REDIMAT
Journal of Research in Mathematics Education

Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Instructions for authors, subscriptions and further details:

http://redimat.hipatiapress.com

Razonamiento Covariacional y Técnicas Instrumentadas en la Resolución de un Problema de Optimización Mediado por GeoGebra

Mihály A. Martínez-Miraval[1], Daysi J. García-Cuéllar[2], Martha L. García-Rodríguez[3]

1) Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú
2) Universidad Antonio Ruiz de Montoya, Perú
3) Instituto Politécnico Nacional, México

Date of publication: February 24th, 2023
Edition period: February 2023-June 2023

To cite this article: Martínez-Miraval, M.A., García-Cuéllar, D.J. y García-Rodríguez, M.L.(2023). Razonamiento Covariacional y Técnicas Instrumentadas en la Resolución de un Problema de Optimización Mediado por GeoGebra. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education*, *12(1)*, 56-81. doi: 10.17583/redimat.11419

To link this article: http://dx.doi.org/10.17583/redimat.11419

REDIMAT, Vol. 12 No. 1 February 2023 pp. 56-81

Razonamiento Covariacional y Técnicas Instrumentadas en la Resolución de un Problema de Optimización Mediado por GeoGebra

Mihály A. Martínez-Miraval
Pontificia Universidad Católica del Perú

Daysi J. García-Cuéllar
Universidad Antonio Ruiz de Montoya

Martha L. García-Rodríguez
Instituto Politécnico Nacional

(*Received: 23 November 2022; Accepted: 12 February 2023; Published: 24 February 2023)*

Resumen

El estudio realizado tuvo por objetivo documentar cómo distintas técnicas instrumentadas se relacionan con distintas acciones mentales durante el trabajo de estudiantes universitarios en una actividad de optimización mediada por GeoGebra. Con el fin de minimizar la longitud de la cerca de un terreno rectangular, los estudiantes pusieron en juego acciones mentales, que fueron visibles en las manipulaciones con GeoGebra, asociadas con distintos niveles de razonamiento covariacional, y que permitieron identificar diferentes técnicas instrumentadas. Se concluye que el uso de técnicas instrumentadas que involucran conceptos relacionados con la derivada, como la pendiente de recta tangente o la función derivada, visibilizan comportamientos asociados con acciones mentales de un razonamiento covariacional más sofisticado.

Palabras clave: Acción Mental; Razonamiento Covariacional; Técnica Instrumentada; Derivada; Geogebra.

2023 Hipatia Press
ISSN: 2014-3567
DOI: 10.17583/redimat.11419

REDIMAT, Vol. 12 No. 1 February 2023 pp. 56-81

Covariational Reasoning and Instrumented Techniques in the Resolution of an Optimization Problem Mediated by GeoGebra

Mihály A. Martínez-Miraval
Pontificia Universidad Católica del Perú

Daysi J. García-Cuéllar
Universidad Antonio Ruiz de Montoya

Martha L. García-Rodríguez
Instituto Politécnico Nacional

(*Recibido: 23 Noviembre 2022; Aceptado: 12 Febrero 2023; Publicado: 24 Febrero 2023)*

Abstract

The aim of this study was to document how different instrumental techniques are related to different mental actions during the work of university students in an optimization activity mediated by GeoGebra. To minimize the length of the fence of a rectangular plot, the students put into play mental actions, which were visible in the manipulations with GeoGebra, associated with different levels of covariational reasoning, and which allowed us to identify different instrumented techniques. It is concluded that the use of instrumented techniques involving concepts related to the derivative, such as the slope of the tangent line or the derivative function, make visible behaviors associated with mental actions of a more sophisticated covariational reasoning.

Keywords: mental action; covariational reasoning; instrumented technique; derivative; GeoGebra.

2023 Hipatia Press
ISSN: 2014-3567
DOI: 10.17583/redimat.11419

El razonamiento covariacional es un proceso de pensamiento importante relacionado con conceptos fundamentales de Cálculo, como función, derivada o integral y con el estudio de fenómenos dinámicos (Thompson y Carlson, 2017).

Numerosas investigaciones destacan la importancia de la derivada como una pieza fundamental en el estudio de las matemáticas. Se identifican aquellas en las que se realizan procesos de aproximación al concepto de derivada que involucran nociones de función, pendiente y límite mediante la exploración de fenómenos dinámicos (Bataineh et al., 2019), esta noción de límite involucra conocimiento sobre los números reales, el infinito, la noción de aproximación (Medrano y Pino-Fan, 2016). En otras, el énfasis está en conocer cómo interpretan los estudiantes la derivada de una función en un punto y la función derivada (Avgerinos y Remoundou, 2021), y cómo lo hacen en problemas de aplicación relacionados con temas de física, al trabajar con velocidades y aceleraciones (Galindo-Illanes et al., 2022), o en su relacionan con la monotonía, concavidad y optimización de funciones en contextos matemáticos y no matemáticos (LaRue e Infante, 2015).

La optimización de funciones se trabaja en cursos iniciales de matemática en las universidades, a partir de un análisis gráfico de la monotonía de funciones; y en cursos de Cálculo, la derivada forma parte de los criterios que permiten determinar valores extremos de una función. Sin embargo, la forma en que en general resuelven los problemas de optimización, es determinar valores críticos, los valores extremos de una función en un intervalo dado, identificar si estos son relativos o absolutos mediante el criterio de la segunda derivada; lo que se orienta a un pensamiento estático, en donde prima el uso de operaciones algebraicas y la interpretación de valores numéricos de las razones de cambio de la función (Mkhatshwa y Doerr, 2018).

Ante estas prácticas, se hace necesario poner énfasis en la comprensión de los procesos de variación y cambio relacionados con la derivada, por encima de la memorización de expresiones algebraicas y cálculos algorítmicos (Antonio et al., 2019).

Abordar el concepto de derivada en el contexto de fenómenos dinámicos, requiere contar con una comprensión madura de las relaciones funcionales, que permita coordinar los cambios de una variable mientras el sujeto imagina los cambios en la tasa de variación instantánea de una función, a fin de representar e interpretar sus características dinámicas (Villa-Ochoa et al., 2018). Razón por la cual, es relevante investigar acerca de la manera en la que los estudiantes razonan covariacionalmente al resolver situaciones de optimización de funciones. En este sentido, las tecnologías digitales se identifican como potenciadoras de nociones intuitivas de la pendiente de la recta tangente, monotonía de funciones, variación y covariación (Rojas-Escribano et al., 2017), que están asociados con los procesos de optimización; y desde algunos autores, el uso de las herramientas propias de cada tecnología, moviliza esquemas mentales relacionados con el concepto que se estudia (Orts et al., 2018).

Por otro lado, los estudiantes pueden utilizar una tecnología digital de distinta manera. Por ejemplo, al analizar la derivada de una función en un punto: un estudiante puede derivar la función y evaluar la derivada en el punto, utilizar un proceso de aproximación con límites, o determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto; cada una de estas técnicas se asocia con lo que se ha llamado un esquema de instrumentación, que es diferente en cada caso dado que las acciones realizadas con la tecnología digital son distintas (Rooda et al., 2016).

Las aportaciones de Rooda et al. (2016), Orts et al. (2018) y Rojas-Escribano et al. (2017), entre otros, sugieren que es posible hacer visible la coordinación de los cambios simultáneos entre dos variables, al abordar la derivada como un proceso dinámico, e incorporar el uso de tecnologías digitales. También señalan que puede resultar apropiado introducir al estudiante en el cálculo diferencial, a partir de la noción de variación en un contexto numérico, y luego generar otra interpretación de la derivada en su representación gráfica apoyado por la tecnología (Sánchez-Matamoros et al., 2008); así como incorporar atributos que los estudiantes puedan manipular y medir al trabajar en tareas diseñadas para fomentar su razonamiento, poniendo énfasis en las matemáticas del cambio y la variación (Johnson y McClintock, 2018).

La revisión de la literatura brinda evidencia de algunas ventajas que se obtienen al usar tecnologías digitales en la resolución de problemas de optimización, así como de la necesidad de realizar investigaciones en las que los estudiantes desarrollen la habilidad de razonar covariacionalmente al estudiar fenómenos de naturaleza dinámica, y mediante el uso de tecnologías digitales. El presente estudio se inscribe en esta línea y tiene por objetivo documentar cómo distintas técnicas instrumentadas se relacionan con distintas acciones mentales durante el trabajo de estudiantes universitarios en una actividad de optimización mediada por GeoGebra.

Fundamento Teórico

En este trabajo se consideran dos aproximaciones teóricas: la del razonamiento covariacional, para identificar la coordinación de valores de variables y las acciones mentales que realiza el estudiante, y la aproximación instrumental, para reconocer qué técnicas instrumentadas usa el estudiante y, en la parte epistémica de esta, qué esquemas de utilización se movilizan o generan al trabajar en un problema de optimización.

Razonamiento Covariacional

Este trabajo se adhiere a lo expuesto por Thompson y Carlson (2017) sobre el razonamiento covariacional, quienes lo conciben como el proceso de "conceptualizar los valores de cantidades individuales como variables y luego conceptualizar dos o más cantidades como que varían simultáneamente" (p. 423). Los estudiantes tienen diferente manera de pensar acerca de los cambios que perciben en las variables y cómo estos cambios se relacionan, esta manera de pensar se asocia con una acción mental (AM) o un conjunto de ellas, que pueden ser interpretadas y descritas a partir de las expresiones verbales o de las acciones concretas que realice el estudiante (Carlson et al., 2002). Estas acciones mentales son el núcleo que permite reconocer qué tan sofisticado es el razonamiento covariacional de los estudiantes.

En la tabla 1 se presentan los niveles de razonamiento covariacional propuestos por Thompson y Carlson (2017). Las descripciones que se realizan de cada nivel, permiten reconocer y jerarquizar la manera en la cual un estudiante percibe la coordinación de los cambios entre los valores de dos variables. Como estas descripciones son generales, se pueden adaptar para analizar el razonamiento covariacional de un estudiante que resuelve tareas sobre temas de Cálculo.

Tabla 1
Niveles de Razonamiento Covariacional y descripción

Nivel	Descripción
Covariación continua suave	La persona imagina aumentos o disminuciones (en adelante, cambios) en el valor de una cantidad o variable (en adelante, variable) como si ocurrieran simultáneamente con cambios en el valor de otra variable, y la persona imagina ambas variables variando suave y continuamente.
Covariación continua a trozos	La persona imagina los cambios en el valor de una variable como si ocurrieran simultáneamente con los cambios en el valor de otra variable, e imagina ambas variables variando con una variación continua a trozos.
Coordinación de valores	La persona coordina los valores de una variable (x) con los valores de otra variable (y) con la anticipación de crear una colección discreta de pares (x, y).
Coordinación gruesa de valores	La persona forma una imagen general de los valores de las cantidades que varían juntos, como "esta cantidad aumenta mientras que la otra cantidad disminuye". La persona no imagina que los valores individuales de las cantidades vayan juntos. En cambio, la persona imagina un vínculo flexible y no multiplicativo entre los cambios generales en los valores de dos cantidades.
Pre-coordinación de valores	La persona imagina que los valores de dos variables varían, pero de forma asincrónica: una variable cambia, luego la segunda variable cambia, luego la primera, y así sucesivamente. La persona no anticipa crear pares de valores como objetos multiplicativos.
Sin coordinación	La persona no tiene una imagen de las variables que varían juntas. La persona se centra en la variación de una u otra variable sin coordinar los valores.

Nota. Traducido de Thompson y Carlson (2017, p. 435)

Cada nivel propuesto por Thompson y Carlson (2017) se puede asociar con acciones mentales que ocurren en el individuo, que se hacen visibles a través de comportamientos observables. De forma que, cuando un estudiante razona de manera variable entre niveles, se considera que razona en el nivel superior y que ha desarrollado los razonamientos de los niveles inferiores, esto da la idea de evolución en el razonamiento de un sujeto.

Los comportamientos observables relacionados con acciones mentales son específicos para una actividad dada. Martínez-Miraval y García-Rodríguez (2022) describen comportamientos en estudiantes universitarios cuando trabajan en una actividad relacionada con el concepto de integral definida y mediada por tecnologías digitales (tabla 2). Este trabajo contribuyó al presente estudio como una guía para identificar y describir los comportamientos en la resolución de un problema de optimización mediado por GeoGebra.

Tabla 2

Comportamientos y acciones mentales en una tarea de aproximación al área de una región con rectángulos y GeoGebra

Nivel	Comportamientos
Covariación continua suave	AM6: Extender la idea de coordinación simultánea entre la medida de la base de cada rectángulo y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos (S_L) cuando el valor de k tiende a infinito.
Covariación continua a trozos	AM5: Extender la idea de coordinación simultánea entre el número de rectángulos y la suma de las áreas de los rectángulos inscritos y circunscritos con la intención de aproximar el área de la región R, al aumentar el valor de k.
Coordinación de valores	AM4: Imaginar que los valores individuales de las cantidades van juntos.
Coordinación gruesa de valores	AM3: Expresar verbalmente cómo se coordinan los cambios entre el número de rectángulos y la suma de sus áreas en términos de aumentos o disminuciones.
Pre-coordinación de valores	AM2: Establecer de forma asincrónica relaciones entre los valores de diversas magnitudes, como el número de rectángulos y la suma de áreas de rectángulos; la cantidad de regiones no cubiertas (triángulos pequeños) y sus áreas.
Sin coordinación	AM1: Realizar operaciones aritméticas para dar sentido a los valores mostrados por en GeoGebra, como la suma de áreas de los rectángulos

Nota. Extraído de Martínez-Miraval y García-Rodríguez (2022, p. 116).

Técnica Instrumentada

Chevallard (1999) señala que una técnica es una manera de realizar una tarea, como puede haber una diversidad de técnicas para realizar la misma tarea, estas se distinguen a partir de los pasos realizados durante el proceso de resolución por parte de un individuo.

Las técnicas pueden evolucionar, de más simples a complejas, según los requerimientos o características de la tarea. En palabras del investigador:

> El estudio y la resolución de un problema de un determinado tipo va siempre a la par con la constitución de al menos un embrión de técnica, a partir del cual una técnica más desarrollada podrá eventualmente emerger (…), técnica que será a continuación el medio para resolver de manera casi rutinaria los problemas de este tipo (Chevallard, 1999, p. 243).

Estas técnicas se pueden diferenciar también según la herramienta que se utilice en la resolución de una tarea, ya sea que se emplee solo lápiz y papel, o tecnologías digitales, o una combinación de ambas.

Artigue (2002) define una técnica instrumentada como una manera o forma de resolver una tarea mediante el uso de herramientas digitales. Este tipo de técnicas no es solo un conjunto de pasos que se realizan con la herramienta tecnológica, sino que a la par se movilizan conceptos matemáticos implicados en dicha resolución. La técnica instrumentada "entrelaza necesariamente el conocimiento matemático estándar y el conocimiento sobre el artefacto" (Artigue, 2002, p. 10).

En el presente estudio, los estudiantes utilizaron herramientas digitales, específicamente un sistema de geometría dinámica (GeoGebra), por lo que, lo mencionado por Artigue permitió identificar técnicas instrumentadas durante la resolución de la tarea de optimización propuesta.

Método y Procedimientos Metodológicos

Se reporta una investigación descriptiva e interpretativa que se ubica en una perspectiva cualitativa, de acuerdo con Denzin y Lincoln (2011) en esta perspectiva, el investigador intenta dar sentido a fenómenos que ocurren en un ambiente natural que es la fuente de los datos recolectados, pone mayor atención en los procesos por encima del producto, esto es, en los significados que generan los estudiantes de los conceptos involucrados en la resolución de un problema, entre otras características.

Se reporta una sesión de clase que tuvo una duración de dos horas; participaron dos estudiantes de entre 17 y 18 años de una universidad de Lima-Perú, quienes desarrollaron una actividad que incluyó dos tareas que trabajaron en una plantilla de GeoGebra en la que realizaron sus exploraciones.

Los estudiantes a quienes llamaremos Sebastián y Anahí trabajaron en forma individual en GeoGebra durante una hora, guardaron lo realizado en un archivo digital y lo enviaron al correo del profesor-investigador, quien es uno de los autores de este trabajo. Posteriormente, los investigadores llevaron a cabo una entrevista semiestructurada donde los estudiantes compartieron lo realizado, esto con la intención de que entre ellos se produjera una interacción y retroalimentación, que los apoyara para cumplir el objetivo de la actividad. En todo momento el profesor-investigador realizó preguntas a los estudiantes para obtener mayor información sobre el proceso de resolución de las tareas, del mismo modo, los estudiantes tuvieron libertad de realizar preguntas para aclarar sus dudas, las interacciones entre los estudiantes y el investigador son reportados en el apartado de análisis y resultados de este documento.

Conocimiento Matemático y Tecnológico de los Estudiantes

Los estudiantes ya habían trabajado en el tema de funciones reales de variable real, la derivada de una función evaluada en un punto y la función derivada, habían construido significados de este concepto como el límite de un cociente de variaciones, la pendiente de una recta tangente y la razón de cambio instantánea, tenían conocimiento de técnicas de derivación, y sabían utilizar el criterio de la primera derivada para analizar la monotonía de funciones. La actividad desarrollada por los estudiantes en esta investigación se centra en la aplicación de estos conceptos a la optimización de funciones haciendo uso de GeoGebra.

En relación con el manejo de tecnologías digitales, los estudiantes tenían conocimiento de herramientas de GeoGebra que utilizaron en actividades sobre funciones, límites y derivada como límite de un cociente de variaciones y como la pendiente de una recta tangente. Las herramientas que los estudiantes emplearon fueron: punto, para dibujar puntos en el plano cartesiano, ya sea con el ícono de punto o al escribir sus coordenadas en la barra de entrada; polígono, para dibujar figuras geométricas; función, para representar algebraica y gráficamente un modelo matemático, mediante una expresión en la barra de entrada o al utilizar el comando Función; tangentes, para dibujar una recta tangente a la gráfica de una función en un punto; pendiente, para conocer el valor de la pendiente de una recta; deslizador, para realizar cambios instantáneos al enlazarlo con diferentes objetos; y derivada, para determinar la derivada de una función evaluada en un punto o la función derivada al redactar expresiones en la barra de entrada o al utilizar el comando Derivada.

Características de la Actividad

Se solicitó a los estudiantes construir un terreno rectangular de área fija y perímetro variable al manipular uno de los vértices del rectángulo. Los estudiantes debían modelar la función longitud de la cerca, y determinar las dimensiones del terreno que hiciera que esta longitud fuera mínima (figura 1).

Actividad

Una persona dedicada a la construcción es dueña de un campo en las laderas de un río, y lo va a utilizar para construir una cadena de hoteles. Se ha planificado que uno de los hoteles se construya sobre una base rectangular ABCD de 45 000 m^2 de área. Las dimensiones de la base del edificio dependerán de la longitud de cerca de protección que se coloque en tres de los cuatro lados de la base, dado que no se colocará cerca en el lado CD porque se ubica en la ladera del río.

En cada tarea que se plantea a continuación, explique su procedimiento, adjunte capturas de pantalla para complementar sus resultados y justifique sus resultados utilizando conceptos vistos en clase:

- Dibuje un terreno rectangular que mantenga las condiciones dadas de área al manipular uno de sus vértices.
- Describa cómo cambia la longitud de la cerca. Represente gráficamente cómo cambia la longitud de cerca.
- Determine la mínima longitud de cerca que se podría colocar para cercar la base del edificio.

Utilice el siguiente enlace: https://www.geogebra.org/m/urvhrmss, para realizar sus exploraciones.

Figura 1. Propuesta de actividad sobre el tema de optimización de funciones

Se esperaba que los estudiantes utilizaran diferentes técnicas instrumentadas para determinar la longitud solicitada, y durante este proceso fuera posible identificar las acciones mentales que pusieron en juego, así como diferentes nociones relacionadas con los conceptos de derivada o de monotonía.

Análisis de los Datos

A continuación, se describe el proceso de resolución de la actividad por parte de Sebastián y Anahí, durante el trabajo individual, y posteriormente durante la entrevista semiestructurada. En el análisis se incluyen capturas de pantalla que muestran las construcciones realizadas, así como expresiones verbales y acciones que derivaron del diálogo entre los estudiantes; éste se divide en tres episodios: (i) la exploración del problema de forma individual; (ii) el proceso de resolución de forma individual; y (iii) el trabajo conjunto de Sebastián y Anahí.

Exploración del problema por Sebastián

Para construir el terreno rectangular de área dada, Sebastián creó un punto A sobre el origen de coordenadas, y luego creó un punto B sobre el eje X (punto móvil del terreno). La primera acción mental (AM4): *construye un nuevo elemento (ordenada del punto C) a partir de la medida de dos cantidades,* identificada en el trabajo de Sebastián, se reconoce cuando construyó en GeoGebra utilizando la abscisa del punto móvil B, con la instrucción x(B), los vértices C y D del rectángulo. El punto C se creó cuando Sebastián escribió en la barra de entrada de GeoGebra: (x(B), 45000/x(B)), y el punto D, cuando escribió (0, 45000/x(B)).

La ordenada del punto C se puede considerar como un objeto multiplicativo, porque para su construcción Sebastián relacionó la medida del área (45000 m^2) con la medida de uno de los lados del rectángulo (x(B)). Luego, Sebastián construyó un rectángulo ABCD con la herramienta Polígono de GeoGebra, con esto GeoGebra se convierte en un medio en el que Sebastián materializa lo que pensó para dibujar la forma del terreno y realizar la exploración del problema.

La construcción se puede considerar el primer paso de una técnica instrumentada relacionada con la optimización de la función longitud de la cerca. Cuando el estudiante dibuja un rectángulo con la herramienta *polígono*, que representa el terreno rectangular, se genera en la vista algebraica de GeoGebra, las variables *a*, *b*, *c* y *d* asociadas con la medida de cada uno de los lados del rectángulo, mismo que serán utilizados para construir la función.

Proceso de resolución realizado por Sebastián

La segunda acción mental (AM2) de Sebastián se identificó cuando modificó la longitud del lado AB del rectángulo al mover el punto B, con esto corroboró que el área se mantenía constante. Después, escribió en la barra de entrada: $a + b + d$, para determinar la longitud de la cerca (el lado CD del terreno rectangular, cuya medida se simboliza con la variable *c*, no se cerca porque limita con el río), con lo que obtuvo el valor de *e* ($a + b + d = e$). Movilizó nuevamente el punto B, y se fijó en los valores de *e*. Este proceso lo realizó varias veces y cada vez más lento con la intención de no realizar cambios bruscos, observando los valores del lado AB y luego el de la longitud de la cerca. Esto corresponde a comportamientos asociados con una AM2: *establece de forma asincrónica relaciones entre los valores de las variables longitud del lado AB y longitud de la cerca, representados en las vistas algebraica y gráfica de GeoGebra.*

La tercera acción mental (AM3): *expresa verbalmente cómo coordinan los cambios entre la longitud del lado AB y la longitud de la cerca, en términos de aumentos y disminuciones al manipular elementos móviles de GeoGebra*, se identificó cuando Sebastián reconoce que los valores de la longitud de la cerca disminuyen a medida que el punto B se aleja del punto A, y aumentan aproximadamente a partir de $x(\mathrm{B}) = 300$, aunque parecía confundido, porque $x(\mathrm{B})$ tenía valores con decimales.

Sebastián abrió una vista gráfica 2 de GeoGebra para escribir en la barra de entrada (x(B), e) y con esto obtener un punto E, cuyas coordenadas representan la longitud del lado AB y la longitud de la cerca respectivamente. Al activar el rastro y movilizar el punto B, se generó una gráfica discreta de puntos que permite observar en una gráfica cómo cambia la longitud de la cerca al variar la longitud de uno de sus lados. Lo realizado por Sebastián en la vista gráfica 2 corresponde a una cuarta acción mental (AM4): *construye* *un nuevo elemento (punto E) que representa la coordinación de los valores individuales de dos cantidades.*

El punto E también es un objeto multiplicativo, porque relaciona la longitud de la cerca ($a + b + d$, que es la suma x(B) + 45000/x(B) + 45000/x(B), con la medida de uno de los lados del rectángulo (x(B)), y el conjunto discreto de pares ordenados que componen su rastro, es una representación de este objeto (figura 2).

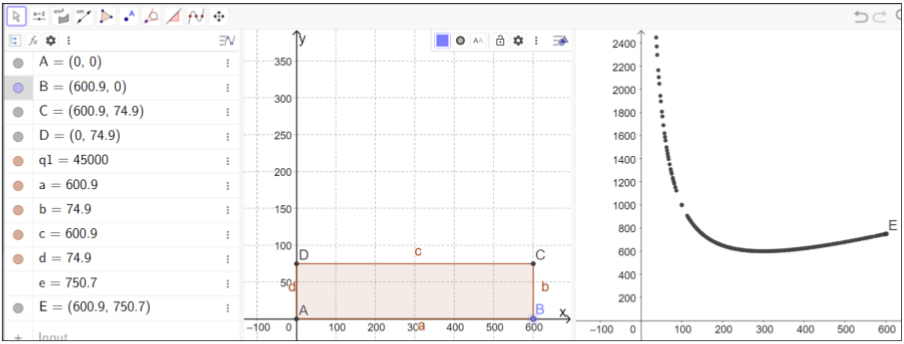

Figura 2. Construcción en GeoGebra realizada por Sebastián

Sebastián puso en juego sus acciones mentales AM2, AM3 y AM4 cuando construyó con GeoGebra: el terreno rectangular, la función longitud de la cerca, y el punto E, cuyo rastro brinda el comportamiento de esta función. El estudiante afirmó que la longitud de la cerca disminuye hasta que x(B) = 300 aproximadamente, y de allí en adelante aumenta; aunque no estaba seguro porque x(B) tomaba valores con decimales, y la manipulación del punto B no era muy fina, dado que lo hizo manualmente sobre su tableta. En este episodio se identifica una técnica instrumentada simple (Chevallard, 1999), relacionada con el análisis del comportamiento de la función longitud de la cerca, que involucró la noción de monotonía (Tabla 3).

Tabla 3.
Relación de las acciones mentales con las técnicas instrumentadas en el trabajo individual de Sebastián

Proceso de resolución	Acciones mentales	Técnicas instrumentadas simples
Exploración del problema	AM4	Construir un rectángulo de área fija y perímetro variable al arrastrar uno de los vértices de forma manual
Solución del problema	AM2 AM3 AM4	Analizar el comportamiento de una función (monotonía), a partir de los valores de la función, mediante la manipulación manual de un punto

Exploración del problema por Anahí

Para construir el terreno rectangular de área dada, Anahí utilizó la herramienta Deslizador de GeoGebra y creó uno que simbolizó por *R* con un valor inicial 0, valor final 500 e incrementos de una unidad. Creó un punto A al escribir en la barra de entrada de GeoGebra: (*R*, 0), un punto C al escribir (0, 45000/*R*), el punto D cuando escribió (*R*, 45000/*R*) y un punto B que ubicó en el origen del sistema de coordenadas. La primera acción mental (AM4) de Anahí se reconoce cuando construyó en GeoGebra los puntos A, B, C y D como vértices del rectángulo. Con estos puntos construyó el rectángulo ABCD con la herramienta Polígono de GeoGebra.

La ordenada del punto D se considera, como en el trabajo de Sebastián, un objeto multiplicativo, porque en su construcción Anahí relaciona la medida del área (45000 m^2) con la medida del lado AB (*R*). En este episodio se reconoce el primer paso de una técnica instrumentada, orientada al proceso de optimización de la función longitud de la cerca, cuando la estudiante representa en GeoGebra un terreno rectangular de área fija y perímetro variable, al manipular uno de sus vértices con un deslizador.

Proceso de resolución realizado por Anahí

Anahí realizó un proceso en dos etapas. En la primera trabajó en forma similar a Sebastián, en esta etapa se identificaron acciones mentales AM2, AM3 y AM4 al construir el terreno rectangular, la función longitud de la cerca, y el punto E de coordenadas (R, e), cuyo rastro describía la gráfica de esta función. La diferencia en el trabajo de ambos estudiantes, radica en los valores que tomaron las coordenadas de los vértices, así como los de la longitud del lado AB. Sebastián movió el punto B, al hacerlo, sus coordenadas varían de acuerdo con la configuración de GeoGebra (figura 2), mientras que Anahí al utilizar un deslizador con incrementos de una unidad, asignó valores naturales a la longitud del lado AB (figura 3).

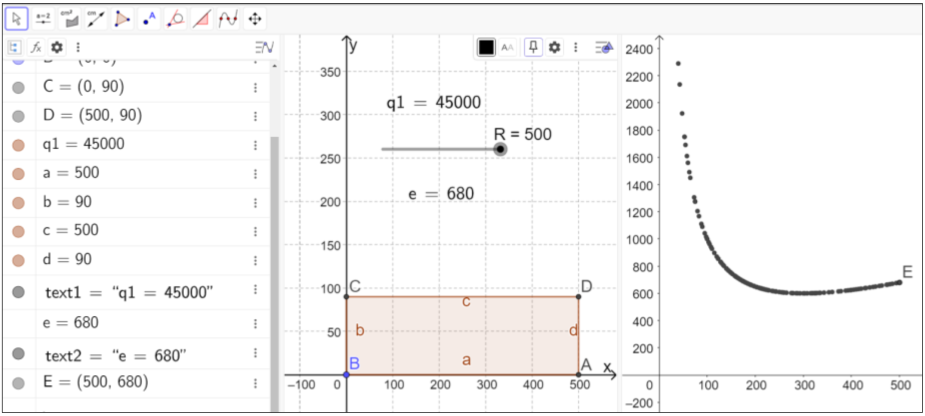

Figura 3. Primera etapa de la construcción en GeoGebra realizada por Anahí

En este episodio, al igual que en el trabajo de exploración de Anahí también se identifica una técnica instrumentada simple (Chevallard, 1999), relacionada con el análisis del comportamiento de la función longitud de la cerca, que involucró la noción de monotonía (Tabla 4).

Tabla 4.
Relación de las acciones mentales con las técnicas instrumentadas en el trabajo individual de Anahí en el primer proceso

Proceso de resolución	Acciones mentales	Técnicas instrumentadas simples
Exploración del problema	AM4	Construir un rectángulo de área fija y perímetro variable al movilizar uno de los vértices con un deslizador
Solución del problema	AM2 AM3 AM4	Analizar el comportamiento de una función (monotonía), a partir de los valores de la función, mediante la manipulación de un deslizador

El segundo proceso realizado por Anahí para determinar la longitud del lado AB que minimiza la longitud de la cerca, incluyó la noción de pendiente de recta tangente a la gráfica de una función. La cuarta acción mental (AM1): *realiza construcciones con GeoGebra para generar el entorno de trabajo sin hacer visible una coordinación entre los valores de la longitud del lado AB y la longitud de la cerca* se reconoce cuando Anahí determina la función longitud de la cerca, en términos de la longitud del lado AB que simboliza con la letra x. Al escribir en la barra de entrada: x+2(45000/x), se genera en la vista algebraica la función $f(x) = x + 90000/x$, y se muestra su representación gráfica en la vista gráfica 2 de GeoGebra. Previamente, Anahí había desactivado el rastro del punto E. Luego de trazar la gráfica de la función longitud de la cerca (f), Anahí utilizó la herramienta Tangentes de GeoGebra para trazar la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto E, y empleó la herramienta Pendiente para determinar la pendiente de dicha recta tangente.

La quinta acción mental (AM5): *coordina los cambios simultáneos entre los valores de dos variables continuas, longitud de la cerca y pendiente de la recta tangente*, es identificada en el trabajo de Anahí cuando manipuló el deslizador R (que está asociado con la longitud del lado AB) y relacionó el signo y valor de la pendiente de la recta tangente, que cambió de negativo a positivo, con los cambios en la longitud de la cerca, cuyos valores primero disminuían y luego aumentaban (la evidencia se presenta en la discusión en colaboración). Estas coordinaciones simultáneas entre los valores de ambas variables hicieron que Anahí relacionara el valor mínimo de la cerca con una recta tangente horizontal que ocurría en R = 300 (figura 4). Como Anahí construyó la función longitud de cerca en términos de x, que representa la longitud del lado AB y que manipula con el deslizador R, el valor R = 300 corresponde al valor x = 300.

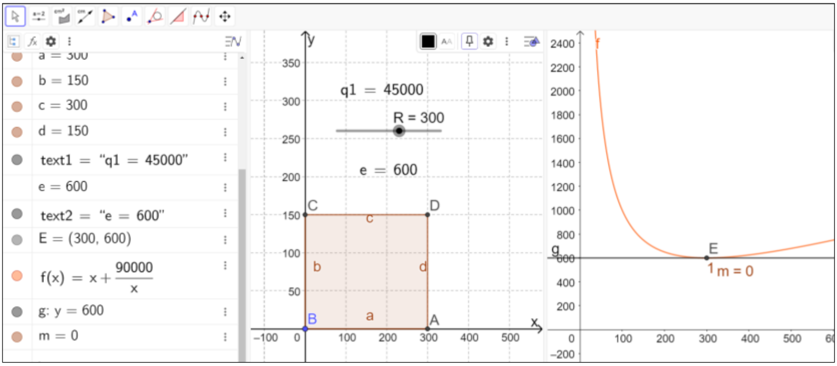

Figura 4. Segunda etapa de la construcción en GeoGebra realizada por Anahí

En este episodio se identifica una técnica instrumentada compleja (Chevallar, 1999) durante el proceso de optimización de la función longitud de la cerca seguido por la estudiante, que involucró aspectos relacionados con intervalos en los que la función es decreciente y creciente, para analizar la monotonía de una función (Tabla 5).

Tabla 5.
Relación de las acciones mentales con las técnicas instrumentadas en el trabajo individual de Anahí en el segundo proceso

Proceso de resolución	Acciones mentales	Técnicas instrumentadas compleja
Solución del problema	AM1 AM5	Optimizar una función a partir del criterio de la primera derivada relacionada con el concepto de monotonía, asociados con los valores de la pendiente de la recta tangente, mediante la manipulación de un deslizador

Proceso de resolución realizado por Sebastián y Anahí en colaboración

Se realizó una sesión de trabajo en grupo con dos propósitos: que cada estudiante presentara y explicara lo realizado para comparar, discutir, formalizar e identificar si surgía nuevo conocimiento, y para reconocer en sus explicaciones y justificaciones, comportamientos asociados con sus acciones mentales que ya habías sido identificados en su trabajo individual.

Se les preguntó cómo habían realizado la construcción del terreno:

> 01 *Investigador:* ¿Cómo empezaron la construcción?
> 02 *Anahí:* Yo hice un deslizador para mover A, B lo puse en el origen, C y D los hallé dividiendo 45000 entre R. Luego dibujé un polígono y me dio los lados, sumé $a + b + d$ para obtener la longitud.
> 03 *Sebastián:* Yo puse un punto B sobre el eje X, y construí los otros puntos con el punto B. El resto lo hice como Anahí.

Estas respuestas confirman lo descrito en su trabajo individual, para construir el terreno rectangular con GeoGebra. La entrevista continuó y se buscó indagar sobre las acciones que realizaron ambos estudiantes para determinar la mínima longitud de la cerca:

> 04 *Investigador:* ¿Encontraron la mínima longitud de la cerca?
> 05 *Anahí:* Creo que sí. La longitud de la cerca disminuye cuando el lado AB aumenta. Luego, la longitud de la cerca aumenta. Entonces, vemos que a medida que el lado AB aumenta hasta 300 metros, la longitud de la cerca disminuye, pero si el lado AB sigue aumentando, la longitud de la cerca aumenta.
> 06 *Sebastián:* No sabía si era 300, cuando movía el punto B no me daba un x entero, tenía decimales. Hice un punto con el x de B y con la longitud, para ver la gráfica, pero no está clara.

En esta respuesta, se observa que Anahí se fijó en los cambios numéricos de la longitud de la cerca al manipular el deslizador y no en la representación gráfica descrita por el punto E. En contraste, Sebastián analizó el rastro que dejaba dicho punto en la vista gráfica 2. Cabe señalar que GeoGebra asigna letras a los puntos en el sentido de las letras del abecedario, por ello coincidieron en los vértices del terreno y en el punto E que relaciona la longitud de la cerca y uno de los lados del terreno. Hasta ese momento, ambos estudiantes habían desarrollado la actividad de forma similar. Anahí continuó con el diálogo, y compartió nuevas ideas a Sebastián:

> 07 *Anahí:* ¿Por qué no graficas la función?
> 08 *Sebastián:* ¿Cómo?

> 09 *Anahí:* Si x es el ancho, entonces el largo es $45000/x$. La longitud de la cerca es $L = x + 90000/x$ [GeoGebra asignó el símbolo $f(x)$ a la longitud de la cerca]
> 10 *Sebastián:* ¿Y cómo sabes que ocurre en 300?
> 11 *Anahí:* Igualamos la recta tangente a 0. Mira, a medida que el lado AB va aumentando, la pendiente de la función L comienza a tener un valor positivo y la inclinación de la recta L pasa a ser creciente.

La plantilla de GeoGebra se diseñó con valores numéricos con un decimal, de modo que el valor mínimo de la cerca, así como el valor $m = 0$ de la pendiente de la recta tangente, ocurrían en $x = 300$ y en valores cercanos a este. Esto con la intención de que los estudiantes buscaran estrategias para validar que el mínimo valor de la longitud de la cerca ocurría exactamente en $x = 300$. Luego de la intervención de Anahí (línea 11), que aseguró que la pendiente de la recta tangente valía 0 en $x = 300$, Sebastián intervino:

> 12 *Sebastián:* Pero es 0 en otros puntos.
> 13 *Anahí:* Ya me hiciste dudar.
> 14 *Sebastián:* Seguro que son los decimales de la pendiente.

La primera acción mental (AM5): *extiende la idea de coordinación simultánea entre los valores de dos variables continuas longitud de la cerca y pendiente de la recta tangente, y una discreta, longitud del lado AB,* se identificó en el trabajo en conjunto cuando Anahí decidió modificar la configuración de la plantilla, y en opción de redondeo colocó trabajar con dos decimales para todos los valores. Luego aumentó la longitud del lado AB con el deslizador, y observó valores diferentes de la pendiente de la recta tangente que cambiaban simultáneamente con los valores de la longitud de la cerca. Nuevamente Anahí identificó que solo en el valor $R = 300$, la pendiente de la recta tangente era igual a 0.

> 15 *Anahí:* [Cambió el número de decimales a 2] Tenías razón, sí cambia.

Después del comentario de Anahí, Sebastián determinó con GeoGebra la función f, que representa la longitud de la cerca, luego obtuvo su derivada al escribir en la barra de entrada: f', utilizó la herramienta Raíces de GeoGebra para encontrar el punto de corte de la gráfica de f' con el eje X, es decir, el valor de x que hace que $f'(x)$ sea igual a 0. La segunda acción mental (AM6): *coordina los cambios simultáneos entre los valores de dos variables continuas como son la longitud del lado AB y la derivada de la función f evaluada en dicha longitud* identificada en el trabajo en conjunto, se reconoce cuando

Sebastián manipuló el punto B del rectángulo con la intención de observar simultáneamente los cambios en la función longitud de la cerca y la gráfica de la derivada de dicha función, esto generó un rastro de puntos sobre la gráfica de la función *f* (figura 5).

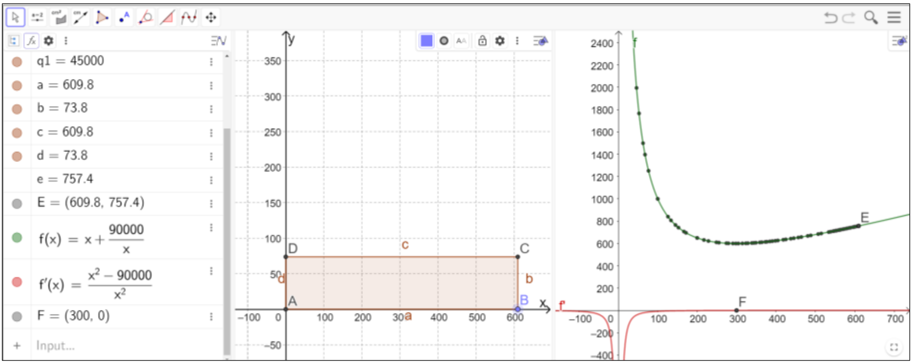

Figura 5. Función derivada realizada por Sebastián

Se infiere que Sebastián reconoce que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f*(*x*) en el punto E, es igual a la derivada de la función evaluada en la abscisa de dicho punto, porque estaba buscando el valor en que la derivada era cero. Esto a partir del diálogo entre el investigador y los estudiantes:

16 *Investigador:* Sebastián, ¿has hecho algo nuevo en GeoGebra?

17 *Sebastián:* Dibujé la función *f* y saqué su derivada. Hallé el corte con el eje X y me salió 300.

18 *Anahí:* ¿Por qué hiciste eso?

19 *Sebastián:* Para saber el valor exacto, este punto es donde la derivada es igual a 0.

Lo que hizo Sebastián resulta importante porque complementa lo hecho por Anahí, ella determinó el valor de *x* donde se minimiza la longitud de la cerca, sin embargo, si este valor no hubiera sido entero, difícilmente lo hubiera obtenido con un incremento de una unidad en el deslizador. Sebastián puso en juego su conocimiento de la derivada, para determinar el valor exacto donde la función toma su valor mínimo.

Las acciones mentales AM5 y AM6 se identifican cuando los estudiantes modificaron el número de cifras decimales en la plantilla, con la opción de redondeo, para validar su conjetura de la existencia de un único valor de *x* donde la función longitud de la cerca es mínima, y cuando Sebastián usó la derivada para determinar dicho valor. En este episodio se reconoce una técnica instrumentada compleja relacionada con el proceso de optimización de la función longitud de la cerca, al determinar el valor crítico de una función y verificar que corresponde a un mínimo (Tabla 6).

Tabla 6.
Proceso de resolución realizado en conjunto

Proceso de resolución	Acciones mentales	Técnicas instrumentadas complejas
Solución del problema	AM1 AM2 AM3 AM4 + AM5	Optimizar una función a partir del criterio de la primera derivada relacionada con el concepto de monotonía, asociada con los valores de la pendiente de la recta tangente, mediante la manipulación de un deslizador
	+ AM6	Optimizar una función a partir del criterio de la primera derivada para el cálculo de valores extremos de una función

Discusión

Con el fin de *documentar cómo distintas técnicas instrumentadas se relacionan con distintas acciones mentales durante el trabajo de estudiantes universitarios en una actividad de optimización mediada por GeoGebra*, se examinaron las interacciones de los estudiantes con GeoGebra, los documentos escritos que contenían respuestas y capturas de pantalla y las respuestas de los estudiantes en la entrevista semiestructurada realizadas al finalizar su trabajo.

Los resultados muestran que los estudiantes, ya sea de forma individual o en conjunto, fueron desarrollando un conjunto de pasos, que involucraban elementos relacionados con la optimización de funciones. La noción de monotonía de una función, su análisis a partir del valor de la pendiente de recta tangente, y la derivada para determinar extremos relativos, en todos ellos se reconocen procesos de covariación. Esta manera de introducir el tema de optimización privilegia la exploración de conceptos en el contexto de fenómenos de cambio, y no de una manera estática como lo señalan Mkhatshwa y Doerr (2018).

Los estudiantes al realizar sus construcciones generaron relaciones funcionales que permitieron observar los cambios simultáneos en los valores de diferentes cantidades. En algunos casos fueron construidas explícitamente por los estudiantes, como la relación entre los lados del terreno rectangular mediante el área fija del terreno, o la relación entre la longitud de la cerca y la longitud del lado AB mediante una expresión matemática; y, en otros, fueron construidas por los estudiantes con herramientas del software, como la relación entre la longitud del lado AB y el valor de la pendiente de la recta tangente. Esto parece evidenciar una comprensión madura de estas relaciones funcionales, lo cual resultaría favorable porque, según Thompson y Carlson (2017), estas relaciones les permitirían coordinar los cambios de una variable mientras imagina los cambios en la otra.

Esta coordinación de los cambios simultáneos entre diversas cantidades, como la longitud del lado AB, la longitud de la cerca y la pendiente de recta tangente, generados al manipular un vértice del terreno rectangular, fueron evidenciados a través de los comportamientos que exteriorizaron los estudiantes al manipular las herramientas de GeoGebra, asociados con sus acciones mentales. Las conjeturas realizadas por los estudiantes sobre la manera de hallar el valor mínimo de la recta y los elementos del Cálculo empleados para justificar dichas conjeturas, nos permite inferir que hubo una comprensión de la coordinación de los valores de las cantidades involucradas. Por ello coincidimos con Carlson et al. (2002) cuando manifiestan que el razonamiento covariacional es esencial para tratar temas de Cálculo porque posibilita el entendimiento de las relaciones funcionales involucradas al trabajar con fenómenos dinámicos; así como con Antonio et al. (2019), que puntualizan en la relevancia de comprender estos procesos de covariación por encima de la memorización de procesos algebraicos.

El análisis realizado también permitió identificar distintas técnicas instrumentadas, para las cuales los estudiantes emplearon diferentes herramientas de GeoGebra. La técnica instrumentada centrada en analizar la monotonía de la función, implicó la manipulación de herramientas de GeoGebra como: punto, deslizador, polígono y rastro de un punto, y acciones mentales que los llevaron a relacionar la longitud del lado AB y determinar la longitud de la cerca de forma asincrónica (AM2), referenciar el comportamiento de la longitud de la cerca en términos de aumentos y disminuciones (AM3), y crear objetos multiplicativos, como las coordenadas de los puntos que representan los vértices del terreno en la vista gráfica 1 y los creados en la vista gráfica 2 de GeoGebra, que hicieron visible la coordinación de los valores de estas variables (AM4).

La técnica instrumentada centrada en el criterio de la primera derivada para analizar la monotonía de una función, implicó la manipulación de herramientas de GeoGebra como: deslizador, punto, función, tangente y pendiente, y, la ejecución de una acción mental (AM1) para construir una expresión que modela la función longitud de la cerca, y otra acción mental (AM5) que llevó a Anahí a relacionar simultáneamente los cambios en los valores de dos variables continuas: longitud de la recta y pendiente de la recta tangente a la gráfica de la longitud de la recta.

La técnica instrumentada centrada en el criterio de la primera derivada para analizar valores extremos de una función, implicó la manipulación de herramientas de GeoGebra como: punto, función, rastro del punto y derivada, y, una acción mental (AM6) adicional, que llevó a Sebastián a relacionar simultáneamente los cambios en los valores de dos variables continuas: longitud del lado AB y derivada de la función *f* que representa a la longitud de la recta, evaluada en dicho valor.

Cabe señalar que las acciones mentales emergen de acuerdo con lo que requieren los estudiantes para obtener la construcción solicitada en la tarea, primero se identificó una AM4, y luego una AM2 o una AM3.

Diseñar la plantilla de GeoGebra de modo que los valores numéricos solo presenten un decimal, permitió que los estudiantes realizaran conjeturas sobre los valores de la pendiente de la recta tangente que parecían constantes, aun cuando se modificara la longitud del lado AB. Esto los llevó a explorar y modificar en la configuración de la plantilla el número de cifras decimales, con lo que se identifica un razonamiento complejo en términos de Kouropatov y Dreyfus (2014), al coordinar los valores de hasta tres variables diferentes. Se confirma también lo señalado por Martínez-Miraval y García-Rodríguez (2022) de que cuando los estudiantes modifican la configuración del ambiente de trabajo para justificar los resultados y conjeturas realizadas, se hacen visibles comportamientos que sustentan acciones mentales superiores.

La identificación de acciones mentales adaptadas del trabajo de Martínez-Miraval y García-Rodríguez (2022), y de distintas técnicas instrumentadas, permite afirmar que existe una relación que se relacionan entre ellas, que emerge durante el proceso de resolución de un problema de optimización en un sistema de geometría dinámica como GeoGebra.

Conclusiones

Se destaca la importancia de instrumentalizar a los estudiantes en el uso de sistemas de geometría dinámica, como GeoGebra, al abordar conceptos de Cálculo como funciones, límites, derivadas e integrales, mediante situaciones de cambio. Esto con el fin de identificar diversas técnicas instrumentadas de distinta complejidad, que están asociadas con un conjunto de nociones matemáticas, que son utilizadas en un contexto específico.

Cuando el estudiante realiza construcciones con GeoGebra en una plantilla vacía, es posible generar un modelo de su pensamiento en términos de las acciones mentales que evidencia. Plantear un problema que involucra fenómenos de cambio relacionados con la derivada, insta al estudiante a coordinar los cambios entre diversas cantidades, si el estudiante busca asociar diferentes objetos con herramientas como puntos o deslizadores, podrá observar que los valores de las cantidades involucradas en el problema cambian simultáneamente, fomentando con ello el desarrollo de habilidades de razonamiento covariacional.

Las técnicas instrumentadas se relacionan con las acciones mentales a partir del conocimiento matemático y el conocimiento tecnológico de los estudiantes, y dependen también de la tarea y contexto propuestos. Una tarea de optimización que genere el planteamiento de conjeturas y validaciones, o que demande de técnicas instrumentadas complejas para su resolución, implicará la activación de acciones mentales de orden superior.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Pontificia Universidad Católica del Perú, a la Universidad Antonio Ruiz de Montoya, y al Instituto Politécnico Nacional a través del proyecto de investigación 20220322, por el apoyo brindado para la realización del artículo.

Referencias

Antonio, R., Escudero, D. I. y Flores, E. (2019). Una introducción al concepto de derivada en estudiantes de bachillerato a través del análisis de situaciones de variación. *Educación Matemática*, *31*(1), 258-280. https://doi.org/10.24844/em3101.10

Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*(3), 245-274. https://doi.org/10.1023/A:1022103903080

Avgerinos, E. & Remoundou, D. (2021). The Language of "Rate of Change" in Mathematics. *Eur. J. Investig. Health Psychol. Educ.*, *11*(4) 1599–1609. https://doi.org/10.3390/ejihpe11040113

Bataineh, H., Zoubi, A. y Khataybeh, A. (2019). Utilizing MATHEMATICA software to improve students' problem solving skills of derivative and its applications. *International Journal of Education and Research*, *7*(11), 57-70.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S. y Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(5), 352-378. https://doi.org/10.2307/4149958

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Denzin, N. K. y Lincoln, Y. S. (2011). *The SAGE handbook of qualitative research*. Sage Publications.

Galindo-Illanes, M., Breda, A., Chamorro-Manríquez, D., & Alvarado-Martínez, H. (2022). Analysis of a teaching learning process of the derivative with the use of ICT oriented to engineering students in Chile. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *18*(7), em2130. https://doi.org/10.29333/ejmste/12162

Johnson, H. y McClintock, E. (2018). A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(3), 299-316. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9799-7

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM Mathematics Education*, *46*(4), 533–548. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5

LaRue, R. y Infante, N. E. (2015). Optimization in first semester calculus: A look at a classic problem. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46(*7), 1021-1031. https://doi.org/10.1080/0020739X.2015.1067844

Martínez-Miraval, M. A., y García-Rodríguez, M. L. (2022). Razonamiento Covariacional de Estudiantes Universitarios en un Acercamiento al Concepto de Integral Definida mediante Sumas de Riemann. *Formación Universitaria*, *15*(4), 105-118. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000400105

Medrano, I. & Pino-Fan, L.R. (2016). Estadios de comprensión de la noción matemática de límite finito desde el punto de vista histórico. REDIMAT, 5(1), 287-323. https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1854

Mkhatshwa, T. y Doerr, H. (2018). Undergraduate students' quantitative reasoning in economic contexts. *Mathematical Thinking and Learning*, *20*(2), 142-161. https://doi.org/10.1080/10986065.2018.1442642

Orts, A., Boigues, F. J., y Llinares, S. (2018). Génesis Instrumental del Concepto de Recta Tangente. *Acta Scientiae*, *20*(2), 72-83. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v20iss2id3833

Roorda, G., Vos, P., Drijvers, P., y Goedhart, M. (2016). Solving Rate of Change Tasks with a Graphing Calculator: a Case Study on Instrumental Genesis. *Digit Exp Math Educ* 2**,** 228–252. https://doi.org/10.1007/s40751-016-0022-8

Rojas-Escribano, L., Báez-Rojas, J. J. y Corona-Galindo, M. G. (2017). Propuesta didáctica para la enseñanza del tema de optimización, apoyado con Excel y Geogebra, para estudiantes de bachillerato. *El cálculo y su enseñanza. Enseñanza de las Ciencias y la Matemática*, *9*(1), 52-63.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(2), 267-296

Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421–456). National Council of Teachers of Mathematics.

Villa-Ochoa, J., González-Gómez, D., y Carmona-Mesa, J. (2018). Modelación y Tecnología en el Estudio de la Tasa de Variación Instantánea de Matemáticas. *Formación Universitaria*, *11*(2), 25-34. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062018000200025

Mihály A. Martínez-Miraval es Docente Tiempo Completo del Departamento Académico de Ciencias de la Sección Matemáticas en la Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú.

Daysi J. García-Cuéllar es Docente del Departamento de Ingeniería, Gestión y Matemática en la Universidad Antonio Ruiz de Montoya, Perú.

Martha L. García-Rodríguez es Profesora Investigadora en el Instituto Politécnico Nacional, México.

Dirección de contacto: La correspondencia directa sobre este artículo debe enviarse al autor. **Dirección Postal:** Av. Universitaria 1801, San Miguel 15088, Lima – Perú. **Email:** martinez.ma@pucp.edu.pe , daysi.garcia@uarm.pe , mlgarcia@ipn.mx