

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES: UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO MATEMÁTICA NA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA

Solving Linear Systems:

A Proposal For A Mathematical Intervention In The Pedagogical Residence

Ladson Surlo **RAMOS**

Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil


lsurlo15@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0001-5752-9739>

Álan Felipe Siqueira **ZETUM**

Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil


afs.zetum@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-5655-0939>

Elcio Pasolini **MILLI**

Instituto Federal do Espírito Santo, Vila Velha – ES, Brasil


elciopmilli@gmail.com


 <https://orcid.org/0000-0002-6459-6291>

Maria Auxiliadora Vilela **PAIVA**

Instituto Federal do Espírito Santo, Vila Velha – ES, Brasil

vilelapaiva@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0003-2713-1345>

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo 

RESUMO

Este relato apresenta uma experiência em sala de aula por meio do Programa de Residência Pedagógica, do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes) campus Vitória. A intervenção foi conduzida em duas turmas do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública do município Vitória. O conteúdo curricular selecionado foi Sistemas Lineares, adotando-se a Resolução de Problemas como metodologia de ensino. O desenvolvimento da regência propiciou um espaço dialógico para construir e investigar possíveis soluções no campo algébrico e geométrico para os problemas propostos, cujas soluções tangenciaram conceitos associados a sistemas lineares. A análise dos dados obtidos nessa vivência possibilitou que o planejamento e a execução da aula alcançassem os objetivos de aprendizagem, tendo em vista que os estudantes participaram ativamente da construção das soluções e foram protagonistas nesse processo exploratório-investigativo.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Sistemas Lineares, Prática Pedagógica

ABSTRACT

This report presents an experience in the classroom through the Pedagogical Residency Program, of the Degree Program in Mathematics of the Federal Institute of Espírito Santo (Ifes) Vitória campus. The intervention was conducted in two second year high school classes of a public school in the city of Vitória. The curricular content selected was Linear Systems, adopting Problem Solving as the teaching methodology. The development of the regency provided a dialogical space to construct and investigate possible solutions in the algebraic and geometric fields for the proposed problems, whose

solutions touched on concepts associated with linear systems. The analysis of the data obtained in this experience allowed the planning and execution of the class to reach the learning objectives, considering that the students actively participated in the construction of solutions and were protagonists in this exploratory-investigative process.

Keywords: Problem Solving, Linear System, Pedagogical Residency

1 INTRODUÇÃO

Este relato descreve uma intervenção realizada por licenciandos residentes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Espírito Santo, campus Vitória, por meio do Programa Residência Pedagógica, em uma turma do Ensino Médio de uma escola estadual. A intervenção foi supervisionada por um professor da Secretaria de Estado da Educação e orientada por uma professora do Instituto Federal do Espírito Santo - Vitória. A vivência foi fruto de um trabalho coletivo entre licenciandos residentes, professora orientadora e professor preceptor do programa. Tal experiência demandou diversas reuniões com ponderações e orientações em relação à dinâmica de aula, aos recursos didáticos e à metodologia de ensino utilizados.

O Programa de Residência Pedagógica é uma das ações que integram a Política Nacional da Formação de Professores (Brasil, 2019). É similar a um estágio, pois cada participante (seja bolsista ou voluntário) tem a oportunidade de se envolver em aulas regulares de turmas do Ensino Fundamental ou Médio, com seu respectivo professor da disciplina, denominado de preceptor. O preceptor é o professor principal das turmas e tem diversas atribuições relacionadas à escola e ao programa: participar de reuniões, orientar os licenciandos nas etapas de planejamento das intervenções, auxiliar na escrita de relatos de experiência, entre outras.

No programa, a professora orientadora fica responsável por organizar, supervisionar, analisar e orientar todas as ações do grupo de um modo geral. Já os licenciandos residentes são os alunos matriculados no curso de licenciatura a partir do 5º período e têm como atribuição: planejar aulas sobre temas da disciplina específica para a turma do professor preceptor, acompanhar as intervenções dos colegas participantes do programa, escrever relatos de experiência, relatório de ações, bem como participar e apresentar trabalhos em eventos de divulgação científica. Desse modo, o programa proporcionou muitas experiências envolvendo a prática pedagógica além de contribuir para que várias intervenções pudessem promover a (trans)formação docente dos licenciandos residentes por meio do contato direto com estudantes da educação básica no cenário escolar.

A escolha do episódio discutido neste texto justifica-se devido a uma circunstância muito importante para o programa: a primeira intervenção presencial conduzida desde o início da pandemia da Covid-19 e conseqüentemente desde o início do programa, que começou em outubro de 2020. Até esse momento, todas as outras ações pedagógicas realizadas e relatadas pelos bolsistas aconteceram exclusivamente por meio de plataformas virtuais, tais como *Google Meet* ou *BigBlueButton*. Esse evento foi possível graças ao retorno gradual das aulas presenciais nas escolas públicas e privadas do estado do Espírito Santo, uma decisão tomada tendo em vista a adoção dos protocolos sanitários para evitar a disseminação do vírus. Junto a isso, o crescente número de pessoas vacinadas, o uso constante de máscaras de proteção e o distanciamento social corroboraram para aumentar a segurança contra os riscos biológicos que poderiam e podem ser fatais aos seres humanos.

Em relação à prática pedagógica, é imprescindível destacar a escolha da metodologia de Resolução de Problemas, por ser um referencial com o qual o grupo estava mais familiarizado. Optou-se por utilizá-la a fim de investigar conceitos e auxiliar os alunos na introdução das ideias sobre sistemas lineares. O preceptor sugeriu que os residentes escolhessem um dos conteúdos disponíveis conforme as orientações curriculares da rede estadual de educação daquele trimestre¹. Após selecionar o tema, houve tempo para pesquisar, planejar e apresentar a prática pedagógica que foi se aprimorando durante as reuniões semanais com o grupo do Programa de Residência Pedagógica. Todas essas etapas de planejamento aconteceram com discussões semanais antes da etapa de ir a campo fazer a intervenção na turma.

Este texto está estruturado com base nas discussões sobre duas intervenções em turmas da segunda série do Ensino Médio, destacando-se os principais momentos das aulas, as percepções dos licenciandos sobre o trabalho pedagógico presencial em comparação com o modelo de atendimento remoto síncrono junto a participação e o envolvimento dos estudantes da escola básica. E, por fim, foram ressaltadas as análises e as discussões sobre o desenvolvimento da intervenção utilizando as experiências coletivas no grupo do PRP.

¹ Disponível em: <https://curriculo.sedu.es.gov.br/curriculo/orientacoes-curriculares/>

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No cenário histórico do NCTM - National Council of Teachers of Mathematics - a partir do final da década de 80 começou a emergir novas preocupações para a educação. Os trabalhos desenvolvidos pelo NCTM tinham a finalidade de auxiliar professores e destacar alguns aspectos considerados fundamentais para o ensino de matemática. Para Onuchic e Allevato (2011), após a publicação do *Principles and Standards for School Mathematics* (Popularmente conhecido como Standards 2000), os educadores matemáticos começaram a se dedicar mais a uma metodologia em especial:

Foi, de fato, a partir dos Standards 2000 que os educadores matemáticos passaram a pensar numa metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. Nessa concepção, o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e os professores, os responsáveis por conduzir esse processo (Onuchic & Allevato, 2011)

A Resolução de Problemas como metodologia não apresenta passos rígidos a serem seguidos. Entretanto, visando dar algumas noções dessa metodologia, segundo Onuchic e Allevato (2011), é possível dividi-la em algumas etapas, tais como: preparação do problema, leitura individual, leitura coletiva, resolução do problema, observação/incentivo, registro das resoluções na lousa, plenária e formalização do conteúdo. Na pesquisa, o foco do trabalho não foi dividir e detalhar cada uma dessas etapas citadas criteriosamente, mas sim analisar as interações coletivas e a investigação dos conceitos trabalhados, na perspectiva do referencial teórico. Assim, neste relato, adotou-se a definição de “problema” como tudo aquilo que não tem os procedimentos prontos, mas busca estratégias de resolução e, sobretudo, há o interesse em investigar e solucionar (Onuchic & Allevato, 2011).

A Resolução de Problemas, no aspecto referente à forma de abordagem, é dividida por alguns autores em categorias distintas. Mendonça (1999), por exemplo, categorizou em “como objetivo”, “como processo” ou “como ponto de partida”. A primeira caracteriza o ensino de matemática para resolver problemas. A segunda tem um enfoque nos processos heurísticos (prioriza as estratégias de solução). A última valoriza a problematização e a formulação de questões, convergindo, dessa forma, para o que propõem Lamonato e Passos (2011) sobre exploração-investigação matemática, na qual o aluno é conduzido a

[...] pensar a partir de uma dinâmica que prevê observações, descobertas, erros, acertos e fundamentalmente, decisões. Essa, em síntese, é a essência da exploração-investigação matemática que entendemos para a Educação Básica e também para a formação de professores, uma vez que, por tratar-se de questões ou situações abertas, cabe, a quem está interessado em investigar, a tomada de decisões sobre o percurso a seguir (Lamonato & Passos, 2011)

De acordo com Lamonato e Passos (2011), a exploração-investigação matemática é um meio pelo qual pode ocorrer a aprendizagem da matemática. Esse processo visa possibilitar ao estudante momentos em que ele mesmo produzirá conhecimentos matemáticos, respeitando-se o nível de desenvolvimento em que ele se encontra. Nesse sentido, “investigar é procurar o que ainda não se conhece; investigar é questionar e procurar responder. Para investigar, é necessário querer saber; para investigar, é preciso estar curioso” (Lamonato & Passos, 2011, p. 62).

D’Ambrósio (1993) também reforçou a ideia da exploração-investigação na Resolução de Problemas ao defender a relação professor - aluno. De acordo com ele, dificilmente o aluno de matemática testemunha a ação real do matemático na busca pela solução de um problema, pois na maioria das vezes, o professor prepara todos os problemas, resolve previamente e apenas reproduz dentro da sala de aula as soluções encontradas. Desse modo, o educador guarda para si a emoção de uma descoberta, ou talvez de frustrações ocasionadas por caminhos que não conduzem a solução alguma. Isso pode dar a falsa impressão de que ele sempre está correto em suas resoluções e nunca tem um obstáculo, bem como faz o aluno acreditar que ele também irá repetir este ato com a mesma elegância do professor em qualquer problema enfrentado posteriormente (D’Ambrósio, 1993).

3 UMA PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Para o relato abordado neste texto, a ideia da intervenção foi colocada em pauta ao começar a discutir problemas que geraram algumas possibilidades de combinação de notas de dinheiro de papel para obter uma determinada quantia e que solicitava que o resolvidor determinasse a quantidade de cada nota, conforme apresentado no *Quadro 1*.

Quadro 1: Problemas trabalhados com a turma 2M3

1º problema: Jack Sparrow tem apenas notas de cinco e de dois reais, num total de nove notas. Se ele tem 39 reais ao todo, quantas notas de cada tipo ele tem?

2º problema: Jack Sparrow tem apenas notas de cinco e dez reais e diz que tem 85 reais. Ele disse que com o dobro de cada nota consegue 180 reais. Qual é a quantidade de notas que ele tem? Ele fez o cálculo correto?

Fonte: Problemas elaborados no Programa de Residência Pedagógica em Matemática – Ifes Vitória, 2021

Por ser um problema relativamente aberto, despertou interesse nos pesquisadores, pois os alunos poderiam trazer diversas ideias diferentes para alcançar um resultado próximo ou não. Resumidamente, o desejado era que os alunos encontrassem e analisassem as relações entre, pelo menos, três tipos de soluções para o problema discutido, envolvendo estratégias de resoluções associadas ao campo algébrico e ao campo geométrico e atribuindo um caráter exploratório-investigativo para a aula a ser ministrada.

Nesse sentido, uma importante ferramenta adotada para o processo investigativo foi o GeoGebra – software de geometria dinâmica – que proporcionou aos alunos mais agilidade para visualizar a associação das soluções de um sistema de equações com a posição relativa de retas coplanares. Foi possível articular conhecimentos do campo algébrico com o campo geométrico ao valorizar a interpretação geométrica de um sistema linear (possível e determinado - com apenas uma solução) no primeiro problema e, no segundo problema, outro sistema linear (impossível - sem solução).

Para fazer essa intervenção, foram utilizados como recursos os computadores do laboratório da escola com o software GeoGebra, de forma *on-line*, o projetor datashow, quadro branco e pincel. Essas ferramentas foram importantes para o desenvolvimento da aula, pois permitiram utilizar as diferentes estratégias dos alunos na resolução dos problemas, inclusive com a participação de alguns alunos no quadro demonstrando suas soluções.



Figura 1. Laboratório de informática durante a aula com a turma 2M3
Fonte: Acervo do Programa de Residência Pedagógica em Matemática – Ifes Vitória, 2021

O laboratório de informática foi um espaço da escola propício para desenvolver a aula. É possível visualizar na Figura 1 a sala com cada aluno diante de um computador, sendo que alguns trabalharam em duplas. Infelizmente não eram todos os computadores que estavam funcionando, porém não houve prejuízos no desenvolvimento da aula. Para contemplar os alunos que ficaram sem o computador, um notebook reproduzia essa imagem no quadro por meio do projetor. Dessa maneira foi possível manipular o software enquanto os alunos acompanhavam o raciocínio ali discutido. Além disso, a presença de dois professores de matemática, sendo um deles o preceptor e a outra a professora regente da turma, favoreceram a dinâmica da aula, impactando de forma positiva a investigação e a utilização dos recursos do laboratório, por meio de um atendimento direcionado para cada aluno e para as discussões coletivas nos momentos de plenária.

Após apresentar o primeiro problema, houve um tempo de cinco minutos para que os alunos tentassem resolver o segundo. Antes de o tempo se esgotar, algumas soluções já apareceram. Convém ressaltar que o intuito inicial no planejamento era estudar as soluções para o primeiro problema e, depois, fazer um caminho parecido no segundo problema, para, enfim, formalizar o conceito.

Na sequência, após os alunos compartilharem suas opiniões, algumas de suas ideias a respeito dos problemas foram agrupadas e, após um debate (plenária), chegou-se à etapa final – a formalização, conforme mostrado na Figura 2.

Sistema	Solução	Posição no plano	Relação entre coef. angulares
1 - SPD	única solução	concorrentes	$a_r \neq a_s$
2 - SPI	infinitas soluções	paralelas (coincidentes)	$a_r = a_s$
3 - SI	nenhuma solução	paralelas (distintas)	$a_r = a_s$

Figura 2. Sistematização das posições relativas entre duas retas

Fonte: Acervo do Programa de Residência Pedagógica em Matemática – Ifes Vitória, 2021

Na Figura 2 há um recorte do que foi planejado para ser um momento de sistematização dos conceitos apresentados na resolução dos problemas envolvendo o campo algébrico e o geométrico. Um objetivo específico foi equacionar o primeiro e o segundo problema para, posteriormente, relacionar as equações com retas em um plano cartesiano - via GeoGebra. Essas retas, por sua vez, têm posições relativas, e podem indicar quando um sistema é possível e determinado, possível e indeterminado ou impossível.

4 DIÁLOGOS E REFLEXÕES EM UM AMBIENTE INVESTIGATIVO

Baseado na situação planejada surgiram alguns resultados relacionados às participações dos alunos. Assim, com auxílio da gravação da aula é possível transcrever alguns diálogos², os quais esboçam a construção dos conceitos de forma coletiva ao longo da aula.

Residente: Alguém conseguiu resolver esse primeiro problema?

Aluno 1: Sim

Residente: Querem compartilhar a solução?

Aluno 1: Chegamos a 35 reais com 7 notas de 5 reais e chegou a 39 reais, somando com duas notas de 2 reais.

Preceptor: Mas foi direto assim? Chegaram no 35 de primeira, e depois completaram com duas notas de 2?

Aluno 1: Não, primeiro erramos uns cálculos e, depois, nós percebemos que a quantidade de notas de 5 tem que ser ímpar, somando 15 ou 25 reais, por exemplo...Porque senão não dá para chegar a 39.

Preceptor: Por quê?

Aluno 2: Porque como o 2 é par, a quantidade das notas de 5 não pode ser par, senão as somas mais próximas vão dar 38 reais ou 40 reais, e não 39.

(Diálogo entre residente, preceptor e alunos, 2021)

² Seguindo orientações do Conselho de Ética, omitimos os nomes verdadeiros dos alunos para preservá-los de qualquer tipo de constrangimento, mitigando a exposição e riscos deles.

Nesse diálogo inicial, é possível notar a solução que uma dupla de alunos utilizou para resolver o problema, o conceito de paridade. Outro ponto importante é que apesar de não terem demonstrado que essa seria a única solução possível, eles apresentaram uma estratégia que reduziu as possibilidades da quantidade de notas de 5 reais que atendessem a todas as condicionantes do problema.

De acordo com a resolução de problemas pautada na investigação, no início, uma situação/problema é apresentada e baseada nela, os alunos, por meio de explorações, devem construir questionamentos na busca por uma solução. Nesse percurso, eles podem levantar hipóteses e verificá-las em um trabalho coletivo, até que ocorra a socialização de resultados com a turma (Lamonato & Passos, 2011), como se pode perceber no diálogo apresentado anteriormente e na sequência de falas apresentada a seguir:

Aluno 3: Eu fiz 12 vezes 2 e a soma com 3 vezes 5.

Residente: Por quê?

Aluno 3: Pois são 12 notas de 2 reais e 3 notas de 5 reais.

Residente: Bem, realmente a soma dessas notas vai dar 39 reais. Mas faltou atender a uma condicionante do problema: "Jack Sparrow tem um total de 9 notas"

Aluno 3: Ah!

[...]

Residente: Alguém pensou numa solução algébrica? Utilizando incógnitas.

[Silêncio dos alunos]

Preceptor: E se fosse necessário utilizar incógnitas para resolver este problema?

Aluno 4:

$$x + y = 39 \tag{1}$$

Residente: Isso faz sentido para vocês?

Aluno 2: Sim, pois o "x" pode ser o 7 e o "y" pode ser o 2.

Residente: Ok. Se essa equação aqui é verdadeira ($x + y = 39$), então $x = 7$ e $y = 2$ devem satisfazer a igualdade.

Aqui temos:

$$x + y = 7 + 2 = 9 \Rightarrow 9 = 39 \tag{2}$$

Isso faz sentido?

Aluno 5: Não!

$$5x + 2y = 39 \tag{3}$$

Residente: Obrigado! Agora vamos verificar se essa equação que a colega falou faz mais sentido.

Preceptor: O que significa a equação (3)?

Aluno 1: O 5 multiplica a quantidade de notas, o 2 é a mesma coisa e tudo tem que dar 39.

Residente: Calma aí, o que representa o "x"?

Aluno 1: O número de notas.

Residente: Que notas?

Aluno 1: As notas de 5 reais.

Residente: Então, o y...

Aluno 1: É a quantidade de notas de 2 reais.

Residente: Entendi!

Que outra equação podemos pensar para este mesmo problema?

Aluno 5:

$$x + y = 9 \tag{4}$$

(Diálogo entre residente, preceptor e alunos, 2021)

Pode-se observar no desenrolar da discussão que, aos poucos, o campo algébrico foi ganhando espaço e também significado para alguns alunos. O preceptor ainda contribuiu com uma reflexão afirmando que houve uma tradução da linguagem materna para a linguagem matemática, ao transformar a frase “Jack Sparrow tem notas de 5 e notas de 2, tendo um total de 9 notas” na equação (4) em que:

x : representa a quantidade de notas de 5 reais e y : representa a quantidade de notas de 2 reais.

Outro ponto observado no diálogo é que diferentes estudantes se envolveram nas discussões, ora completando o raciocínio do colega, ora apontando outras possibilidades de soluções ou tentativas ao desenvolverem a atividade. A discussão coletiva beneficiou os aspectos exploratórios-investigativos e propiciou um espaço dialógico frente a um ambiente de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos (Lamonato & Passos, 2011).

Ao prosseguir com as discussões e por meio de algumas indagações, os alunos apresentaram duas equações distintas que representavam a situação-problema. Isso possibilitou introduzir alguns aspectos relacionados às estratégias de resolução de um sistema de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas, bem como continuar com da discussão:

Residente: Alguém sabe me dizer como podemos dar continuidade nesta resolução?

Aluno 1: Eu lembro mais ou menos...Tem que fazer o cálculo do “x” de uma equação, e o resultado desse “x” tem que ser colocado na outra equação.

Aluno 6: É. Também lembro de alguma coisa assim.

Residente: Deixa-me ver se entendi. Você quer isolar o valor de “x” e substituir na equação de cima? Como ficaria esse “x” isolado?

(Diálogo entre residente e alunos, 2021)

Infelizmente, nesse exato momento da discussão, devido ao pouco tempo restante de aula, foi necessário acelerar o ritmo da investigação. Desse modo, foi utilizado o método da substituição, conforme sugerido pelo aluno, de forma a encontrar a solução para o

sistema, sendo os valores de $x = 7$ e $y = 2$. Tal solução coincidiu com o resultado alcançado por parte da turma por meio de tentativa-erro. A priori, houve um certo estranhamento por parte dos alunos ao serem inseridas as incógnitas x e y no problema, mas pouco a pouco a solução do campo algébrico ganhou espaço e alguns alunos começaram a produzir significado para ela. Vale salientar que apesar de não estarem utilizando inicialmente incógnitas em suas resoluções, os alunos já demonstravam elementos essenciais ao pensar no campo algébrico, tais como a inferência de valores, a testagem de hipóteses e a ideia de “qual valor pode ocupar esse espaço”. Assim, a formalização da linguagem vai ganhando significado ao relacionar os aspectos do pensamento algébrico com a própria linguagem matemática, o que favorece as discussões em um ambiente de resolução de problemas.

Ademais, ao apresentar essa solução algébrica com escrita formal, com a qual os alunos não estavam muito familiarizados embora já possivelmente terem tido contato com esse conteúdo ainda no Ensino Fundamental, vale o destaque para o aspecto “curiosidade”. A curiosidade foi o que os manteve sempre participativos e motivados a tentar entender uma solução diferente da que foi encontrada anteriormente. Afinal, “investigar é procurar o que ainda não se conhece; investigar é questionar e procurar responder. Para investigar, é necessário querer saber; para investigar é preciso estar curioso” (Lamonato & Passos, 2011). Esse fato gera indícios de como os conceitos e a formalização do conteúdo podem ser desenvolvidos por meio da metodologia de resolução de problemas, atrelados a um ambiente de discussões que valorizam as experiências e as soluções desenvolvidas pelos estudantes.

Residente: Ok, encontramos $y = 2$. O que isso significa para o nosso problema?

Aluno 6: Que tem duas notas de “y”.

Preceptor: Duas notas de “y”?

[risos da turma]

Aluno 7: Duas notas de 2.

Residente: Se ele tem duas notas de 2, então, deve ter quantas notas de 5?

Aluno 7: 7

Preceptor: Só para vocês entenderem melhor de onde vem o “7” ... Calculamos que o valor de “y” é igual a 2. Agora, substitua na equação (4), para determinar qual o valor de “x”. Vai resultar em

$$x = 9 - y \Rightarrow x = 9 - 2 \Rightarrow x = 7 \quad (5)$$

(Diálogo entre residente, preceptor e alunos, 2021)

O ambiente de Resolução de Problema instaurado na sala, no qual as discussões coletivas tiveram um papel importante contribuindo para o diálogo, proporcionou que os alunos atribuíssem significados aos conceitos relacionados ao sistema de equações e permitiu que novos saberes emergissem e fossem sistematizados por meio das discussões coletivas.

No planejamento definido, o esperado era que, ao chegar nesse ponto da discussão, eles utilizassem o GeoGebra para interpretar geometricamente qual o significado de ambas as equações geradas do problema. Entretanto, como foi mencionado, havia pouco tempo, e isso impediu alcançar os objetivos específicos. Diante disso, a adaptação e a reorganização do planejamento durante a aula resultaram em apresentar a resolução do problema pelo projetor datashow, utilizando o GeoGebra, conforme mostrado na Figura 3.



Figura 3. Solução do primeiro problema apresentada no GeoGebra

Fonte: Acervo do Programa de Residência Pedagógica em Matemática – Ifes Vitória, 2021

O professor preceptor contribuiu na problematização, aproveitando a ferramenta do GeoGebra, considerando como as alterações na quantidade total de notas do problema seriam afetadas graficamente. Alguns alunos demonstraram muita surpresa ao perceberem uma relação entre os resultados obtidos no campo algébrico e no campo geométrico, apresentados nessa aula. Essa ação, além de auxiliar para que os alunos atribuíssem significado ao conceito de sistema, proporcionou ao professor sistematizar o que foi discutido, etapa prevista na resolução de problema, e que contribui para ampliar o conceito. Pode-se inferir, assim, que esse último momento da aula, na ótica da Resolução de Problemas, para Onuchic e Allevato (2011), pode ser caracterizada como a etapa de *formalização*, em que o educador registra na lousa por meio de uma apresentação formal,

estruturada e organizada em linguagem matemática os conceitos/princípios envolvidos naquele problema inicial.

Na sequência, imediatamente, assim que outra turma chegou no laboratório, uma aluna expôs o resultado que ela ouviu – provavelmente de um(a) colega da outra turma. Possivelmente, esse deve ter sido um dos fatores pelos quais a dinâmica da aula seguiu de forma diferente. Desse modo, ao invés de seguir o mesmo curso da aula desenvolvida na turma 2M3, o preceptor sugeriu que avançassem para o próximo problema, cuja ação tinha como objetivo otimizar o tempo.

O segundo problema gerou várias discussões envolvendo debates entre os alunos. Esse fato, inclusive, instigou um dos alunos a apresentar sua solução no quadro, expondo seu raciocínio, conforme apresentado na Figura 4.



Figura 4. Aluno da turma escrevendo sua solução no quadro

Fonte: Acervo do Programa de Residência Pedagógica em matemática – Ifes Vitória, 2021

A ideia em discussão promovida pelo aluno envolveu a impossibilidade apresentada pelo problema 2. O que ele quis explicar foi que a premissa do problema “Com o dobro de cada nota possui 180 reais” não era coerente. De acordo com seu raciocínio, deveria ser 170 reais, já que 170 é o dobro de 85 reais (quantidade em dinheiro que o personagem do enunciado tinha inicialmente). Essa discussão foi ampliada quando outro aluno complementou o raciocínio:

Aluno 8: Jack Sparrow tá errado, porque se com o dobro ele tem 180 reais, com metade de cada nota ele deveria ter 90 reais ao invés de 85.

Residente: Se eu tenho 85 reais (com notas variadas), então, quer dizer que quando eu dobro a quantidade de notas tem que dar 170 reais (que é o dobro)?

Aluno 9: Sim.

Preceptor: Existem outras possibilidades para formar 85 reais com notas de 5 e de 10. Como conseguimos representar isso algebricamente?

(Diálogo entre residente, preceptor e alunos, 2021).

Nessa experiência com a turma, e também com estudos prévios feitos na Residência Pedagógica, concordamos que:

Na resolução de problemas, o professor elabora os problemas ou as questões, porém, há a possibilidade de que os alunos não sejam apenas os “resolvedores” dos problemas elaborados por outros, mas que também elaborem os seus próprios, que irão resolver. Na exploração-investigação matemática, dada a situação, a elaboração das questões já faz parte do processo de resolução. Por outro lado, ao final, ambas as atividades podem promover o debate e a socialização dos resultados como novo momento para argumentação e justificação (Lamonato; Passos, 2011)

Essa reflexão estimula pensar sobre a importância de ouvir os entendimentos e as ideias dos alunos, bem como permitir que eles possam assumir posturas reflexivas e cooperativas nas aulas de matemática. Isso porque o envolvimento ativo dos alunos favorece os aspectos conceituais nos processos de ensino e aprendizagem de matemática, nos quais professores e alunos são beneficiados na coprodução de conhecimentos, tanto nos aspectos dos conhecimentos escolares como nos associados à formação docente.

Ao prosseguir com essa discussão, observou-se que os alunos gastaram um pouco de tempo para adotar incógnitas para resolver o problema. O movimento de utilizar a linguagem algébrica na resolução do problema proposto começou a ser discutido quando um dos alunos mencionou que deveríamos utilizar “x” na conta. Diante disso, o diálogo avançou:

Aluno 10: Professor! Qual é o nome daquilo que a gente coloca x mais y é igual a tal...e y é igual a tal?

Aluno 9: É sistema!

Preceptor: Ajude a escrever esse sistema aí então.

Aluno 10:

$$\begin{cases} x + y = 85 \\ 2x + y = 180 \end{cases} \quad (6)$$

onde x são as notas de 5, e y são as notas de 10.

Professor: Isso faz sentido para vocês, pessoal?

Aluno 11: Sim!

Residente: Então, se eu somar a quantidade de notas de 5 e a quantidade de notas de 10, vai dar 85?

Preceptor: Vocês terão 85 notas?

Aluno 9: Não! Na verdade, o sistema deve ser:

$$\begin{cases} 10x + 5y = 85 \\ 2 \cdot (10x + 5y) = 180 \end{cases} \quad (7)$$

(Diálogo entre residente, preceptor e alunos, 2021)

Nesse ponto da conversa os alunos estavam com dúvida em relação à segunda equação. Como sugestão do preceptor, a opção foi retornar ao primeiro problema para que os alunos construíssem um novo sistema de equações e, dessa forma, pudessem repensar as equações construídas no problema 2.

Preceptor: E para resolver este primeiro problema, como nós podemos fazer?

Aluno 12: x são as notas de dois.

Aluno 9: E o y são as notas de cinco.

Preceptor: Poderia ser qualquer outra letra né? w, z, m, k, ...

Aluno 13: É! Mas a gente tá acostumado com x e y.

Preceptor: Beleza. Como podemos escrever esse sistema?

Aluno 14:

$$2x + y = 39 \tag{8}$$

(Diálogo entre preceptor e alunos, 2021).

A partir desse último diálogo, eles foram orientados em cada passo da construção do sistema para o problema 2 para, então, alcançar uma nova etapa.

Preceptor:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 39 \\ x + y = 9 \end{cases} \tag{9}$$

como podemos ler esse sistema aqui no contexto do problema?

Aluno 15: 2 vezes a quantidade das notas de dois mais 7 vezes quantidade das notas de cinco é igual a 39 reais.

Preceptor: E a outra equação?

Aluno 15: A quantidade de notas de 2 mais a quantidade de notas de 5 é igual a nove.

Residente: Como podemos resolver este sistema?

Aluno 15: É só a gente substituir o 2 no lugar do x e o 7 no lugar do y.

Residente: Ok, nesse caso já sabemos a solução. Se não soubéssemos a solução, como poderíamos resolver este sistema.

Aluno 9: Pega a equação de baixo, isola o x ou o y... Depois, pega a outra equação e substitui na fórmula.

Residente: Por que tem que fazer isso?

Aluno 9: Para resolver sistema eu só lembro assim.

Residente: Vamos fazer assim, então. Como ficaria o "x" isolado?

Aluno 9:

$$x = 9 - y \tag{10}$$

Aluno 9: Agora pega a outra equação de (9), substitui o x, vai ficar:

$$2 \cdot (9 - y) + 5y = 39 \tag{11}$$

(Diálogo entre residente, preceptor e alunos, 2021)

Nesse momento, vários alunos participaram da resolução dessa nova equação com apenas uma incógnita. A solução encontrada foi $x = 2$ e $y = 7$, portanto, 2 notas de R\$2,00 e 7 notas de R\$5,00, totalizando os R\$39,00 de Jack Sparrow.

Ao final da aula, o tempo restante foi utilizado para apresentar aos alunos a solução com o software GeoGebra. Como ambos os problemas já haviam sido discutidos no campo algébrico, então, faltava apenas complementar a explicação apresentando as soluções geométricas, conforme mostra a Figura 5 a seguir.

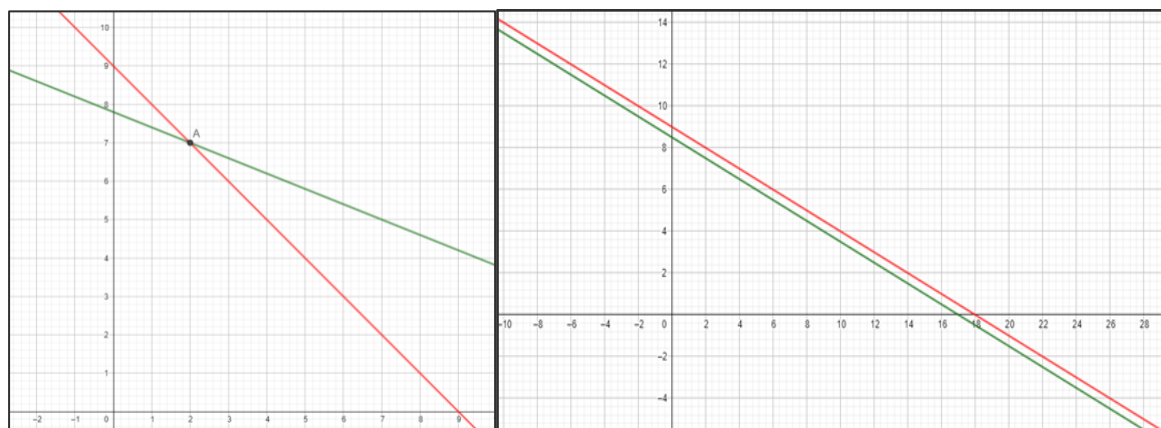


Figura 5. Soluções geométricas utilizando o GeoGebra

Fonte: Acervo do Programa de Residência Pedagógica em Matemática – Ifes Vitória, 2021

A Figura 5 mostra a representação geométrica de dois sistemas de equações lineares. A plotagem da esquerda representa o sistema de equações (9), classificado como “possível e determinado”, cujas soluções são $x = 2$ e $y = 7$. A figura da direita representa o sistema de equações (7), classificado como “impossível”, justamente por não admitir soluções reais. Essas representações foram fundamentais para associar as representações geométricas das soluções de cada sistema linear.

Durante as atividades, as duas turmas encontraram diferentes soluções. Isso, contudo, não implicou que alguma das soluções estivesse incorreta. A diferença gráfica observada no GeoGebra ocorreu por conta das diferentes atribuições dadas para as incógnitas “x” e “y” junto às associações de cada solução com base nas soluções geométricas.

Ao apresentar essas soluções, alguns questionamentos foram feitos para que os alunos refletissem sobre o significado de cada elemento presente nas imagens, de forma a relacionar as formas geométricas com as soluções de seus respectivos problemas. Alguns

alunos ficaram surpresos ao perceberem que a intersecção das duas retas do sistema linear indicava a solução do primeiro problema em suas coordenadas no plano cartesiano.

Para o segundo problema, entretanto, não existia solução, e isso foi representado pelas duas retas paralelas, que não têm intersecção. Essa “surpresa” e “curiosidade” despertadas nos alunos foi fator crucial para a produção de significados para a álgebra em uma aula sobre sistemas lineares associados às soluções geométricas, mostrando interconexões dentro da própria matemática e o entendimento de que os conteúdos escolares não precisam ser trabalhados isoladamente, mas podem estabelecer relações entre diferentes campos da matemática.

De modo geral, é possível destacar algumas potencialidades para o ensino de matemática percebidos neste relato, indo ao encontro dos estudos de Lamonato e Passos (2011). Entre elas, a importância de proporcionar momentos de trabalho em grupo que estimulam e valorizam a organização e a troca de experiências e conhecimentos entre alunos, professores e residentes. Esse espaço foi importante para consolidar a produção de conhecimentos e propiciar diferentes mediações simultâneas no mesmo ambiente de sala de aula.

É relevante também oportunizar o registro, a negociação e a comunicação dos processos e resultados ao pensar a sala de aula como ambiente democrático de produção de conhecimentos. Nessa perspectiva, é fundamental estimular a aprendizagem, bem como articular conhecimentos aprendidos anteriormente, valorizando as experiências e as vivências de cada sujeito envolvido nos processos de ensino e aprendizagem.

Nessa mesma vertente, é imprescindível contribuir para o desenvolvimento da relação entre objetos e situações no campo matemático e colaborar para que as concepções do aluno a respeito da matemática estejam mais próximas da natureza dessa disciplina. E, por fim, vale ressaltar que o Programa de Residência Pedagógica incentiva ações vivenciadas e planejadas coletivamente e elas devem promover reflexões sobre a formação docente, seja inicial ou continuada, possibilitando, assim, aos envolvidos perceber de diferentes perspectivas os modos de produção de conhecimentos, compreendendo igualmente a produção de saberes que emergem da discussão coletiva.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todos os episódios vivenciados no Programa Residência Pedagógica até a escrita deste texto envolveram experiências ricas, desafiadoras, de modo que cada participante do programa teve a oportunidade de enfrentar certos desafios profissionais. A circunstância vivenciada neste trabalho foi a de que, finalmente, surgiu a oportunidade de visitar pela primeira vez o espaço físico da escola, de conhecer os alunos, entrar na sala de aula, utilizar os recursos e dialogar presencialmente com as turmas e o professor preceptor, apesar das adversidades e do momento de pandemia do Covid 19.

A respeito do planejamento e da execução das atividades com os alunos, estar no mesmo ambiente das tornou-se um ambiente propício durante a aula para dialogar muito mais com os alunos, em comparação com as intervenções virtuais via Google Meet que aconteceram em experiências anteriores. O único fator que limitou um pouco a proposta foi a questão do tempo, pois a aula foi planejada para ter 50 minutos de duração. No entanto, por conta de alguns imprevistos com equipamentos e deslocamento dos estudantes para o laboratório de informática, ocorreu uma perda considerável desse tempo de aula. Como consequência, a turma *2M3* teve uma aula mais reduzida, enquanto na turma *2M5* houve uma discussão mais profunda do ponto de vista matemático e da resolução de problemas, justamente por terem mais tempo para pensar e discutir.

Uma possibilidade que não foi colocada em prática nessa aula, para não expor os estudantes ao risco de contágio pelo vírus foi a de levar dinheiro de “brinquedo” para que houvesse uma dinâmica de grupos com os alunos, na qual eles iriam testar algumas combinações possíveis ao manipularem o material de apoio para resolver os problemas. Ao considerar essa proposta é possível pensar em um número mais amplo de problematizações, selecionar as mais adequadas aos objetivos da intervenção e, caso necessário, aumentar para duas aulas de 50 minutos o tempo de duração da intervenção.

Após analisar os resultados deste relato, concluímos que é possível aprimorar os problemas debatidos em sala mudando o personagem (Jack Sparrow), o contexto, mas mantendo os objetivos. A ideia de alteração serviria apenas para se aproximar mais da realidade dos alunos. Ao invés de propor um pseudoproblema, pode-se pensar em um problema real e comum aos estudantes, envolvendo: dinheiro, compras, transações financeiras e/ou depósitos bancários.

De modo geral, os alunos participaram muito bem e contribuíram bastante na construção das soluções dos problemas. Ademais, esse tipo de experiência é essencial e agrega muito na formação dos educadores de qualquer disciplina. Igualmente, essa ação docente, da forma como foi planejada e desenvolvida, pode propiciar ao licenciando um crescimento no âmbito profissional, pessoal, social e cultural. Essa experiência fortaleceu o objetivo de trabalhar com uma matemática cada vez mais significativa para os alunos em um ambiente propício à resolução de problemas em uma perspectiva de investigação coletiva e cooperativa, em que todos podem aprender uns com os outros.

REFERÊNCIAS

- Brasil (2019). Ministério da Educação. Regulamento do Programa de Residência Pedagógica (*Portaria nº 259/2019*), Brasília.
- BBC News (2021). Covid-19: Coronavírus pode sobreviver por 28 dias em celular e dinheiro, diz estudo. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/internacional-54503398>.
- D'ambrósio, B. (1993). Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *ProPosições*, v. 4, n. 1, p. 35-41.
- Lamonato, M & Passos, C. (2011). Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. *Zetetiké*, FE/Unicamp. v.19. n. 16.
- Mendonça, M. (1999). Resolução de problemas pede reformulação. *Investigações matemáticas na aula e no currículo*. Lisboa: Grupo "Matemática Para Todos – Investigações na sala de aula" (CIEFCUL) e Associação dos Professores de Matemática. p. 15-33.
- Onuchic, L & Allevato, N. (2011). Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de educação matemática*, 2011, v.25, n.41, 73-98.
- Onuchic, L. (2013). A resolução de problemas na educação matemática: Onde estamos? E para onde iremos? *Revista Espaço Pedagógico*, GTERP, v. 20, n. 1, 4 out. 2013.
- Paiva, M. & Souza, T. (2021). Experiências formativas embasadas na Matemática para o Ensino e no Concept Study. *Anais do SIPEM*, 2021.
- Silva, L. (2022). Posições relativas entre duas retas; *Brasil Escola*. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/posicoes-relativas-entre-duas-retas.htm>. Acesso em: 3 fev. 2022.
- Vianna, C. (2002). Resolução de Problemas. Livro Temas em Educação, o livro das Jornadas de 2002. Futuro Congresso e Eventos. p. 401-410.

NOTAS DA OBRA

Título Da Obra

Resolução De Sistemas Lineares: Uma Proposta De Intervenção Matemática Na Residência Pedagógica

Ladson Surlo Ramos

Graduação em Licenciatura em Matemática
Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil
lsurlo15@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0001-5752-9739>

Álan Felipe Siqueira Zetum

Graduação em Licenciatura em Matemática
Instituto Federal do Espírito Santo, Vitória – ES, Brasil
afs.zetum@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-5655-0939>


Elcio Pasolini Milli

Doutorando em Educação em Ciências e Matemática
Instituto Federal do Espírito Santo, Vila Velha – ES, Brasil
elciopmilli@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0002-6459-6291>

Maria Auxiliadora Vilela Paiva

Doutora em Matemática- IMPA; Pós Doutora em Ensino da Matemática- UFRJ
Instituto Federal do Espírito Santo
vilelapaiva@gmail.com

 <https://orcid.org/0000-0003-2713-1345>

Endereço de correspondência do principal autor

Rua São José, n. 16, CEP: 29121-226; Vila Velha; ES; Brasil.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos à Capes pelo apoio ao Programa de Residência Pedagógica, a qual muito tem contribuído para a formação inicial e continuada de professores ao promover mudanças nas dinâmicas de sala de aula na educação básica. Agradecemos a parceria de trabalho com todos os residentes do subprojeto de matemática do Programa de Residência Pedagógica do Instituto Federal do Espírito Santo – Ifes campus Vitória, pelos diálogos e aprendizagens coletivas e a escola campo EEEFM Almirante Barroso pelo espaço formativo relatado nesse artigo.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Concepção e elaboração do manuscrito: L. S. Ramos, A. F. S. Zetum, E. P. Milli, M. A. V. Paiva

Coleta de dados: L. S. Ramos, A. F. S. Zetum, E. P. Milli, M. A. V. Paiva

Análise de dados: L. S. Ramos, A. F. S. Zetum, E. P. Milli, M. A. V. Paiva

Discussão dos resultados: L. S. Ramos, A. F. S. Zetum, E. P. Milli, M. A. V. Paiva

Revisão e aprovação: L. S. Ramos, A. F. S. Zetum, E. P. Milli, M. A. V. Paiva

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA

O conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo não está disponível publicamente.

FINANCIAMENTO

A produção do artigo foi realizada pela participação dos autores no Programa de Residência Pedagógica fomentado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES – com bolsas fornecidas pela mesma instituição. Número do Projeto da Residência Pedagógica - Processo Capes: 88887.478758/2020-00

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem,

adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EQUIPE EDITORIAL – uso exclusivo da revista

Méricles Thadeu Moretti
Rosilene Beatriz Machado
Débora Regina Wagner
Jéssica Ignácio de Souza
Eduardo Sabel

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 06-09-2022 – Aprovado em: 24-05-2023