subjacente às abordagens propriamente matemáticas. Os registros de representações semióticas são a ferramenta que permite analisar esse funcionamento cognitivo, e essa análise é decisiva para saber *como conscientizar-se do modo como trabalhar, no presente caso, em álgebra.*

As minhas observações e análises serão concernentes, portanto, ao comportamento de Jonathan em:

- Atividades algébricas formais de transformação de expressões algébricas;
- Resolução de equação;
- Atividades de equacionamento para resolver problemas.

Veremos, enfim, que de um ponto de vista semiocognitivo, resolver uma equação e equacionar os dados do enunciado de um problema, para o resolvê-lo, são atividades radicalmente diferentes e que devem ser bem diferenciadas uma da outra.

4 JONATHAN E AS TRANSFORMAÇÕES DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

Em contrapartida às expressões denominadas completas (equações, desigualdades, fórmulas), que se articulam em torno de um símbolo de relação (=, ≤ etc...), susceptíveis de serem verdadeiras ou não (Duval, Pluvinage, 2016, p. 124), consideraremos, aqui, as expressões algébricas que podem ser chamadas de incompletas, como por exemplo $3(x + 7)$, $3x + 21$ ou ainda $(x + 5)(x - 3)$. Em aula, Jonathan teve que aprender como desenvolver, reduzir ou fatorar tais expressões, ou seja, como substituir expressões incompletas por outras expressões semanticamente equivalentes. Por exemplo, substituir $3x + 21$ por $3(x + 7)$, duas expressões que não utilizam os mesmos números e símbolos operacionais, mas que são equivalentes. A substituição de uma expressão incompleta por outra semanticamente equivalente é, geralmente, uma primeira operação a ser feita para resolver uma equação. Por exemplo, dependendo do caso, "desenvolve-se" ou, ao contrário, "fatora-se" uma expressão incompleta que aparece em um membro da equação. Mas para Jonathan, em sala de aula, essas transformações pareciam-lhe algo isolado, as quais não via sentido e causavam-lhe grandes dificuldades. E a mim repetia:

"Pra que serve isso?"

Em momentos de desânimo para fazer os seus trabalhos de casa, ou preparar avaliações cujo objetivo era rever o que tinha sido feito na aula, Jonathan, sob a minha vigilância e com a minha orientação, realizava transformações de expressões algébricas, por vezes corretas, muitas vezes falsas, confundindo fatoração, desenvolvimento e redução...

"É a mesma coisa né?"

Para poder prosseguir nos seus estudos, muitas vezes, tive que me lançar ao trabalho para que ele também se empenhasse como que por mimetismo.

Em relação ao procedimento de desenvolver e reduzir, ele se lembrava de "dicas" vistas em sala de aula, mas não relacionados a nenhuma dessas palavras. Assim, quando precisava desenvolver e reduzir uma expressão incompleta, do tipo: (a + b)(c + d), preenchia a expressão inicial com quatro setas correspondentes aos produtos ac, ad, bc, bd e depois acabava escrevendo esses quatro termos. É um procedimento que ele se recordava e o permitia iniciar corretamente a desenvolver uma expressão. *Ele não se dava conta se estava desenvolvendo, reduzindo ou fatorando, mas sabia como fazê-lo...* Mas, quando se tratava de desenvolver e reduzir a expressão (x + 4)(x + 2) + (x + 3)(x + 1), ele fazia aparecer um monte de setas. Começava colocando as que correspondiam a (x + 4)(x + 2) e, também, juntava com setas as letras e números desse primeiro bloco às letras e números do segundo bloco (x + 3)(x + 1). Não diferenciava a ordem das operações nos tratamentos. Esse também foi um tipo de dificuldade que encontrou ao realizar cálculos numéricos complexos escritos em linha, por exemplo, confusão entre 3 + 2×5 e (3 + 2) × 5. Em ambos os casos, Jonathan segmentou os escritos lineares sem levar em conta regras de prioridade e parênteses, na maioria das vezes, da esquerda para a direita, como na leitura de uma frase em língua natural.

As expressões que precisavam ser fatoradas variavam de simples exemplos, como: 3x + 3 × 7, à expressões mais complexas, como: (x + 3)(7 - 2 x) + 5(x + 3), ou expressões que necessitavam o *reconhecimento* de identidades notáveis! Mas, diante desse cenário *de símbolos de operações, números, letras e parênteses,* Jonathan se perdia! E, para sua consternação, eu também! Quando tentei ajudá-lo, ele ficou intrigado com as palavras matemáticas, como "termos" e "fatores" que eu costumava usar para descrever as expressões algébricas a serem transformadas em outras expressões:

“Não entendo o que isso significa.”

E brincava:

“Fator, oh sim, o fator!” ou “A soma, ah, sim, me nocauteia”[6]

Durante a campanha eleitoral presidencial, Jonathan me confidenciou: “A matemática é tal e qual os presidentes, eles falam e você não consegue entender o que querem dizer”.

De minha parte, no início, jogava o seu jogo, mostrando a minha surpresa e prazer com os seus trocadilhos. Às vezes, eu acrescentava: “**Ah sim, eu te nocauteio, é isso!**”. Ele ria e concordava. No entanto, eu retomava com ele as expressões algébricas para

[6] N. do Tradutor. Um trocadilho entre *somme* (soma) e *assomme* (noucateia) na frase “La somme, ah, oui, çà *assomme*” (“A soma, ah, sim, me nocauteia”).

aplicar estas palavras: *“3(a + 5) significa que 3 é multiplicado pela somado com 5 e que 3 é um fator desta soma, lê-se 3 fatores de a + 5”.* Em seguida, ele acrescentava um sinal × entre 3 e (a+5): 3×(a+5). Para o caso das fatorações, entendeu que quando existiam dois fatores idênticos, poder-se-ia *“prescindir dos dois fatores para fazer o trabalho e manter apenas um”*. Assim, desde que lhe fosse lembrado que 5x significava 5×x, poderia conceber que 5x +7x é 12x e até x × (5 + 7). Observo que quando se deparou com 0x, ficou em dúvida: não resultava 0 para ele... Do mesmo modo, 1x não se tornava forçosamente x e, de maneira oposta, ele não concebia que escrever x = 1x poderia ser útil. Eu observava também, em Jonathan, mediante a sua postura perplexa e dos seus erros, *a ambiguidade existente entre os sinais de operação + ou - e esses mesmos sinais ligados a um número.* Por exemplo, ao fator 5a + 5 × (-3), ele poderia igualmente escrever diretamente 5(a + 3) ou 5(a - 3) ou ainda 5(a+ - 3) sem saber qual escolher e nem passar por 5(a + (- 3)) para chegar em 5 (a - 3).

Com as minhas explicações pontuais e elaboradas de formas mais sólidas, o progresso perceptível era tênue, incoerente, superficial, sempre para ser retomado, sempre em função das minhas explicações. Tive a impressão de um trabalho de Sísifo! Obviamente, essas observações mostraram que um trabalho fundamental, em direção à compreensão do funcionamento semiocognitivo dos escritos simbólicos e a sua coordenação com termos matemáticos, ainda faltava ser pensado.

5 JONATHAN E AS RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES

Com a resolução das equações entramos no domínio daquilo que se pode chamar de expressões completas, porque se articulam em torno de um símbolo de relação, nesse caso “=”, com cada um dos membros da equação em uma expressão incompleta.

Em sala de aula, o trabalho de resolução havia sido abordado, nos exercícios a serem feitos. Jonathan deveria resolver equações que variavam desde os casos mais simples, no início, como: x + a = b, ou cx = d (com variações nos valores numéricos a, b, c, d e que poderiam tornar as resoluções, mais ou menos, fáceis, do tipo: 3x = 15 ou 3x = 17 ou - 3x = - 15) aos casos mais complexos com incógnitas de cada lado do símbolo “=” ou, ainda, os membros com expressões incompletas que eram, mais ou menos, complexas para serem reduzidas ou fatoradas.

A primeira dificuldade que observei em Jonathan foi a sua falta de compreensão da tarefa:

“Resolver a equação...? O que deve ser feito?”

Ele não compreendia o que se esperava dele. Tive de explicar-lhe o que significa resolver uma equação, ou seja, “descobrir para que valor(es) de x, a equação dada é verdadeira”. No exemplo da equação $x + 2 = 5$, compreendia ele que a solução era 3 e respondia corretamente às questões quando se tratava de verificar se um certo número era de fato a solução de uma dada equação, mesmo sendo do segundo grau. Por exemplo: “Consideremos a equação em x: $x^2 + x = 6$, o valor 2 é a solução para esta equação?”.

A segunda dificuldade observada em Jonathan dizia respeito a sua interpretação do sinal “=”, encontrado nas equações. Quando se trata de descobrir para que valor(es) a equação seria verdadeira, a sua primeira tendência foi adicionar novamente, após o segundo membro da equação, o “=”, como se faz quando se tem que substituir uma expressão algébrica inicial por outras para, conforme o caso, expandir, reduzir ou fatorar a expressão inicial. Pela reação de Jonathan, pode-se concluir que, as duas expressões incompletas de cada lado do sinal “=” eram independentes. E quando o guiei laboriosamente e autoritariamente para que pudesse transformar a equação dada, no início, em equações equivalentes, por exemplo, movendo todos os "x" para um lado, mas também fazendo com que, gradualmente, o jovem limpasse, reduzisse e fatorasse as expressões incompletas de cada lado do símbolo “=”, ele exclamou:

“Eles são malucos em matemática, não sabem o que querem”.

Dá para entender a consternação do estudante perante dois significados radicalmente diferentes do símbolo “=”. Por um lado, para anotar as sucessivas substituições de uma expressão inicial incompleta (...=...=...=...) e, por outro lado, para marcar a equivalência entre a equação inicial e a equação final obtida (...=... equivalente a ...=... etc.).

No entanto, ele também se lembrava de tratamentos que tinha feito em aula, mas sem compreender o seu significado, nos quais tentava isolar x do lado esquerdo do símbolo “=”. Para isso, quando os símbolos operacionais que articulavam a expressão incompleta eram símbolos de operações aditivas, como as do tipo $x + a = b$, ele aplicava a “regra da mudança de sinal” e, assim, por vezes, conseguia isolar x como lhe havia sido pedido. Mas, quando os símbolos operacionais que articulavam a expressão incompleta eram os de operações multiplicativas, ele confundia operações aditivas e multiplicativas. Apesar de alguns progressos no cálculo com números (nos quais conseguia fazer corretamente substituições de expressões entre elas para efetuar o cálculo), *não percebia a semelhança* *entre a transformação de grafia entre os escritos literais e os escritos numéricos*. Para as equações da forma ax = b, ele hesitava entre x = b - a, x = a/b e x = b/a. Eu, ainda, precisava muitas vezes lembrar-lhe ou explicar-lhe que ax significava a×x. Ele podia, então ver muito facilmente, por exemplo, que a solução para a equação 3x = 21 era x = 7, transformando 3x=21 em 3×x = 21. *Mas, a dúvida voltava quando o número do segundo membro da equação não era um inteiro*. Assim, para 3x = 20, ele propunha x = 20 - 3 ou x = 3/20. Ele ficava, também, perturbado quando, após as devidas substituições, um "-x", finalmente, apareceu à direita do símbolo "=". A equação "-x = -7" paralisou-o. Transformar "-x = -7" em "-1×x = -7", como eu sugeria-lhe, deixava-o na dúvida! Ficava do mesmo jeito quando eu lhe falava sobre o "oposto de x". Ele concordava em passar "- x para a direita" e "- 7 à esquerda" para chegar a "7 = x", mas isso parecia-lhe estranho, uma vez que, x era para estar do lado esquerdo do símbolo "=". Outro exemplo, ao resolver a equação 5x - 3 = 8x + 1, para a qual ele escrevia sucessivamente 5x - 8x = 1 + 3, -3x = 4, depois x = 4 + 3 e x = 7, fazia-lhe falta a compreensão dos diferentes empregos do símbolo "-". A conscientização para essa diferenciação parece ser uma questão de aprendizagem necessária para que estudantes como Jonathan, que são na realidade muitos, possam progredir.

Nesse domínio da resolução de equação, nada exprime melhor a profunda incompreensão que levou Jonathan ao desânimo do que a frase:

"Eles são doidos em matemática, não sabem o que querem".

A resolução das equações mais simples requer, de fato, duas operações semiocognitivas diferentes: transformar as expressões incompletas constituídas pelos membros das equações pelo desenvolvimento, redução ou fatoração e; transformar as expressões completas das equações em expressões completas equivalentes. Isso é feito trabalhando com o símbolo do camaleão "=" (Duval, Pluvinage, 2016, p. 122). Como se pode constatar, essa distinção entre as diferentes funções do sinal "=" não fora alcançada! O principal desafio para Jonathan seria compreender em uma equação a diferença entre as duas expressões incompletas em cada lado do sinal de igualdade (a expressão da direita não é uma transformação da expressão da esquerda), mas que elas não são independentes, precisamente, por conta do símbolo "=", e que estamos, portanto, na configuração de uma expressão completa, a ser transformada em uma outra expressão completa com a mesma "denotação", no sentido de Frege[7] citado por (Duval, 2019, p. 115).

[7] Frege G., (1971/1892). Sens et dénotation. Ecrits logiques et philosophiques (trad. Imbert) 102-126. Paris : Seuil.

Nesse caso, as sucessivas equações pelas quais a primeira é substituída não contêm os mesmos escritos, mas referem-se sempre à mesma questão: “*Para que valor(es) de x a equação inicial dada é verdadeira?”*

Jonathan estava muito distante dessa constatação. Uma observação sobre as suas reações no domínio da resolução de equações em que, paradoxalmente, fora bem sucedido confirmava-o. Tratava-se de resolver equações em exercícios os quais entrava, em jogo, relações de proporcionalidade (cálculo de comprimento, com Thales, problema de proporções, cálculo das percentagens etc.). Jonathan já não conseguia, de modo autônomo, estabelecer as igualdades formais que lhe permitiam resolver esses problemas, porque as noções subjacentes não estavam ainda dominadas. Por exemplo, analisar uma figura em subfiguras para determinar as condições de aplicação do Teorema de Thales, elaborar uma tabela de correspondência entre os dados de uma situação de proporcionalidade etc. Mas, uma vez que aceitou a tabela 2 x 2 ou o tipo de igualdade a/b=c/d que permitia a resolução desses tipos de problemas, ficava mais tranquilo:

“Eu consigo fazer!”

Ele conhecia um “truque” o qual lhe permitia encontrar o valor desconhecido que instanciava igualdade. A rotina aprendida em sala de aula consistia em desenhar ou andar por um caminho contínuo de setas para chegar à resposta. Para obter um valor faltante, gestos e setas contínuas o apoiavam, multiplicava os valores conhecidos que figuravam em dois lugares diagonais e dividia pelo terceiro valor conhecido. Mas, na verdade, esse é um procedimento que esconde as substituições de expressões completas a serem feitas para resolver tais equações e que afastava a possibilidade de apreender a operação, consistindo na substituição de uma expressão completa por outra expressão equivalente. A prova disso era a resistência do estudante a qualquer outro tratamento que não fosse aquele no qual ele agarrava-se, como se fosse uma boia de salvação. Quando lhe disse que poderíamos substituir a equação inicial a/b=c/d pela equação ad = bc, ele se rebelava:

“Mas pra que complicar as coisas”

O meu argumento era dizer que se tratava de uma forma mais útil de lidar, de um modo geral, com os casos. Mas não lhe convencia. E com razão, certamente, porque como vimos anteriormente, ele não fora capaz de mudar, espontaneamente, de ac=bd para a=bd/c. Tratava-se de um mal-entendido que não é surpreendente, como mostra a enquete PISA 2003, no qual uma questão do cálculo da duração de uma etapa L – a partir da fórmula n/L = 140, sendo que o número de etapas por minuto n vale 70 – faz com que mais de 50% dos estudantes de 15 anos errem-na (Duval, Pluvinage, 2016, p. 121). Estamos aqui também diante do caso de escritos fracionários de relações ou substituições a serem feitas, para isolar a incógnita, que são complexas de serem realizados (Adjiage, Pluvinage, 2012, p. 49).

Finalmente, independentemente da complexidade das equações de primeiro grau a serem resolvidas, as sessões repetidas de exercícios sobre este tema, acompanhadas das minhas explicações, não foram eficazes. De um tempo a outro, geralmente começavam com:

"Eu não me lembro! Me mostre!".

Além disso, os "truques" que ele trazia na aula, como a mudança de sinal quando se passa de um membro a outro de uma equação ou, ainda, o caminho com flechas para encontrar o termo faltante em uma igualdade de proporção, eram apenas "apoios locais" que não lhe permitiam "caminhar de forma independentemente", na verdade eram manobras que mascaravam as operações cognitivas envolvidas.

6 JONATHAN E O EQUACIONAMENTO DE PROBLEMAS

Os dados de um problema podem ser encontrados de muitas formas: no trabalho de campo, registrando-se observações feitas durante manipulações físicas em "laboratório", em tabelas de dados ou em um enunciado de um problema que descreve uma certa situação. Esse tipo de apresentação de dados de um problema é comum e frequentemente encontrado no ensino e nos manuais escolares. Era bem esse tipo de problema o enfrentado por Jonathan em aula ou nos trabalhos de casa os quais já tínhamos tentado resolver juntos, ou mais precisamente ao lado dele! Após avaliações fracassadas em aula, ele se justificava:

"Eu não lembrava mais como fazer. O senhor me explicou, mas *durante a prova*,
eu não me lembrava de mais nada"

Quando eu mesmo lecionava no *collège*, utilizava frequentemente o "problema do peso da garrafa e da rolha" para tentar conscientizar os alunos a interessassem-se por recorrer ao uso da equação na solução de um problema. Tentei, corajosamente, experimentar com Jonathan, mas foi um fracasso. Mas, um fracasso que nos permite analisar não só a complexidade cognitiva de equacionar os dados de um problema, bem como a ambiguidade e as armadilhas dos chamados enunciados de problemas ditos "concretos".

Apresentei este enunciado a Jonathan:

> Uma garrafa e a sua rolha pesam juntas 110 gramas. A garrafa pesa 100 gramas a mais do que a rolha. Quantos pesam a garrafa e a tampa, respectivamente?

Como eu esperava, ele respondeu que a garrafa pesava 100g e a rolha 10g. Tinha a certeza da sua resposta e a sua certeza provava que ele acreditava ter compreendido o enunciado. Ele ficou surpreendido por eu ter-lhe questionado a resposta, confrontando-a com a segunda frase do enunciado do problema: “A garrafa pesa 100 gramas a mais do que a rolha”. O jovem permanecia em dúvida e calado diante do meu questionamento! Não tinha, certamente, considerado a complexidade dessa frase. Diante da perplexidade demonstrada resolvi, então, evocar o peso do seu cão e o do seu gato. Iniciou-se então o diálogo seguinte, conduzido, de minha parte, de forma mais ou menos hábil:

> - “Digamos que o seu cão pese 5 kg e o gatinho 4 kg. Quanto a mais do que o gato pesa o cão?”
>
> - “Oh, sim, ele pesa 1kg a mais do que o gato.”
>
> - “E se a garrafa pesa 100g e a rolha 10g?”
>
> - “Ah sim, então a garrafa pesa 90g a mais do que a rolha!”
>
> E, no calor das trocas na conversa, ele acrescentou:
>
> - “Mas, então a garrafa deve pesar 80 gramas!”

Então, pedi-lhe que voltasse a ler a primeira frase do enunciado do problema e ele suspirou:

> - "Pfff...! »

O estudante tinha tomado consciência da complexidade dos dados constantes no enunciado. De minha parte, a essa altura dos fatos, estava igualmente aborrecido e não sabia como reagir, de forma pertinente (volto a esse ponto na seção seguinte). Sob a pressão do tempo que passava, precipitei as coisas, dizendo “e se chamássemos x o peso da garrafa?”. Isso também bloqueou Jonathan na possibilidade de iniciar eventuais tentativas numéricas (volto também a esse ponto na seção 7). Ele não ficou muito surpreendido com a minha proposta, uma espécie de proposta que já encontrara em aula ou na retomada da correção de exercícios, mas replicou:

“Não, x é o peso da rolha, eu prefiro...”

Eu disse: "Está bem, vamos chamar x o peso da rolha. Então qual é o peso da garrafa baseado em x?". Diante dessa questão típica de um professor de matemática, ele respondeu:

“Não se pode saber por que não se conhece o peso da rolha!”

Essa frase era indicativa da principal dificuldade com que Jonathan se confrontava: não compreender que para dar início ao equacionamento do enunciado do problema, seria necessário não só designar por uma letra o peso de um dos dois objetos evocados, *e não se contentar em designar o peso do outro objeto por uma outra letra de forma independente*. Seria necessário empregar a primeira letra para exprimir o peso do segundo objeto, utilizando a relação com o peso do outro tal como foi dada em linguagem natural no enunciado! Para ele, o peso da garrafa era uma quantidade isolada e “x” não tinha o estatuto de uma designação do peso da garrafa, cujo valor devia permanecer transitoriamente desconhecido e depois ser encontrado. Surpreso com a sua categórica declaração, eu não soube o que fazer! Tentei convencê-lo, mas as minhas explicações, mais ou menos, equivaleram a propor sucessivos passos, ditando as diferentes escritas que conduziriam à equação final: situação idêntica que acontece em geometria, quando apresenta-se uma demonstração na qual os alunos não compreendem o que vem a ser uma demonstração matemática. Evidentemente, tudo o que eu encontrava era perplexidade e resignação. Que paciência ele tinha! E eu então!

7 ANÁLISE RETROSPECTIVA RELATIVA À COMPLEXIDADE PARA EQUACIONAR OS DADOS DO ENUNCIADO DE UM PROBLEMA

Foi só depois que percebi a complexidade das operações discursivas quando se pede aos alunos que os dados de um problema desse tipo resultem em uma equação. Para compreender essa complexidade, utilizei o modelo de análise bidimensional semiocognitiva de Duval, Campos, Barros & Dias (2015) que toma a forma da Tabela 1, a seguir.

Na margem vertical da Tabela 1 colocamos as diferentes designações possíveis do mesmo objeto em linguagem natural e simbólica. E na margem horizontal vão os três tipos utilizados de designações de objetos apresentados no enunciado: verbal, numérica e literal. Para escrever a equação correspondente aos dados do problema que são fornecidos no enunciado, é necessário primeiro preencher as nove casas das primeiras linhas. *Isso, porque cada uma dessas caixas corresponde a uma pergunta que deve, explicitamente ou implicitamente, ser feita quando da leitura do enunciado,* corresponde ao fato de que existi três objetos diferentes que são designados no enunciado e que podem, cada um, dar origem a uma das quatro designações discursivas diferentes. Esses objetos são obviamente quantidades ou números.

Tabela 1: modelo de análise bidimensional semiocognitiva

	DESIGNAÇÃO VERBAL DOS três objetos do problema	DESIGNAÇÃO NUMÉRICA	RE-DESIGNAÇÃO LITERAL
1. Designação direta			
Designação indireta 2. *descritiva* (LÍNGUA) 3. *funcional* (LETRAS)			
4. *Dupla designação de um mesmo objeto*			
EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL			

A possibilidade de dupla designação de um mesmo objeto é de importância crucial. Com efeito, satisfaz o requisito fundamental formulado por Frege (1971/1892) para qualquer atividade matemática: dispor de duas designações (Sinn) do mesmo objeto (Bedeutung) para poder reconhecer a sua equivalência referencial, ou a sua não-equivalência referencial, é o reconhecimento dessa dupla designação relativa ao mesmo objeto que finalmente chega-se à equação. A última linha da Tabela 1, separada das operações discursivas, aponta para essa constatação.

Aplicando o modelo de análise da Tabela 1, para o problema:

> Uma garrafa e a sua rolha pesam juntas 110 gramas. A garrafa pesa 100 gramas a mais do que a rolha. Quanto pesa, respectivamente, a garrafa e a tampa?

obtém-se a seguinte tabela preenchida:

Tabela 2: Análise bidimensional semiocognitiva de Duval et al. (2015) aplicada ao problema do peso da garrafa e da rolha

	DESIGNAÇÃO VERBAL DOS três objetos do problema	DESIGNAÇÃO NUMÉRICA	RE-DESIGNAÇÃO LITERAL
1. Designação direta	Peso da GARRAFA Peso da ROLHA Peso dos DOIS	**.. .?...** **… ?...** 110	a b (a + b)
Designação indireta 2. *descritiva* (LÍNGUA) 3. *funcional* (LETRAS)	A garrafa "*pesa ... a mais do que a rolha*"	(… + 100)	(b + 100)
4. *Dupla designação de um mesmo objeto*	*Peso dos dois* "a garrafa e a sua rolha pesam 110g"	110	(a + b) *ou* ((b+100) + b)
EQUIVALÊNCIA REFERENCIAL			2b +100 = 110 (EQUAÇÃO)

Essa Tabela permitiu-me decifrar, retrospectivamente, o modo como tentei guiar Jonathan passo a passo ao longo das sete etapas seguintes:

1. Seleção de um dos sintagmas nominais do enunciado nominal da declaração ("O peso da rolha");

2. Escolha de uma letra para designar a primeira quantidade verbalmente designada ("Vamos designar por b o peso da rolha");

3. Seleção de outro sintagma nominal ("Peso da garrafa");

4. Utilização funcional da mesma letra para designar a segunda quantidade ("peso da garrafa: b+100");

5. Seleção do terceiro sintagma nominal ("o peso da cortiça e da garrafa");

6. A Utilização funcional da letra para designar a terceira quantidade ("Peso da tampa e da garrafa: b+(b+100)");

7. Reconhecimento da dupla designação da terceira quantidade que finalmente dá a equação ("110g e b+(b+100)").

Essa abordagem para equacionar o enunciado de um problema é, obviamente, nada fácil para os alunos compreenderem. E explicar aos alunos ou guiá-los em cada passo, pergunta após pergunta, decisão após decisão, linearmente, como tentei fazer com Jonathan e, mesmo que seja ainda de um modo mais engenhoso, não vai ajudá-los a compreenderem o conjunto desse processo. Mas, permitiu-me ver como eu poderia ter agido com Jonathan de forma mais astuta em dois momentos:

- o primeiro momento foi quando, após a sua resposta imediata, tive de reler as duas primeiras frases do enunciado para ele e no qual, um pouco desanimado, conscientizou-se da dupla barreira que elas impunham. Poder-se-ia prever duas possibilidades diferentes: uma, certamente, permitir-lhe-ia resolver o problema, mas sem passar pela equação resultante da leitura do problema; a outra possibilitaria a Jonathan iniciar uma análise mais aprofundada do enunciado do problema. A primeira possibilidade poderia ter sido fazer tentativas numéricas, com pares de números, em função das condições impostas no enunciado do problema. Como, por vezes, é feito por pessoas a quem esse enunciado é submetido em um jogo de adivinhação, os quais descobrem que a resposta é falsa, e que poderia ter se envolvido no chamado método "de tentativa e erro", consistindo em considerar cada uma das duas condições separadamente para testar diferentes pares de números. Poder-se-ia pensar no encontro de "um" par de números inteiros que satisfizesse, portanto, encontrar "uma" solução para o problema, sem passar pelo equacionamento do problema. Mas, o objetivo (que não deu certo) da sequência não era introduzir Jonathan na resolução, baseada no equacionamento de dados desse tipo de problema concreto, que aparecia em sua turma na escola? E quanto ao método de tentativa e erro, há uma questão de rigor matemático que é preciso considerar (mesmo que a situação não estivesse madura para Jonathan perguntar-se): não há garantia da unicidade da solução encontrada. Por outro lado, os problemas dessa natureza se prestam à utilização de um método desse tipo. A segunda possibilidade teria sido iniciar um trabalho de compreensão das duas frases do enunciado e da sua relação. Por exemplo, como sugeriu Raymond Duval, eu poderia ter sinalizado ou pedido uma reformulação da segunda frase, dessa vez, fixando-a no peso da cortiça: “A cortiça pesa 100 gramas a menos do que a garrafa”. A inversão desse ponto de apoio teria permitido a Jonathan a possibilidade de comparar diferentes versões não congruentes, mas equivalentes, dessa frase que lhe traziam dificuldades de compreensão, e para avançar em uma discussão sobre os pesos indicados no enunciado e os não indicados, talvez para que ele pudesse conscientizar-se da designação indireta dos objetos.

- o segundo momento foi quando sugeri a Jonathan a ideia de chamar “x o peso da garrafa”, crucial na escolha do objeto a ser designado diretamente por uma letra, para iniciar o equacionamento do problema. Crucial porque envolve a complexidade da redesignação funcional que virá em seguida. Nesse caso, poder-se-ia redesignar por uma letra tanto o peso da rolha quanto o da garrafa. Se chamássemos x o peso da rolha e sabendo que “a garrafa pesa 100 g a mais do que a rolha”, acabaríamos com a seguinte redesignação indireta do “peso da garrafa: x + 100”. Uma formulação literal congruente com a formulação verbal. Se, por outro lado, x é chamado o peso da garrafa, a designação indireta funcional do peso da rolha deixará de ser congruente com a designação descritiva da afirmação “peso da rolha: x – 100”. Para fazer a designação funcional indireta, a equivalência entre as duas formulações deve ser considerada ou identificada: “A garrafa pesa100 gramas a mais do que a cortiça” e “A cortiça pesa 100 gramas a menos do que a garrafa”. Um professor ou um aluno estudioso escolherá como objeto de designação direta aquele que poderá trazer-lhe menos dificuldades na realização da nova designação funcional e no prosseguimento das operações a serem realizadas para chegar à equação final. Nesse caso, ao dizer a Jonathan: “E se chamássemos x o peso da garrafa?”, eu não havia feito a escolha mais simples, contrariamente ao que Jonathan me retrucou: “Não, x é o peso da cortiça, eu prefiro...”, sem ter ideia do que estava por vir na sequência das operações.

Retificar, desta forma, as minhas intervenções não teria certamente permitido a Jonathan compreender melhor o processo de equacionar um problema. Na verdade, em momento algum Jonathan estava em posição de tomar a iniciativa, *era eu, de fato, que fazia* *o trabalho*. Essa análise retrospectiva permite ver os impasses e os limites dos procedimentos, em sala de aula, trabalhados em um modo “maiêutico”. Elas podem não contribuir para que os alunos se tornem autossuficientes no equacionamento de problemas.

8 OS PRIMEIROS PASSOS DE JONATHAN EM ÁLGEBRA

Quais tarefas devem ser desenvolvidas para que possam, realmente, ajudar Jonathan a compreender as atividades algébricas? Essa foi a questão que se fazia a partir das observações e análises relatadas até esse momento. As trocas e discussões sustentadas com Raymond Duval e François Pluvinage permitiram conceber e testar algumas atividades, especificamente, cognitivas desconectadas das obrigações escolares imediatas. Foram bem aceitas por Jonathan, especialmente, porque não estava em jogo apenas o acerto ou erro. Ele levava essas atividades como se fossem um jogo e tinha sempre confiança em mim. Oh, bem claro, estávamos numa fase de tentativa e erro e, muitas vezes, eu ainda tinha que dar apoio a Jonathan com algumas explicações. As suas reações nos permitiam relançarmo-nos ao trabalho.

Qual foi o principal objetivo dessas atividades? Permitir que Jonathan dê um primeiro passo essencial na álgebra elementar. Vimos, no equacionamento do problema do peso da cortiça e da garrafa, que Jonathan não aceitava que se pudesse designar, por uma mesma letra, o peso da cortiça e o peso da garrafa. O primeiro passo essencial que queríamos fazer é que Jonathan pudesse se conscientizar da designação funcional na utilização de uma letra para designar um número por uma expressão incompleta, como 2x ou x+2. Para isso, as propostas que lhe foram apresentadas, estavam na forma de tabelas a serem preenchidas. Eis uma panorâmica significativa de um primeiro exemplo que lhe foi apresentado, uma panorâmica acompanhada de um breve relato das reações de Jonathan.

Esta tabela (Tabela 3) de preenchimento comporta duas listas abertas de números inteiros.

Jonathan começa o trabalho, na parte numérica, com um sorriso diz:

“Queres me ensinar a contar?”

Após um lembrete do significado da palavra sucessiva, ele preenche corretamente a tabela por 4 e 5, confunde-se um pouco na sequência, preenchendo as colunas, independentemente, uma da outra com uma lógica vertical e enganando-se na contagem, retifica e volta à corresponder horizontalmente os números das duas listas e pula para 107 para colocar 108 na frente.

Tabela 3: Tabela de exercício apresentada a Jonathan

Dois números inteiros sucessivos	
1	**2**
2	**3**
3	**4**
4	**…**
5	**…**
…	**…**
…	**…**
107	**…**
Uma letra?	E o que escrever aqui, então?

Para a célula "uma letra?" correspondente à primeira coluna, ele propõe "x" e para a outra célula "E o que escrever aqui, então?" sugere, sorridente, imediatamente "y". Uma resposta lógica porque ele se depara frequentemente com "x" e "y" em sala de aula.... Eu proponho-lhe utilizar "x" para a segunda coluna. Desta vez, um pouco surpreendido e, após um momento de reflexão, escreve "1x". Pergunto-lhe a razão e ele me responde:

"*1x quer dizer que a gente acrescenta 1 à x",*

e eu digo-lhe que significa "1 multiplicado por x". Lembremos que, para uma expressão como "3a", Jonathan sempre precisou de "3×a" para ser escrita. Ele objetou:

"*Eu me entendo*"

Mesmo que para ele "1x" signifique "x+1", ele aceita, finalmente, escrever "x+1" para executar o uso que lhe indiquei... Podemos ver aqui que Jonathan faz uso de um código pessoal e que não integrou o código comum. Mas, apesar dessa dificuldade de expressão, Jonathan conseguiu redesignar a segunda célula com a letra que foi utilizada para designar a primeira. Essa é uma operação que ele compreendeu bem e que reproduzirá sem hesitação em outras situações do mesmo tipo que lhe serão propostas (duplo, quadrado etc.).

Na sequência, propus a Jonathan tabelas incompletas com várias linhas e colunas que cruzavam expressões numéricas, expressões algébricas e sintagmas nominais. Para completá-las, foi necessário articular esses diferentes modos de expressão. Na sequência, apresento dois exemplos:

- Primeiro exemplo

Número escolhido	Triplo do número escolhido	....
1	3	4
2	6	7
3	9	10
4	......	13
5	......	......
......	......	......
......	......	......
....	24	25
x	3 x	....

- Segundo exemplo

Número escolhido	Dobro do número escolhido	....
1	2	4
3	6	36
2	4	16
4	......	64
5	......	
......	......	......
......	......	......
......	16	.....
......	......	324
x	2 x	....

Jonathan lançava-se na aventura com júbilo. A partir das células preenchidas dadas, propunha conteúdos para as células vazias, as controlava, voltava atrás etc. Tudo isso em uma ordem indeterminada e sem a minha intervenção. Ele estava feliz, o tempo passava e já não contava mais.

Nesses últimos meses, quando pude acompanhá-lo, com esses tipos de tarefas puramente semiocognitivas e radicalmente diferentes das que tinha encontrado até então em sua escolaridade, ele ganhava confiança! Jonathan começava a aprender a fazer o caminho da álgebra.

Mas não fora só isso. Durante esse período, paralelamente a essas atividades que lhe devam confiança e sempre longe de qualquer cobrança escolar, Jonathan teve a oportunidade de se envolver em verdadeiros procedimentos matemáticos. O que essas oportunidades tinham em comum era a utilização do cálculo algébrico, como ferramenta de generalização e prova relativas à identificação das regularidades numéricas[8]. Os enunciados exigiam verdadeiras abordagens matemáticas, tais como: exploração, conjectura, generalização e prova. Apoiado em suas aprendizagens iniciais em álgebra e pelos suportes constituídos por tabelas, foi possível organizar o seu trabalho e compreender as etapas, Jonathan podia passar as três primeiras etapas de forma quase autônoma e compreender a necessidade da 4ª etapa, mesmo quando ele ainda não era capaz de efetuá-la.

Quanto aos cálculos algébricos, ele ainda dependia das minhas explicações e dos escritos que anotava. Parecia que me escutava, assim de um jeito meio que distraído. Mas, ao guardar o seu material, pedia as minhas anotações, o que confirmava o seu interesse pela abordagem global. Em suma, se eu continuasse a bricolagem nas atividades propostas, eu tinha assim um Jonathan interessado e ativo a minha frente, e orgulhoso quando lhe dizia que o trabalho que estávamos fazendo era como o que é feito por verdadeiros investigadores matemáticos. A matemática, sobre a qual tínhamos sido tão ousados no início das nossas reuniões, começava finalmente a ter um rosto mais simpático e até mais entusiasta para ele.

9 FIM DA AVENTURA COM JONATHAN. O QUE SE SEGUE (2018-2021): PERSPECTIVAS PARA OS PROFESSORES NAS SUAS SALAS DE AULA

Jonathan estava “no caminho certo”, como se lê por vezes nos boletins escolares, havia chegado em um ponto de alternância e, durante um dos últimos episódios, François Pluvinage partilhava comigo o seu sentimento:

> “Formidável, como Stromae cantaria! E tenho de admitir que o seu relatório e as folhas escritas por Jonathan me provocaram uma certa emoção: vê-se, realmente, alguém que está sendo introduzido no cálculo algébrico. É claro que no início a sua ajuda foi necessária antes que ele “tirasse a poeira dos sapatos” e colocasse um dispositivo semiótico (soma, diferença, ...), o que os anglo-saxões chamariam de *scaffolding*, mas em seguida ele vai em frente, como mostra a sua produção”.

Essa apreciação me deixou feliz e estimulou Jonathan quando lhe falei sobre o assunto. Mas, isso abriu um debate. O meu sentimento era de fato menos eufórico e me juntei a Raymond Duval que achava ainda esse momento precipitado. É certo que Jonathan

[8]Exemplo: “Escolha dois números que totalizem 300 e efetue o seu produto. Acrescente 7 a cada um deles. Em quanto aumenta o seu produto?”

estava cumprindo os seus primeiros passos, mas faltava-lhe a resolução de problemas e o equacionamento de problemas, levando em conta critérios semiocognitivos de sucesso: ter sucesso sozinho, sem qualquer ajuda e de forma rápida.

Mas, o meu acompanhamento parou aí, uma vez que, no ano seguinte, Jonathan entrou finalmente em uma aprendizagem em alternância em uma empresa que desenvolve design, uma situação que respondia bem a sua sensibilidade artística. Continuo a ver Jonathan de vez em quando, mas a parte escolar que subsiste no seu caminho deixa, agora, pouco espaço e necessidade de álgebra...

No entanto, não posso deixar de imaginar como poderia ter continuado a trabalhar com o Jonathan, em particular, para ajudar-lhe em álgebra, para resolver problemas matemáticos ou concretos, combinando duas abordagens sugeridas por Raymond Duval (2002, 2013). Em todo o caso, ainda em contato com um grupo de professores universitários do IREM, em Estrasburgo, relatei os progressos realizados com o Jonathan e partilhei todas as minhas observações feitas durante esses encontros, bem como o apoio às tarefas inovadoras experimentadas nessas ocasiões. Pergunto- me se isso foi uma boa base para o início da prospecção e dos testes em sala de aula?

Raymond Duval alertava-me sobre as dificuldades de uma tal abordagem, que já não se desenvolve mais no contexto de trabalhos individuais. O prosseguimento de uma pesquisa clínica seria difícil, senão impossível. A entrega de fichas de trabalho aos colegas não permitiria compreender as reações dos alunos e aí reagir para acompanhar os seus encaminhamentos. De fato, em sala de aula, sem entender o que Jonathan quer dizer com: “1x quer dizer que se adiciona 1 a x”, e eu “me compreendo” percebendo que havia tomado consciência do funcionamento da designação funcional com a mesma letra, mas tinha desenvolvido para esse efeito um código pessoal “1x” para designar o sucessor de um “x” inteiro? De um modo geral, as tarefas que poderiam ser propostas aos alunos para acompanhá-los nos seus primeiros passos em álgebra, segundo o modelo que eu tinha proposto a Jonathan, exigiriam um acompanhamento individualizado. Raymond Duval fazia, nesse caso, a comparação com o que é realmente necessário na aprendizagem da leitura, e acrescentou que as condições cognitivo-didáticas seriam conscientes ou inconscientemente difíceis de serem aceitas por muitos professores.

François Pluvinage foi menos reservado, escreveu em maio de 2018: “Talvez eu esteja demasiado otimista, mas, para mim, agora está bem. Os colegas docentes estão dispostos a fazer experiências em sala de aula com algumas eventuais modificações?”

E é consciente dessas dificuldades que, em 2018, com Anne Schultz, Audrey Candeloro, Hélène Chilles Brix e Pauline Wiederhold, professores do *Collège* e, desde então, com outros professores do *Collège* que se juntaram a nós, assumimos esse desafio no âmbito de um grupo IREM, em Estrasburgo, intitulado "*Algebraic learning in middle school*": fazer com que cada um dos alunos das suas turmas faça a mesma evolução feita por Jonathan. Mas de uma forma que inclua a resolução de problemas e de uma maneira mais rápida, sem, contudo, abandonar os objetivos globais que são perseguidos não ao fim de cada ano escolar, mas ao fim do *Collège*. Até agora, apesar da nossa tentativa e erro, das diferenças nas nossas experiências e das nossas convicções, como professores, os resultados têm sido encorajadores. Provavelmente, vamos demorar tanto tempo quanto eu e o Jonathan demoramos. Mas, pensamos que em breve poderemos comunicar em um documento o que é uma aventura partilhada entre nós e nossos alunos.

BIBLIOGRAFIA

Adjiage, R. et Pluvinage, F. (2012). Strates de compétence en mathématiques. ***Repères-IREM*** 88, 42-72.

Duval, R. (1995). **Sémiosis et pensée humaine.** Berne : Peter Lang.

Duval, R. (2002). **L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets**. Dans J.P. Drouard et M. Maurel (dir.) *Actes des Séminaires SFIDA-13 à SFIDA-16*. Volume IV 1999-2001 (p. 67-94). Séminaire Franco-Italien à l'IREM de Nice.

Duval, R. (2013). Les problèmes dans l'acquisition des connaissances mathématiques : apprendre comment les poser pour devenir capable de les résoudre ? ***REVEMAT*** (Trad. en Portugais M. T. Moretti)V. 8, n. 1, 1-45.

Duval R., Campos T. M. M., Barros, L.G. et Dias, M. A. (2015). ***Ver e ensinar a matemática de outra forma.*** II. *Introduzir a álgebra no ensino: Qual é o objetivo e como fazer isso?* São Paulo : Proem Editora.

Duval, R. et Pluvinage, F. (2016). Apprentissages algébriques. I. Points de vue sur l'algèbre élémentaire et son enseignement. **Annales de Didactique et de sciences cognitives**, 21,

Duval, R. (2019). Écriture et pensée mathématique : le défi de l'enseignement de l'algèbre élémentaire*. Jean-Philippe Drouhard. De la linguistique à l'épistémographie****. Didactique des mathématiques*** (Ed. M. Maurel) Academia.edu, 105-139.

Frege G., (1971/1892). **Sens et dénotation.** Écrits logiques et philosophiques (trad. Imbert) pp. 102-126. Paris : Seuil.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
O CASO JONATHAN O COMPLEXO DE ÁLGEBRA

TÍTULO ORIGINAL DA OBRA
LE CAS JONATHAN LE COMPLEXE DE L'ALGÈBRE

Méricles Thadeu Moretti
Doutorado em Didática da Matemática (UNISTRA).
Universidade Federal de Santa Catarina,
Programa de Pós-graduação em Educação Científica e Tecnológica, Florianópolis, Brasil.
mthmoretti@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-3710-9873

Endereço de correspondência do principal autor
Campus Universitário Reitor João David Ferreira Lima, s/nº, Trindade – Florianópolis – SC

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: J. C. Rauscher
Coleta de dados: J. C. Rauscher
Análise de dados: J. C. Rauscher
Discussão dos resultados: J. C. Rauscher
Revisão e aprovação: J. C. Rauscher

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 01/11/2023 – Aprovado em: 29/11/2023