O Conhecimento Matemático

José Carlos Pinto Leivas

1. Introdução

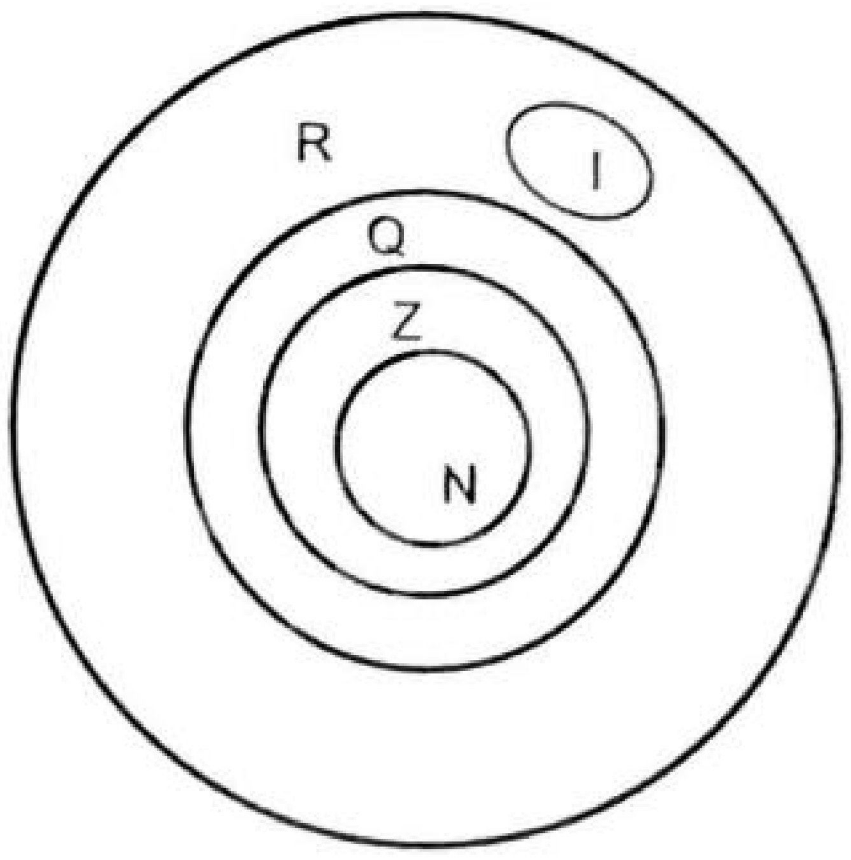
Muito se tem discutido, nestes tempos de reformulações e diretrizes curriculares para os cursos de Matemática – Licenciatura e Bacharelado, sobre os conteúdos matemáticos a serem desenvolvidos. Nesta mini-conferencia pretende-se dar um posicionamento sobre alguns conhecimentos matemáticos que se julga necessário ter o futuro professor que atuará no Ensino Fundamental e Médio.

Sabe-se que, muitas vezes, o matemático puro tem uma preocupação de estudar a Matemática pela Matemática enquanto que o matemático aplicado se envolve na resolução de um determinado problema. Cabe aos professores, formadores de professores, saberem que tipo de Matemática deve-se desenvolver nos cursos de licenciatura.

A história mostra que a maioria das teorias matemáticas foi descoberta ou criada para resolver determinados problemas como foi o caso das geometrias não euclidianas, de forma bastante explícita.

Há hoje uma preocupação muito grande dos alunos de graduação com a Matemática do Ensino Fundamental e Médio, mas não com uma abordagem diferenciada, envolvendo conteúdos e metodologias e sim de uma forma simplista, sem aprofundamentos e sem maiores embasamentos ou referenciais teóricos. Os futuros professores, bastante imediatistas, querem saber sobre geometria plana e espacial, sobre determinantes, matrizes, trigonometria e outros temas da forma e na intensidade de como vão trabalhar com os alunos naqueles níveis. Não há uma preocupação maior com o redescobrimento matemático e com o fazer matemático. Os estudantes não querem mais aprofundar o Cálculo; não gostam de estudar Análise, Topologia ou Geometria. Não há uma vontade explicita de curtir o estudo matemático. Entende-se que a causa principal desta falta de querer está na continuidade, que encontram nas universidades, do que vinham tendo no Ensino Fundamental e Médio, onde a Matemática era vista como algo destinado a uns poucos privilegiados e sem significado para a grande maioria. A Universidade, embora tendo um corpo docente cada vez mais qualificado, parece não ter o profissional envolvido com a formação do professor. Neste sentido, a Matemática desenvolvida nos cursos de formação de professores continua não apresentando significado e não despertando ou motivando o indivíduo para aprofundar seus conhecimentos.

De que vale o futuro professor estudar álgebra se ele nem sequer consegue proporcionar ou justificar a seus alunos a simples regra de sinais nas operações com os números inteiros? De que vale ter um curso de Análise se o futuro professor vai continuar trabalhando radicais e racionalizações no final do Ensino Fundamental como era feito no século passado, sem nem despertar nos alunos o desejo de conhecer a continuidade da reta ou a não enumerabilidade do conjunto dos reais em contra-partida com a enumerabilidade do conjunto dos racionais? Um grande número de professores continua acreditando que existe um número muito pequeno de números irracionais e que a maioria dos números reais é racional. Poucos são os que conseguem representar corretamente números sobre uma reta. Quando se depara a discutir questões como a de diagramas envolvendo os conjuntos numéricos, por exemplo, constata-se que muitos não conseguem ainda interpretar um diagrama e continuam seguindo livros didáticos com representações erradas e notações não comuns na literatura usual, por exemplo, representam o conjunto dos números irracionais por $\mathbf{I}$, de irracionais, como se $\mathbf{Z}$ fosse de "zinteiros". **Ainda mais, coloca num diagrama a seguinte forma completamente equivocada**:



Exemplos deste tipo que se encontra na literatura matemática e que são seguidos por professores, sem contestação fazem refletir sobre o perfil dos profissionais que estão sendo formandos.

2. O Educador Matemático com uma fundamentação dos conteúdos matemáticos.

Uma questão que cabe também colocar neste momento é a do distanciamento com que nós matemáticos sempre estivemos da área da educação. Muito embora se estudasse a teoria da psicologia cognitiva, em especial, Piaget e Skiner, a didática e a estrutura e funcionamento da escola brasileira, a atenção era sempre para o desenvolvimento do conteúdo pelo conteúdo. Não se concebia e ainda não se concebe perder muito tempo com este papo todo sobre educação.

Quanto a essas teorias, embora se estudasse um pouco de cada uma na graduação e fosse chamada a atenção que para a Matemática a que mais se adaptava era a de Piaget, o que se vê em realidade até os dias de hoje é a teoria do condicionamento de Skiner, a saber, a do condicionamento. Isto continua a ser colocado em prática, pois o que se vê na bibliografia e em grande parte de professores e estudantes é a pura reprodução da repetição nos exercícios de fixação da matemática do chavão "siga o modelo". Exemplificando, o professor ao apresentar uma equação do primeiro grau na sexta série, não diz o que ela é e sim como se resolve. Em seguida passa muitos exercícios de fixação, todos muitos parecidos, para "treinar o condicionamento".

A colocação é feita no passado, mas uma grande maioria dos estudantes que concluem os cursos hoje e entram no mercado de trabalho continuam fazendo nas escolas aquilo que era feito nos anos 50, senão anteriormente, o que aponta para o tipo de formadores de professores que estão atuando nos diversos cursos. Não aparecem mudanças significativas que formem professores de forma mais atualizada ou futurista, até porque pela formação existente até há pouco, leva-se a fazer o mesmo da mesma forma.

Nos projetos pedagógicos, planos de curso ou até mesmo nas aulas nem sempre se tinha preocupação maior com o indivíduo que aprende, com o suporte teórico pedagógico a seguir. O objetivo estava centrado nos próprios professores que ensinam ou transmitem o conhecimento como ainda se encontra em muitos registros e até mesmo livros.

É recente o movimento que passou a envolver os professores de matemática no estudo e análise das teorias da educação como algo que tem significado para o matemático e é neste contexto que surge a figura do **Educador Matemático**, profissional com uma formação matemática consolidada e que pode dar uma contribuição para a formação de professores de matemática com uma boa formação conteudista vinculada com a formação pedagógica, não deixando de dar significado aos conteúdos matemáticos desenvolvidos com um bom aprofundamento, sem perder a qualidade necessária para que se possa discutir o fazer matemática, agora dentro do contexto de formadores de professores de matemática.

No entanto, nunca se pode perder de vista o que preconizou Vygotsky que considerou que ***a mente do homem é social e culturalmente construída***. Segundo Lucia Moysés (2000) Vygotsky está presente na Educação Matemática e as pesquisas recentes mostram que para se ter um ensino de qualidade é necessário:

• Contextualizar a matemática de modo que o aluno perceba o significado das operações mentais que faz;
• Relacionar significados particulares com o sentido geral da situação envolvida;
• Avançar na compreensão dos algoritmos envolvidos ou a envolver;
• Possibilidades de aplicação dos algoritmos em situações práticas.

Um educador matemático é um indivíduo que não mais tem a pretensão de transmitir um conhecimento pronto e acabado e que tem alunos à sua frente para serem os receptores desta transmissão. Deve ser o facilitador do processo ensino-aprendizagem. Tem de buscar uma atualização constante a fim de poder acompanhar o tempo de seus alunos, integrando-se em seu processo cognitivo, afetivo e psico-motor.

Entende-se que o professor de Matemática deve conhecer e muito as fundamentações matemáticas, incluindo aí todo o processo de evolução e aplicação de cada área do conhecimento matemático. Muitos são os acadêmicos que questionam a necessidade de estudar áreas de matemática que não sejam imediatistas para sua prática nos níveis fundamental e médio, com um grau de exigência maior. Tem-se a compreensão de que todas as áreas devam ser estudadas. O que necessita é o professor estabelecer a conexão do tema abordado com aqueles temas com que o futuro professor irá trabalhar. O professor de Matemática de hoje deve ser aquele que é um pesquisador de sua sala de aula e isto pode e deve conduzi-lo a aprender com seus próprios alunos, que muitas vezes dispõem de maiores e melhores recursos tecnológicos do que ele. Para desempenhar este papel ele deve estar muito bem preparado para poder compreender os diversos caminhos que seus alunos vão percorrer, distinguindo o que é correto do que não o é. Acreditando nesta formação é que se apresentam algumas questões para justificar o porque de se ter disciplinas como análise, álgebra, geometria e topologia no currículo dos cursos.

Quase sempre que se pergunta porque os estudantes procuram na Universidade um curso de Matemática, encontram-se as seguintes respostas: porque eu gosto de fazer contas ou cálculos; porque Matemática é uma ciência exata onde 1 + 1 = 2, dentre outras. Na maioria das vezes, ao estudarem o Cálculo, os alunos acabam abandonando o curso ao qual se candidataram, procurando uma troca por outro onde não mais precisem se debater entre os épsilons e deltas; onde não precisem mais buscar os tais artifícios algébricos tão necessários para levantar as indeterminações dos estranhos limites que lhes aparecem. Mas afinal, 1 + 1 não é igual a dois?

Uma característica matemática é a de provar, demonstrar e foi assim ao longo da história da construção do conhecimento matemático hoje existente. No que segue, serão abordadas algumas questões que se julga convenientes para dar uma visão da compreensão de que Matemática devemos falar nos nossos cursos de formação.

3. A MATEMÁTICA A ENSINAR NA LICENCIATURA

3.1. O rigor matemático não pode ser abandonado

A linguagem matemática é formal e precisa. Geralmente, os matemáticos vão atrás de uma formalização ou à procura de argumentos que venham a demonstrar uma conjectura e isto tem de ser feito de forma precisa, nem econômica demais, nem ir além do necessário. Isto deve ser perseguido nas diversas disciplinas que constituem o currículo do futuro professor, acentuadamente nas disciplinas que compõem os Fundamentos de Matemática e Análise, como por exemplo, ao explorar a falsa "demonstração" de que 1 = 2, onde se comete um erro básico oriundo da falta de exploração do rigor matemático, no caso, que deveria ser exigido lá pela sétima série do Ensino Fundamental. Em geral não se exige de alunos do ensino fundamental um tal rigor matemático. Talvez esta seja uma das causas pelas quais os recém ingressos nos cursos de formação de professores relutem em desenvolver demonstrações.

Considere-se a sentença abaixo.

Se $a = b$ e $a,b > 0$, então $1 = 2$.

Destacando-se da sentença sua hipótese e sua tese.

HIPÓTESE: $a = b$ e $a, b > 0$ TESE: $1 = 2$

DEMONSTRAÇÃO

1).$a, b > o$	hipótese.
2).$a = b$	hipótese.
3).$ab = b^2$	multiplica-se ambos os membros daigualdade por b.
4).$ab - a^2 = b^2 - a^2$	subtrai-se de ambos os membros a^2.
5).$a(b - a) = (b + a)(b - a)$	fatora-se os termos da igualdade.
6).$a = (b + a)$	divide-se ambos os termos por b-a.
7).$a = a + a$	substituição da hipótese 2.
8).$a = 2a$	adição de termos semelhantes.
9).$1 = 2$	divisão de ambos os termos por a.

Encontre o erro desta demonstração.

3.2. O SISTEMA BINÁRIO- UMA APLICAÇÃO PRÁTICA

E afinal, 1+1 não dá dois?

Uma dos temas atuais mais importantes para as mudanças na forma de viver é a computação. Como funciona a base do sistema computacional? Em que base funcionam os algoritmos computacionais? Considere-se um sistema onde só existam dois elementos: 0 e 1, ou abrir e fechar, ou parar e seguir. Neste sistema, devem-se efetuar operações como as que se usa num sistema de base dez? Exemplifica-se com uma tabela para a operação adição no conjunto {0,1}.

+	0	1
0	**0**	**1**
1	**1**	**0**

A aplicação a seguir diz respeito à descoberta de idades de pessoas, de forma recreativa e motivadora para o desenvolvimento do tema.

Como em geral nos grupos de estudantes que se trabalha não há pessoas com mais de 63 anos, escreveremos na base 2 os números de 1 a 63.

Escrever um número no sistema decimal consiste em utilizar para a sua representação os símbolos 0,1,2,3,4,5,6,8 e 9.

Lembre-se que no sistema decimal se escreve

$10 = 1.10+0$

$11 = 1.10+1$

$12 = 1.10+2$, e assim até

$20 = 2.10+0$

e, sucessivamente até

$99 = 9.10+9$

$100=1.10^2+0.10+0$

$101=1.10^2+0.10+1$ prossegue-se de forma semelhante.

Escrever um número no sistema binário consiste em utilizar para sua representação os símbolos 0 e 1, apenas.

$0 = 0$

$1 = 1$

$2 = 1.2^1+0 = 10$

$3 = 1.2^1+1 = 11$

$4 = 1.2^2+0.2^1+0 = 100$

$5 = 1.2^2+0.2^1+1 = 101$

$6 = 1.2^2+1.2^1+0 = 110$

$7 = 1.2^2+1.2^1+1 = 111$

$8 = 1.2^3+0.2^2+0.2^1+0 = 1000$

e assim por diante.

De um modo geral, tem-se a representação de um número $n \in \mathbf{N}$ da seguinte maneira.

$0 = n \quad \Rightarrow n = 0 \quad \Rightarrow \quad (0)_2 = 0$

$1 = n = 2^0 \quad \Rightarrow n = 1 \quad \Rightarrow \quad (1)_2 = 1$

$2 = n = 2^1 \quad \Rightarrow n = 1.2^1 + 0 \quad \Rightarrow \quad (2)_2 = 10$

$2^1 < n < 2^2 \quad \Rightarrow n = a_1.2^1 + a_0 = 1.2^1 + a_0 \quad (a_0 = 0 \text{ ou } 1) \quad \Rightarrow \quad (n)_2 = a_1 a_0$

$2^2 \leq n < 2^3 \quad \Rightarrow n = a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0 = 1.2^2 + a_1.2^1 + a_0 \quad \Rightarrow \quad (n)_2 = a_2 a_1 a_0$

$2^3 \leq n < 2^4 \quad \Rightarrow n = a_3.2^3 + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0 = 1.2^3 + a_2.2^2 + a_1.2^1 + a_0 \Rightarrow \quad (n)_2 = a_3 a_2 a_1 a_0$

e, assim por diante.

Tem-se um polinômio da forma

$$a_0 + a_1.2^1 + a_2.2^2\, a_3.2^3 + \ldots + a_n.2^n + \ldots$$

o qual pode ser escrito de uma forma concisa assim

$$a_0 a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots .$$

Uma maneira prática de escrever um número n na base 2 é utilizar o algoritmo da divisão por 2, sucessivamente até obter para quociente o 1. Exemplificando:

```
235 |_2
  1  117 |_2
       1  58 |_2
           0  29 |_2
               1  14 |_2
                   0   7 |_2
                       1   3 |_2
                           1   1
```

Escreve-se no sentido de baixo para cima a partir do último quociente obtido

$$(235)_2 = 11101011 = 1.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1 .$$

1	17	33	49	**2**	18	34	50	**4**	20	36	52
3	19	35	51	3	19	35	51	5	21	37	53
5	21	37	53	6	22	38	54	6	22	38	54
7	23	39	55	7	23	39	55	7	23	39	55
9	25	41	57	10	26	42	58	12	28	44	60
11	27	43	59	11	27	43	59	13	29	45	61
13	29	45	61	14	30	46	62	14	30	46	62
15	31	47	63	15	31	47	63	15	31	47	63

8	24	40	56	**16**	24	48	56	**32**	40	48	56
9	25	41	57	17	25	49	57	33	41	49	57
10	26	42	58	18	26	50	58	34	42	50	58
11	27	43	59	19	27	51	59	35	43	51	59
12	28	44	60	20	28	52	60	36	44	52	60
13	29	45	61	21	29	53	61	37	45	53	61
14	30	46	62	22	30	54	62	38	46	54	62
15	31	47	63	23	31	55	63	39	47	55	63

Uma aplicação bastante interessante a ser feita com crianças menores é dispor, por exemplo, 15 figuras numa tabela, numeradas de 1 a 15 e apresentar para a criança escolher uma, sem expressar qual. A seguir se apresenta quatro cartelas, contendo combinações destas figuras, de forma similar às apresentadas acima para as idades, sendo que a criança deve dizer se a figura aparece naquela cartela ou não. Em cada cartela se considera um número básico, as potencias de 2, que constituirão os termos da expressão a serem somados de modo que ao final se possa retornar à cartela inicial e "adivinhar" a figura escolhida pela criança.

De acordo com o que foi construído acima, um número de 1 a 15 na base 2 pode ser escrito da seguinte forma:

$$(n)_2 = a_0+a_1.2^1+ a_2.2^2 a_3.2^3 = a_3\ a_2\ a_1\ a_0,$$

onde $a_3,\ a_2,\ a_1,\ a_0$ são os números 0 ou 1. Precisa-se de 4 agrupamentos de figuras: um correspondente a 2^0; isto é, os números cujo último algarismo da direita -a_0- é igual a 1; um correspondente a 2^1; isto é, os números cujo segundo algarismo da direita para a esquerda - a_1- é igual a 1: um correspondente a 2^2; isto é, os números cujo terceiro algarismo da direita para a esquerda-a_2- é igual a 1 e por último um correspondente a 2^3; isto é, os números cujo quarto algarismo da direita para a esquerda -a_3- é igual a 1.

Se a figura assinalada no quadro maior for 9, por exemplo, a bola, tem-se

$$(9)_2 = 1.2^3+0.2^2+0.2^1+1$$

Isto significa que a bola deve aparecer no grupamento correspondente a $2^0=1$, ou seja, os ímpares

1 = 1
3 = 11
5 = 101
7 = 111
9 = 1001
11 = 1011
13 = 1101

e no grupamento correspondente a $2^3 = 8$, cujo segundo algarismo da direita para a esquerda -a_1- deve ser 1.

2 = 10
3 = 11
6 = 110
7 = 111
10 = 1010
11 = 1011
14 = 1110
15 = 1111

Basta que se some 1+8=9 e se volte ao grupamento maior, o de 1 a 15 e se observe a figura correspondente ao número 9 - **a bola**.

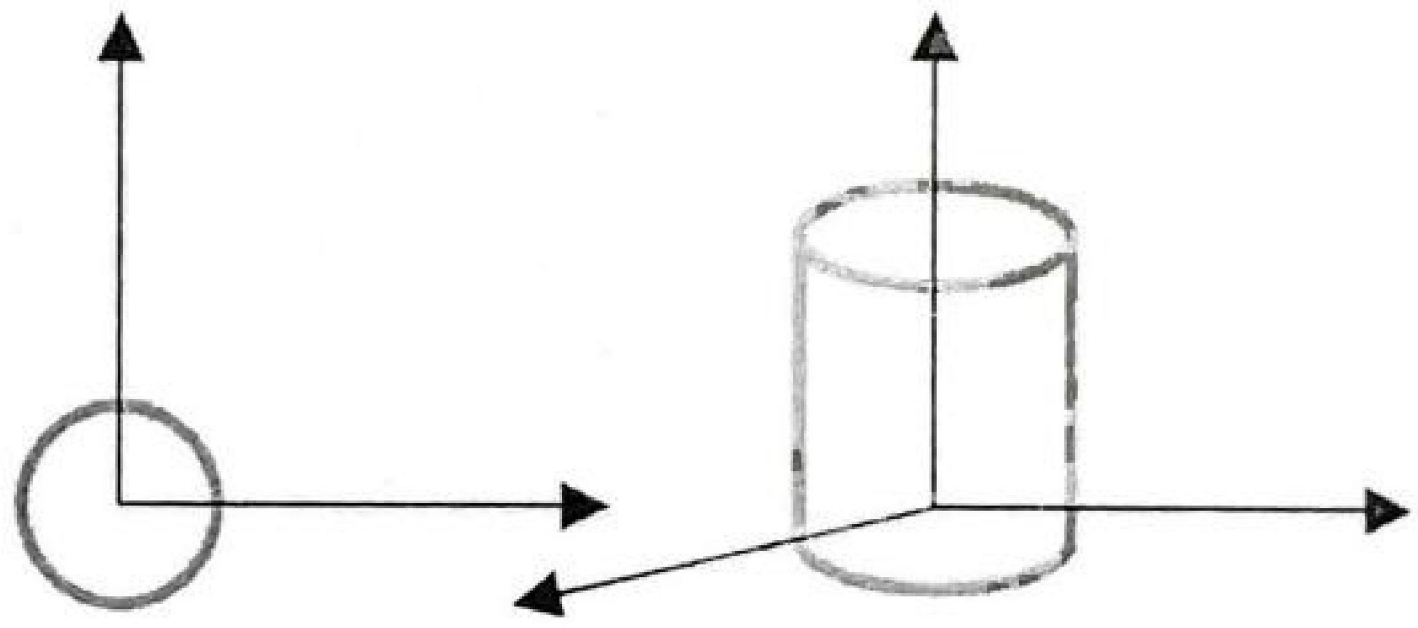
De modo similar se constrói a tabela com os números de 1 a 64, tomando-se o cuidado de assinalar em cada grupamento os números chaves, 1,2,4,8,16,32 para que se possa somá-los à medida que a pessoa identifica o número identificado em cada tabela.

3.3.Sentenças matemáticas

Retomando a questão dos motivos dos abandonos e reprovações, insiste-se que eles não se prendem apenas ao Cálculo, senão também às interpretações dos problemas de Geometria Analítica, onde tudo tem de ser visualizado geometricamente e o preparo quando se chega ao curso superior era apenas para realizar contas e cálculos. Agora, cada sentença matemática tem um significado e em muitas vezes o significado é diferente. Veja o exemplo a seguir.

A sentença $x^2 + y^2 = 9$ sempre foi representada por uma circunferência no plano de centro na origem e raio igual a três. Alguns estarão perguntando - e não é assim? Considere o espaço tridimensional e não mais o bidimensional. Qual o significado desta equação? Bem, sabe-se que estando no plano, aparecem apenas as letras x e y e estando no espaço propriamente, têm-se as letras x, y e z.

Se só há duas letras na sentença, isto significa que se tem um objeto plano? O não aparecimento da letra z na sentença quer significar que o lugar geométrico não corta e nem toca o eixo no qual se mede tal variável. Assim, o lugar geométrico da sentença é um cilindro circular reto.



3.4. Geometrias não-euclidianas

E por falar em geometria, quanto vale mesmo a soma dos ângulos internos de um triângulo? Será que isto quer dizer que mudou aquela história de que a soma dos ângulos de qualquer triângulo dá 180 graus? Pois façam a seguinte consideração usual tanto nos cursos de Física, quanto nos cursos de Matemática. O ângulo entre dois vetores é algo comum entre nós e pode facilmente ser obtido através do produto escalar. Da mesma forma, o ângulo entre duas curvas é calculado como o ângulo entre os vetores tangentes a estas curvas. Tome uma esfera, que pode ser uma bola de isopor, o globo terrestre, uma laranja bem redonda e a corte pela metade. A seguir a corte novamente pela metade. Corte novamente esta última metade pela metade. Ao descascar a laranja qual o tipo de objeto matemático que se encontra? Obviamente, todos responderão que é um triângulo, um tanto quanto estranho, mas é um triângulo. Busca-se, pois os ângulos deste triângulo, através de seus vetores tangentes.

Como cada um dos ângulos mede 90 graus, concluiu-se que existem triângulos cuja soma dá mais do que 180 graus, no caso, 270 graus.

Isto conduz a outros tipos de geometria que não a Geometria Euclidiana apenas.

3.5. Topologia

E por falar em geometria pergunta-se: qual é o menor caminho a ser percorrido entre dois pontos X e Y? Com certeza, a resposta imediata é a linha reta que vai de X até Y. Modificando a pergunta: qual é o menor caminho que você faz para percorre o espaço compreendido entre dois pontos X e Y de sua cidade?

Como se pode observar, nem sempre o que se pode usar para o cotidiano é a matemática usual. Novamente aqui se estaria reportando à representação de sentenças matemáticas, coisa que todo matemático tem obrigação de compreender.

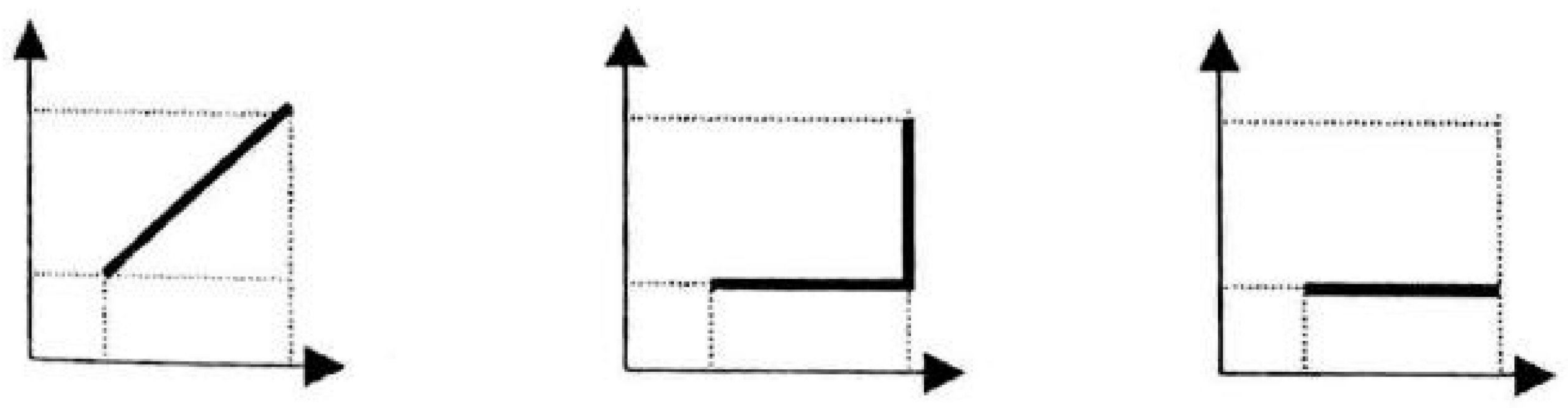
Seja $\mathbf{R}^2$ o plano cartesiano. Define-se em $\mathbf{R}^2$ três métricas, como segue, onde $X=(x_1,y_1)$ e $Y=(x_2,y_2)$ são pontos do $\mathbf{R}^2$.

$D(X,Y)= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, chamada _métrica euclidiana_;

$D_1(X,Y)=|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$, chamada _métrica dos catetos_;

$D_2(X,Y)=$ máx $\{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \}$, chamada _métrica do máximo_.

Assim, dados dois pontos X e Y no plano pode-se visualizar estas distâncias nos seguintes gráficos.



$D(X,Y)$ $D_1(X,Y)$ $D_2(X,Y)$

O último gráfico poderia ser o segmento vertical, caso fosse maior do que o horizontal.

Pode-se ilustrar isto considerando um mapa de uma cidade.

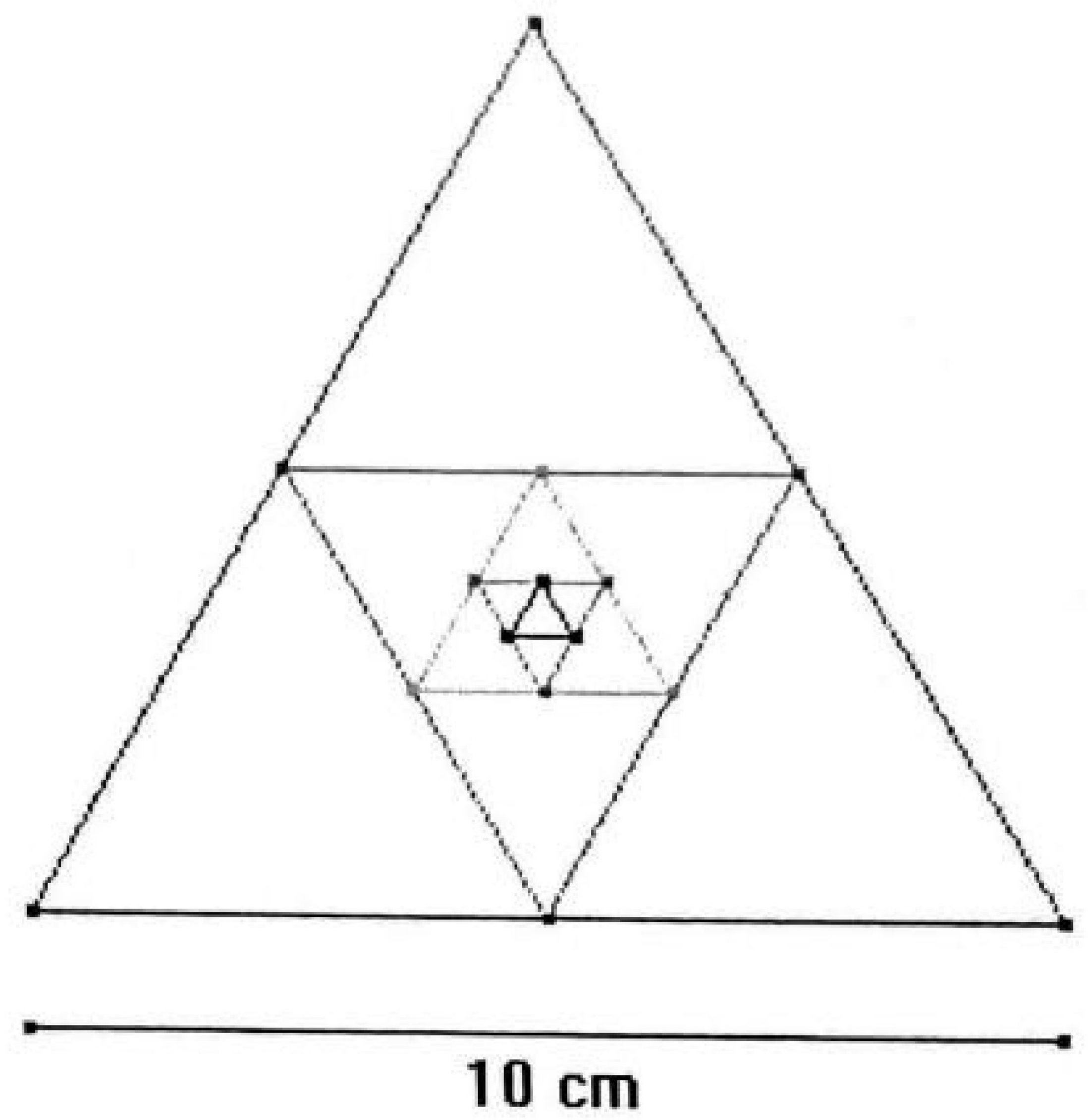
Ainda no que diz respeito a mapas, pode-se pensar em propor um problema de pintar um mapa qualquer usando apenas quatro cores diferentes, sem que duas regiões vizinhas tenham a mesma cor. Existe solução para este problema?

3.6. Análise

Ao falar em números reais sugere-se pensar no seguinte questionamento - séries geométricas tem geometria?

Considere a figura abaixo que apresenta um número infinito de triângulos. Cada um dos triângulos inscritos é definido pelos pontos médios dos lados do triângulo que o circunscreve. Obter a soma dos perímetros dos triângulos assim obtidos.

Sabe-se da geometria euclidiana que o triângulo que une os pontos médios dos lados



de outro triângulo teus seus lados também sendo a metade dos lados do maior e conseqüentemente seu perímetro é a metade do perímetro do maior.

• Soma dos perímetros dos triângulos

Basta considerar a soma da série infinita abaixo:

30 + 15 + 15/2 + 15/4 + 15/8 + 15/16 + ...

a qual pode ser reescrita da seguinte forma

$$45 + \frac{15}{2} + \frac{15}{4} + \frac{15}{8} + \frac{15}{16} + \ldots$$

ou ainda

$$45 + 15\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\right)$$

A série entre parênteses é geométrica de razão 1/2, sendo sua soma

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

Assim, a soma dos perímetros é 60 cm.

• Soma das áreas dos triângulos

Cada triângulo de lado b e altura h tem área e altura, respectivamente

$$A = \frac{bh}{2} \qquad h = \frac{b\sqrt{3}}{2}$$

Como o triângulo inscrito tem lado igual a metade do lado do circunscrito, bem como a altura obtém-se para soma das áreas

$$10.10.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{10}{2}.\frac{10}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{10}{4}.\frac{10}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots$$

ou ainda

$$100.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{100}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{100}{16}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \ldots$$

ou ainda

$$100\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots)$$

cuja parte entre parênteses é uma série geométrica de razão 1/4 cuja soma é dada por 4/3.

Daí, a soma das áreas é

$$100\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{4}{3} = \frac{200\sqrt{3}}{3}$$

unidades de área ou cm².

Referências Bibliográficas

EFÍMOV,N.V. **Geometría Superior**. MOSCÚ :Editorial Mir.1984.

CARMO, Manfredo P. do . **Elementos de geometria diferencial**. RJ: Editora IMPA.1971.

ROCHA, Luiz Fernando Carvalho. **Introdução à geometria hiperbólica plana**. RJ: Editora IMPA. 1987.

FILHO, Edgard de Alencar. **Iniciação à lógica matemática.** SP:Editora Nobel. 1985.

KUELKAMP, Nilo. **Introdução à topologia geral**. SC: Editora U.F.S.C. 1988.

DOMINGUES, Hygino H. **Espaços métricos e introdução à topologia.** SP: Editora Atual.1982.

BARR, Stephen. **Experiments in tolpology**. USA: Editora U.S.A.1989.

CARVALHO, DioneLucchesi de . **Metodologia do ensino da matemática**. SP: Editora Cortez . 1990.

GONÇALVES, Adilson. **Introdução à álgebra**. RJ: IMPA. 1979.

DOMINGUES, Hygino H. e IEZZI, Gelson. **Introdução à álgebra.** SP: Editora Atual.1976.

ZERMIANI,Vilmar J. **Álgebra-brincando, redescobrindo e aprendendo)**. SC: Editora FURB. 1987.

ÁVILA,Geraldo. **Introdução á análise matemática**. SP: Editora Blucher. 1995.

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. DF:Editora S.B.M. 1984

LEIVAS, José Carlos Pinto. **Um estudo sobre superfícies em** Â³. Dissertação de mestrado. **SC**: UFSC.1985.

MILLMAN, Richard S. e Parker, George D. **Elements of differential geometry**. U.S.A. Carbondale-Illinois: Editora da University. 1972.

NETO, Ernesto Rosa. **Didática da matemática**. SP: Editora Ática. 1991.

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento matemático**. RJ: Editora Zahar. 1978.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. RJ: Editora Interciência. 1978.