COMPETENCIA DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA PARA IDENTIFICAR PRÁCTICAS, OBJETOS Y PROCESOS EN LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DEL DIFERENCIAL

Competence of the prospective mathematics teacher to identify practices, objects, and processes in solving a differential problem

Giacomone, B. [a] y Verón, M. A. [b]

[a]Universidad de la República de San Marino, [b]Universidad Nacional de Misiones

Resumen

En este trabajo se describe y analiza el diseño e implementación de una acción formativa en curso dirigida a futuros profesores de matemáticas de educación secundaria. El objetivo didáctico es iniciar a los participantes en el desarrollo de una competencia específica que les permita identificar y discriminar las prácticas, objetos y procesos matemáticos que intervienen y emergen en la resolución de situaciones-problemas en torno al estudio del diferencial. El análisis a priori de las tareas y el análisis de las respuestas se apoya en el uso de herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico. Los resultados y las reflexiones aportadas nos permiten considerar que este tipo de actividades son un reto para los profesores en formación, resultando conflictivo la identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados, ya que usualmente supone un cierto nivel de actividad metacognitiva a la que no están habituados.

Palabras clave: *formación de profesores, diseño didáctico, competencias didácticas, diferencial*

Abstract

This research describes and analyses the design and implementation of an ongoing training action aimed at prospective secondary school mathematics teachers. The didactic objective is to initiate the participants in the development of a specific competence that allows them to identify and discriminate the mathematical practices, objects, and processes that intervene and emerge in the resolution of problem-situations around the study of the differential. The a priori analysis of the tasks and the analysis of the answers are supported by the use of theoretical and methodological tools of the Onto-semiotic Approach. The results and reflections provided allow us to consider that this type of activity is a challenge for teachers in training, the identification and discrimination of the types of objects and meanings being conflictive, since it usually supposes a certain level of metacognitive activity to which they are not used to.

Keywords: *teacher education, didactic design, specific didactic competencies, differential*

INTRODUCCIÓN

De acuerdo con la literatura, el diseño de tareas, el análisis a priori detallado de las posibles soluciones y el análisis de la actividad matemática manifestada por los estudiantes, son considerados competencias didácticas específicas del profesor de matemáticas. Esto implica que el futuro profesor de matemáticas tenga la oportunidad de abordar, desde su formación, acciones formativas que le permitan avanzar hacia el conocimiento y uso competente de herramientas específicas, eficaces para: diseñar y comprender la complejidad matemática de las situaciones-problemas que proponen a sus estudiantes, comprender y gestionar los conflictos de aprendizaje, gestionar la institucionalización de los conocimientos y evaluar todo el proceso de enseñanza y aprendizaje impartido.

Giacomone, B. y Verón, M. A. (2023). Competencia de futuros profesores de matemática para identificar prácticas, objetos y procesos matemáticos. En C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo, E. y P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 267–274). SEIEM.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino et al., 2007; 2020), se propone el modelo CCDM (Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos), desarrollado por Godino et al., (2017), en el cual los conocimientos y competencias mencionados forman una parte esencial de la competencia general de análisis e intervención didáctica y conocimientos didácticos.

En este trabajo se presenta el tipo de análisis que estamos experimentando con futuros profesores de matemática centrado en el desarrollo de la competencia para identificar y describir las prácticas, objetos y procesos matemáticos implicados en tareas matemáticas escolares. Se utiliza como contexto matemático situaciones-problemas donde interviene el concepto diferencial.

MARCO TEÓRICO, PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y ANTECEDENTES

Dada la complejidad de la enseñanza del diferencial (López-Gay et al., 2015) resulta fundamental incluir en la formación de profesores de matemáticas iniciativas formativas que permitan el desarrollo de competencias específicas para afrontar los complejos desafíos didácticos asociados a este concepto (Verón y Giacomone, 2021). Así, en este trabajo abordamos el desarrollo de competencias del profesor de matemáticas desde la perspectiva del EOS usando como contexto matemático los procesos de instrucción del diferencial.

Si bien se han desarrollado varios modelos parciales de los significados del diferencial para interpretar y explicar las dificultades asociadas a los procesos instruccionales (p.e. Ely, 2021; Hu y Rebello, 2013; Pulido, 2010), resulta necesario tener en cuenta el universo de significados y los conocimientos didáctico-matemáticos para diseñar propuestas idóneas. En esta dirección, Verón y Giacomone (2021) han caracterizado cuatro significados parciales del diferencial: la *Diferencial de Leibniz*, diferencial como una cantidad infinitesimal o infinitamente pequeña; la *Diferencial de Cuachy*, se define al diferencial mediante la ecuación $dy = y'dx$ que lo relaciona con la derivada; la *Diferencial de Fréchet*, conectado a situaciones de estimación lineal y/o linealización; la *Diferencial de Robinson*, se conecta con los infinitesimales en el campo del análisis no estándar. Estos significados parciales constituyen un punto de partida para el diseño de actividades formativas.

Modelo de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor

En Godino et al. (2017), se plantea el modelo de *Competencias y Conocimientos Didáctico-Matemáticos* del profesor de matemáticas a partir de la organización de las dimensiones, componentes e indicadores que caracterizan el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, considerando los aportes teóricos de diversos modelos.

A partir de las concepciones del EOS, se desglosa la competencia general de diseño e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas, en cinco sub-competencias: competencia de análisis significados globales; competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas; competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas; competencia de análisis normativo; competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica. Esta distinción es posible gracias al desarrollo de determinadas herramientas teórico metodológicas que han evolucionado al interno de dicho enfoque.

En este trabajo focalizamos la atención en la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas. La noción de configuración ontosemiótica responde a la necesidad de identificar, por parte del profesor, los objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas. Es decir, el conocimiento didáctico-matemático sobre el propio concepto (la diferencial) en la cual se tiene en cuenta el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial (Giacomone et al., 2018).

En la realización de las prácticas matemáticas intervienen y emergen objetos de diversos tipos, de acuerdo a la función que desempeñan en dichas prácticas (elementos lingüísticos, situaciones-problemas o tareas, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos). Y también, intervienen y emergen procesos matemáticos (particularización, generalización, representación, …) (Godino et al., 2007). El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de instrucción (Godino et al., 2011).

METODOLOGÍA

El ciclo formativo se implementó durante el año 2022, durante 5 sesiones de dos horas y media cada una, en el ámbito del curso Seminario de Didáctica de la Matemática. Participaron 12 futuros profesores, que estaban cursando el cuarto año de la carrera de Profesorado de Educación Secundaria en Matemática de un instituto superior de formación docente de Argentina. Si bien la mayoría de los futuros profesores de matemática nunca habían utilizado las herramientas del EOS para el análisis de la actividad matemática, tenían conocimientos teóricos previos sobre las nociones básicas del enfoque que caracterizan a una configuración ontosemiótica.

Contexto de la investigación, participantes y recogida de datos

La acción formativa comprende seis etapas. En la primera etapa 'Exploración inicial de los significados personales', los estudiantes resolvieron una primera tarea matemática, Tarea 1, sobre un problema del cálculo de la masa total de una lámina circular, adaptado de Salinas et al. (2012). Luego de la socialización y discusión de las resoluciones empleadas por los estudiantes, se avanzó con la segunda etapa de implementación 'Introducción al análisis epistémico' utilizando la Tarea 2 (Figura 1). Esta tarea tiene el objetivo de introducir un posible método para la identificación y reconocimiento de los distintos objetos matemáticos, como la situación problema, lenguajes, conceptos-definición, proposiciones, procedimientos y argumentos, que caracterizan a las configuraciones epistémicas.

Con la tercera etapa de implementación 'Introducción al análisis cognitivo' se involucra a los participantes a realizar un primer análisis cognitivo, basado en la identificación de los objetos matemáticos, de las prácticas matemáticas personales que realiza un estudiante hipotético cuando resuelve un problema (Tarea 3).

La cuarta etapa 'Puesta en práctica de la técnica de análisis ontosemiótico' avanza hacia la consolidación en el uso de herramientas de análisis. Se proponen dos tareas, 4 y 5, en las cuales se plantearon sobre las siguientes consignas: (1) Resuelve la tarea matemática; (2) Identifica las distintas prácticas matemáticas que se deben realizar; (3) Identifica los conocimientos que se ponen en juego (objetos y procesos matemáticos referidos en las prácticas). Para la Tarea 4 se utiliza como contexto un problema de aceleración basado en el cálculo de la distancia total recorrida de un auto. En cambio, en la Tarea 5 se propone realizar un análisis ontosemiótico sobre una lección de un libro de texto de cálculo de Stewart (2012).

Si bien cada etapa tiene un momento de intercambio de ideas, discusión grupal, puesta en común por parte del docente y discusión de resultados parciales al interno del grupo de investigación, en la quinta etapa del ciclo formativo se crea un espacio didáctico específico para ilustrar los avances que han logrado los estudiantes, para discutir sobre la importancia del conocimiento didácticos-matemáticos de los distintos significados de la diferencial para el diseño de tareas, y reflexionar sobre la importancia de las tareas realizadas en la futura práctica profesional.

Cada una de las tareas implementadas se analizaron a priori con el objetivo de gestionar la clase, la puesta en común y los potenciales conflictos de aprendizaje. Al final de toda la implementación, se realizó un análisis retrospectivo de todo el ciclo formativo con el objetivo de identificar puntos de mejora y tomar decisiones para futuras implementaciones.

Por limitaciones de espacio, presentamos el análisis a priori e implementación de la Tarea 2.

Figura 1. Consigna de la Tarea 2. Fuente: Adaptado de Giacomone (2018).

A partir de la resolución del problema (Tarea 1), responde las siguientes preguntas:
1) ¿Qué es para ti un concepto matemático? Identifica los conceptos matemáticos que intervienen en la resolución de la tarea.
2) ¿Qué lenguajes se utiliza en la resolución de la tarea? (Lenguaje: natural, geométrico, simbólico, algebraico, etc.) Menciona algunos ejemplos.
3) ¿Qué es para ti una proposición matemática? Identifica las proposiciones matemáticas en la resolución de la tarea.
4) ¿Qué es para ti un procedimiento matemático? Describe los procedimientos matemáticos utilizados en la resolución de la tarea.
5) ¿Qué argumentos/explicaciones validan las proposiciones y procedimientos utilizados? Menciona algunos ejemplos.
6) ¿Qué conceptualizaciones se pueden identificar en la resolución de la tarea?

ANÁLISIS A PRIORI DE LA TAREA 2

A continuación, se presenta una síntesis del análisis ontosemiótico que se pretende que los estudiantes desarrollen. Este análisis se ha utilizado como recurso para la socialización y discusión.

Las preguntas de la Tarea 2 tienen la intención de discutir sobre las concepciones e interpretaciones que realizan los futuros profesores de matemática sobre los objetos matemáticos que caracterizan y describen los significados de un concepto. Las preguntas generan un planteo del tipo ontológico donde se estudia la naturaleza y funciones de los objetos matemáticos (Godino et al., 2020).

Pregunta 1. Un concepto puede estudiarse desde una perspectiva unitaria, donde se asocia a cada concepto con su definición; pero también, desde una perspectiva sistémica, bajo la cual, un concepto se describe y caracteriza por un conjunto de elementos, denominados objetos matemáticos que se diferencian según su naturaleza y función. Entonces un concepto no se reduce a una definición, sino que se caracteriza por un sistema de prácticas matemáticas, objetos matemáticos y los procesos que intervienen y emergen de las prácticas (Burgos y Godino, 2020).

Algunos conceptos-definición (objeto matemático primario) que se esperan que los futuros profesores identifiquen son:

Conceptos geométricos: círculo, radio, punto, centro, distancia, superficie, área, anillos o coronas circulares concéntricos, ancho de un anillo.

Conceptos físicos: densidad, masa, masa total, densidad superficial, unidades de longitud (metros), unidad de masa (Kg/m^2).

Conceptos aritméticos: valores, diferencia de valores, producto, cantidad, suma.

Conceptos algebraicos-funcionales: función, variación, relación de dependencia entre la densidad y el radio, constante.

Conceptos relacionados al cálculo: infinito, infinitesimal, diferencial, diferencial radio, diferencial área, diferencial masa, integral definida, función integrando, extremos de integración, cambio total, acumulación.

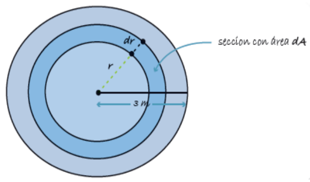
Pregunta 2. En la resolución de la tarea se observa el uso de una diversidad de tipos de lenguajes:

Lenguaje natural: infinitos, muy pequeño, infinitesimal, porción infinitesimal, diferencia, diferencial, diferencial área y área infinitesimal.

Lenguaje algebraico-simbólico: $r, dr, Ar + dr, dA = 2\pi rdr, dM, \sigma r, dMn, \ldots$

Lenguaje geométrico: Figura 2

Figura 2. Lenguaje geométrico. Fuente: Salinas et al. (2012, p. 144)



Pregunta 3. Algunas proposiciones (Pp) que surgen de la resolución del problema de cálculo de la masa son:

Pp1: la masa se distribuye de tal manera que la densidad en todo punto es $\sigma(r) = 10 - r^2 (kg/m^2)$

Pp2: la densidad de masa dependiendo de radio

Pp3: r puede tomar cualquier valor entre 0 y 3

Pp4: se forman infinitos anillos concéntricos de radio muy pequeño

Pp5: dr representa una cantidad infinitesimal de radio

Pp6: dA representa un área infinitesimal de radio infinitesimal

Pp7: densidad constante en cada anillo infinitesimal

Pp8: dM representa una porción infinitesimal de masa

Pp9: $49{,}5\pi\ kg$ representa el cambio total acumulado de la masa

Pregunta 4. En la resolución de la tarea, se pueden aplicar los siguientes procedimientos (Pc):

Pc1: tomar distancias de r cada vez más pequeñas.

Pc12: $dr = r_2 - r_1$, dr se calcula haciendo la diferencia entre dos valores muy próximos entre sí.

Pc3: $dA = A(r + dr) - A(r)$, dA se calcula haciendo la diferencia de áreas $dA = 2\pi rdr$

Pc4: $dM = \sigma(r)dA$

Pc5: $M_{total} = dM_1 + \cdots dM_n$, con n tendiendo al infinito.

Pc1: $M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$

Pregunta 5. Los argumentos (A) son enunciados y/o razonamientos utilizados que cumplen la función de justificar, validar o explicar las proposiciones y procedimientos, estos pueden ser:

A1: definición del diferencial como una cantidad infinitesimal

A2: uso del término infinitesimal para referirse a una cantidad muy pequeña

A3: cálculo de área un círculo y corona circular

A4: definición de masa

A5: proceso de acumulación, suma

A6: definición y propiedades de la integral definida.

A7: interpretación de la integral definida como cambio total

Pregunta 6. En la resolución de la Tarea 1 emergen los siguientes procesos con la intención de conceptualizar a la diferencial:

Conceptualización/definición: en las prácticas matemáticas se establece que dr representa una cantidad infinitesimal de radio; dA representa una cantidad infinitesimal de área; dM representa una porción infinitesimal de masa. Además, se plantea que la masa total será igual al cambio total acumulado, es decir $M_{total} = \int_{r=0}^{r=3} dM$

Algoritmización: se establece la diferencia entre valores muy próximos entre sí de la misma magnitud para el cálculo de la diferencial radio y diferencial área: $dr = r_2 - r_1$ y $dA = A(r + dr) - A(r)$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

El análisis de las respuestas elaboradas por los estudiantes en formación ha permito establecer conclusiones sobre los logros alcanzados. En relación a la primera pregunta, se pueden observar respuestas vinculadas a una visión sobre las matemáticas como un *producto terminado* (Figura 3), generando un conflicto con la perspectiva antropológica y pragmatista de la actividad matemática que postula el EOS (Giacomone et al., 2016). Otros estudiantes, en cambio, responden desde perspectiva personal (Figura 4).

Figura 3. Respuesta del estudiante 4 (E4)

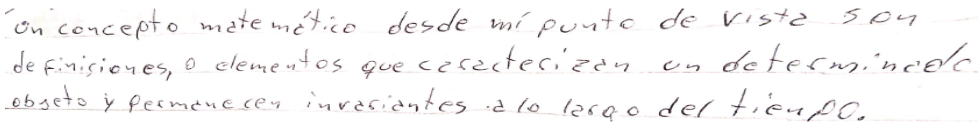
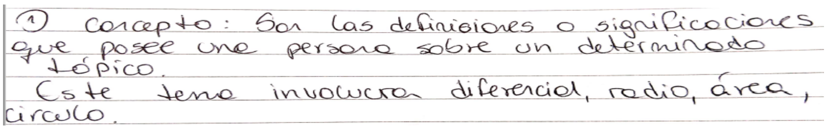
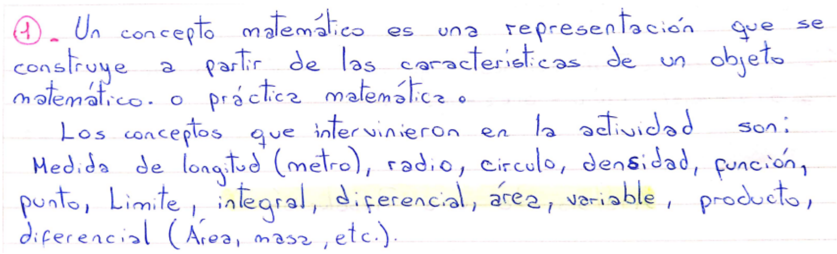

Un concepto matemático desde mi punto de vista son definiciones, o elementos que caracterizan un determinado objeto y permanecen invariantes a lo largo del tiempo.

Figura 4. Respuesta del E2


① Concepto: Son las definiciones o significaciones que posee una persona sobre un determinado tópico.
Este tema involucra diferencial, radio, área, círculo.

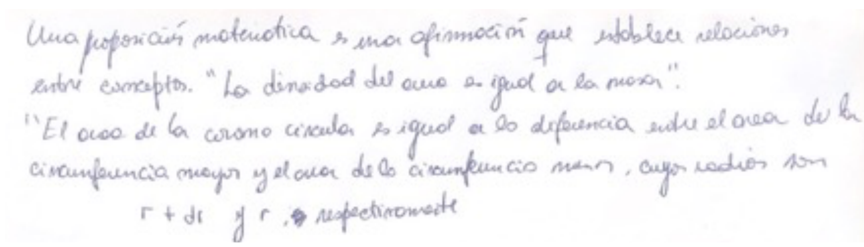
Resulta interesante notar el esfuerzo que hacen otros estudiantes para caracterizar los conceptos matemáticos desde la perspectiva sistémica que plantea el EOS, por ejemplo, E8 (Figura 5). En general, la mayoría de las estudiantes pudo reconocer correctamente los conceptos-definiciones:

Figura 5. Respuesta del E8


① - Un concepto matemático es una representación que se construye a partir de las características de un objeto matemático. o práctica matemática.
Los conceptos que intervinieron en la actividad son: Medida de longitud (metro), radio, circulo, densidad, función, punto, Limite, integral, diferencial, área, variable, producto, diferencial (Área, masa, etc.).

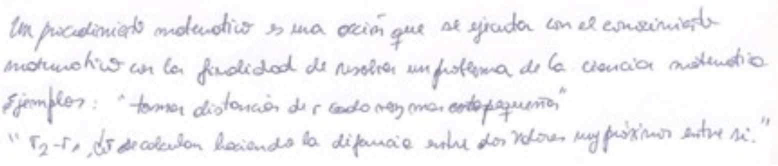
Los 12 estudiantes identificaron en forma idónea los diferentes tipos de lenguajes (natural, geométrico, algebraico y simbólico) implicados en la resolución. Respecto a las proposiciones matemáticas, la mayoría menciona que una proposición es una afirmación, una idea, un enunciado, una frase que se realiza sobre un concepto matemático y que puede ser verdadero o falso (Figura 6). Sin embargo, tienen dificultades en la identificación, de su propia solución, de algunas proposiciones.

Figura 6. Respuesta pregunta 3 del E10


Una proposición matemática es una afirmación que establece relaciones entre conceptos. "La densidad del aro es igual a la masa".
"El área de la corona circular es igual a la diferencia entre el área de la circunferencia mayor y el área de la circunferencia menor, cuyos radios son r + dr y r respectivamente"

En relación a la pregunta 4, la mayoría de los estudiantes responde que los procedimientos son los pasos o acciones que se realiza para resolver un problema. Un estudiante (E10) agrega que en los procedimientos se utiliza el conocimiento matemático para resolver la tarea (Figura 7).

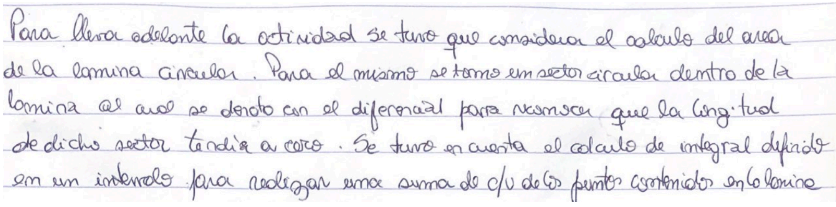
Figura 7. Respuesta pregunta 4 del E10


Un procedimiento matemático es una acción que se ejecuta con el conocimiento matemático con la finalidad de resolver un problema de la creación matemática
Ejemplos: "tomar distancias de r cada vez mas pequeños"
" $r_2 - r_1$, dr se calculan haciendo la diferencia entre dos valores muy próximos entre sí."

Respecto a la pregunta 5, la mayoría de los estudiantes logra identificar los argumentos. Las dificultades detectadas refieren a que algunos confunden las explicaciones que validan las proposiciones y procedimientos con las descripciones de los pasos realizados.

Por último, se aprecia que la mayoría de los estudiantes no logró comprender la pregunta 6 ya que cuatro no respondieron, cuatro dieron una respuesta incompleta porque mencionan al diferencial en forma general y no particularizan sobre qué tipo de diferencial. Por otro lado, otras dos respuestas evidencian un cierto nivel de conceptualización de la diferencial (ver Figura 8), aunque confunden la noción de argumento con la descripción de las prácticas (Burgos et al., 2019).

Figura 8. Respuesta pregunta 6 del E2


Para llevar adelante la actividad se tuvo que considerar el calculo del area de la lamina circular. Para el mismo se tomo un sector circular dentro de la lamina el cual se denoto con el diferencial para reconocer que la longitud de dicho sector tendia a cero. Se tuvo en cuenta el calculo de integral definido en un intervalo para realizar una suma de c/u de los puntos contenidos en la lamina

También la estudiante E10 (Figura 7) logra reconocer y conceptualizar el proceso de algoritmización que permite calcular el diferencial radio dr.

Los resultados reflejan imprecisiones en la caracterización y descripción de los significados parciales del diferencial. No obstante, los conocimientos previos de los participantes sobre el EOS posibilitaron momentos de discusiones más ricos respecto a resultados reportados en investigaciones previas.

CONCLUSIONES

En esta investigación se ha puesto énfasis en el diseño e implementación de una tarea formativa para desarrollar conocimientos y competencias para el análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemática sobre una situación problema del diferencial. Los resultados nos permiten plantear que este tipo de actividades formativas constituyen un desafío para la formación de profesores de matemática, resultando conflictivo el reconocimiento y la discriminación de los tipos de objetos y significados implicados en la resolución de una tarea matemática.

Si bien aquí se presentan resultados parciales del diseño formativo, la discusión final de la quinta etapa llevó a focalizarse en la potencialidad del análisis ontosemiótico para la comprensión de la actividad matemática. Esto incluye: comprender los grados de complejidad en las tareas que diseñan los profesores y el nivel de competencia matemática manifestado por los estudiantes; para identificar y resolver potenciales conflictos semióticos; reconocer las relaciones entre los objetos matemáticos que caracterizan a los significados parciales de la diferencial; y comprender las posibilidades y limitaciones que se pueden encontrar en los libros de textos educativos.

RECONOCIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco de los proyectos PFID-FID-2021-45 (Panamá), PID2021-122326OB-I00 (España), 16/Q1706-PI, 16/Q1746-TI (FCEQyN – UNaM, Argentina) y PRIU (Rep. San Marino).

Referencias

Burgos, M. y D. Godino, J. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *Avances De Investigación En Educación Matemática,* (18), 1-20. https://doi.org/10.35763/aiem.v0i18.255

Burgos, M., Giacomone, B., Godino, J. D., y Neto, T. (2019). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas mediante tareas de proporcionalidad. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 241-261). Ediciones Universidad Salamanca.

Ely, R. (2021). Teaching calculus with infinitesimals and differentials. *ZDM Mathematics Education, 53*, 591-604. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01194-2

Giacomone, B. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico* [Tesis Doctoral]. Universidad de Granada.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., y Blanco, T. F. (2016). Reconocimiento de prácticas, objetos y procesos en la resolución de tareas matemáticas: una competencia del profesor de matemáticas. En A. Berciano, C. Fernández, T. Fernández, J. González, P. Hernández, A. Jiménez, J. A. Macías, F. Ruiz, y M. T. Sánchez, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 257-265). SEIEM.

Giacomone, B., Godino, J. D., Wilhelmi, M. R., y Blanco, T.F. (2018). Desarrollo de la competencia de análisis ontosemiótico de futuros profesores de matemáticas. *Revista Complutense de Educación, 24*(1), 35-52. https://doi.org/10.5209/RCED.54880

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(37), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*, 111-132.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, Mathematics Education, 39*, 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3-15.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R., y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 247-265

Hu, D. y Rebello, N. S. (2013). Understanding student use of differentials in physics integration problems. *Physical Review Special Topics - Physics Education Research, 9*(2), 1-14. https://doi.org/10.1103/PhysRevSTPER.9.020108

López-Gay, R., Sáez, J. M., y Torregrosa, J. M. (2015). Obstacles to mathematization in physics: The case of the differential. *Science & Education, 24*(5-6), 591-613. https://doi.org/10.1007/s11191-015-9757-7

Pulido, R. (2010). La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. *Relime: Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-I), 85-97.

Salinas, P., Alanis, J. A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J. C., y Garza, J. L. (2012). *Cálculo aplicado: Competencias matemáticas a través de contextos Tomo 2*. Cengage Learning Editores SA de CV.

Stewart, J. (2012). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas* (7ma. Ed.). Cengage Learning Editores.

Verón, M. A. y Giacomone, B. (2021). Análise dos significados do conceito de diferencial de uma perspectiva ontosemiótica. *Revemop, 3*, e202109. https://doi.org/10.33532/revemop.e202109