O ESTUDO DE FUNÇÕES UMA ANÁLISE ATRÁVES DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Rita de Cássia Pistóia Mariani[1] - URI Santiago/RS – PUC/SP

A capacidade de resolução de problemas gráfica e/ou numericamente, além da necessidade de manipular variações de grandezas e realizar aproximações locais, é essencial para a compreensão dos conceitos e manipulação correta das notações matemáticas, ou habilidades fundamentais para os profissionais da área das Ciências Exatas. No entanto, na prática observa-se que os alunos de Cálculo Diferencial e Integral cometem erros, muitas vezes considerados inconsistentes, expressando muito mais que falta de entendimento dos tópicos abordados na disciplina tais como: estudos de funções, limites, derivadas e integrais, mas sim da noção de número. Com o intuito de detectar e 'analisar' os erros destes alunos ao solucionar questões que envolvem a idéia de número em funções realizamos uma investigação com 22 (vinte e dois) alunos do segundo semestre do Curso de Matemática, que iriam cursar, no próximo semestre, a disciplina de Cálculo I. Este trabalho foi realizado em duplas e referenciado na teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval e, a partir dos protocolos apresentados pelos alunos, pode-se constatar estes alunos apresentam resolução mecânica, utilizando algoritmos na tabela de valores, obtendo respostas aparentemente desprovidas de significado, uma vez que elas são inconsistentes as expressas como domínio e imagem das respectivas funções. Ficou patente também que, para eles, a idéia de número se restringe ao conjunto dos inteiros demonstrando também, o desconhecimento dos irracionais.O trabalho revelou ainda que existe uma sistemática da construção de gráficos de funções, recorrendo a uma tabela de valores assim como a crença de que o gráfico de uma função deve ser uma reta passando pela origem.

PALAVRAS-CHAVE: Ensino de Cálculo, Registros de Representação Semiótica, Domínio, Função, Gráfico.

Realizamos esta investigação com 22 (vinte e dois) alunos do segundo semestre de um Curso de Matemática de uma Universidade Comunitária do estado do RS. Com objetivo de detectar e 'analisar' os erros que estes alunos comentem ao solucionar questões que envolvem a idéia de número em funções.

Uma vez que, estudos anteriores mostram que, os alunos, apresentam uma idéia conjuntista de função desvinculada da noção de dependência funcional e com falta de identificação do objeto matemático: variável.

Segundo Feudenthal (1982) para se caracterizar função torna-se imprescindível enfatizar a noção de dependência. Segundo este autor:

> Nosso mundo não é um sistema relacional estático, mas um reino de mudanças, um reino de objetos variáveis dependendo, uns dos outros, as funções são um tipo especial de dependência, isto é, entre variáveis que são distinguidas como dependentes e independentes.(FEUDENTHAL, 1982 apud KIERAN, 1992, p. 408)

A falta de compreensão das variáveis no estudo de funções conduz, conseqüentemente, a dificuldade de apreensão deste conceito. Kieran

[1] Professora DCET- URI Campus Santiago/RS, Doutoranda em Educação Matemática PUC/SP

(1992) apresenta um trabalho sobre o ensino a álgebra escolar e aponta a importância desta questão. Neste trabalho a Kieran elenca outras pesquisas que abordam este tema como segue:

Para Mevarech e Yitschay (1983) 28% dos alunos universitários entrevistados compreendem as letras como rótulos não conseguindo interpretar letras como variáveis em uma relação de equivalência.

Clement, Lonchhead & Monk (1981) ainda apontam esta tendência com estudantes do Curso de Engenharia que quando questionados sobre este tema, 37% expressaram erroneamente a relação funcional entre duas variáveis.

E, ao se fazer pesquisas semelhantes como alunos da Educação Básica encontram resultados semelhantes conforme Küchemann (1976) e Kieran, Boilleau e Garaçon (1989).

Para confirmação deste fato, Even (1988) aplicou um questionário a 152 futuros professores secundários de Matemática que cursavam o último ano de oito universidades americanas. O questionário solicitava que os sujeitos da pesquisa abordassem a relação entre função e equação indicando, a partir da definição de função, indícios para relacioná-la com a equação. Even afirma que, para eles, as funções só apresentam significado como equações. Pois os sujeitos da pesquisa não conseguiram dar significado à definição conjuntista de função, não sendo capazes de relacionar soluções de equações com valores das funções correspondentes em uma representação gráfica, eliminando assim a idéia de dependência funcional.

Dreffus e Einsemberg (1981, 1982) trabalharam com questões sobre imagem, domínio, crescimento, extremos e declividade nas três representações de funções, ou seja: gráfica, por diagramas e por tabelas com 440 alunos do Ensino Médio e concluíram que os estudantes que preferiam o registro gráfico possuíam um melhor conceito sobre função.

Aqueles que optavam pelo registro de tabela tinham mais dificuldade neste conceito. Estes autores ainda destacaram que a construção e interpretação de gráficos representam dificuldades para os alunos.

Swan (1982) também constatou que a dificuldade da conversão do registro gráfico para o algébrico se dá, na maioria das vezes, como conseqüência da maneira como foi realizada a conversão contrária. O professor conduz quase que automaticamente a realizar a conversão do registro algébrico para o gráfico pois no estudo de funções os alunos são instruídos a construir as tabelas de valores de acordo com as expressões algébricas com duas variáveis, marcar os pontos no gráfico cartesiano e, posteriormente, traçarem o gráfico aperfeiçoando apenas estas habilidades apresentando, assim, dificuldade em realizar conversões do registro gráfico para o algébrico.

Ainda no campo das pesquisas realizadas cabe destacar aquelas que tratam da transição do Ensino Médio para o Superior. Segundo o relatório *Measuring The Mathematics Problem,* emitido por uma Universidade do Reino Unido[1], observou-se nesta última década um sério declínio nas habilidades matemáticas básicas dos estudantes e no nível de preparação na entrada em Ensino Superior. Pelo menos 60 departamentos de Matemática, Física e Engenharia, que passaram a constar este fato a partir de testes diagnósticos envolvendo a matemática básica, para os novos estudantes universitários.

Estas dificuldades na aquisição do conhecimento matemático neste nível de ensino não são exclusivas da Inglaterra; aqui no Brasil enfrentamos estes mesmos problemas. Algumas pesquisas sobre o ensino do Cálculo apontam que muitas das dificuldades apresentadas por ingressantes no Ensino Superior se devem ao fato de que muitos dos conceitos trabalhados na Educação Básica não apresentarem real significado para esses estudantes.

Em particular, diagnósticos realizados sobre as concepções dos alunos a respeito de funções revelam falta de compreensão das variáveis e do relacionamento entre elas.

Silva, et all (2002) propõem atividades a

[1] *http://www.engc.uk/publication/pdf/mathsreport.pdf*

alunos do primeiro ano do curso de Cálculo para que reconheçam características de comportamento das funções a partir das suas representações gráficas construídas em laboratório de informática. Os autores enfatizam a conversão da representação gráfica para a algébrica, que é o procedimento inverso do usualmente proposto, a fim de tentar que os alunos não reduzam o gráfico de uma função a confecção de uma tabela de valores.

Desta forma, iremos abordar esta temática envolvendo a transição do Ensino Médio para o Superior sob a ótica dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1993) pois, segundo ele, a aquisição do conhecimento matemático está ligada a organização das situações de aprendizagem. E, estas situações precisam levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático pois o conhecimento matemático só pode ser mobilizado na medida em que utilizamos das representações.

Como para um único objeto matemático existem diversas representações, para que ocorra a aquisição do conhecimento é necessário integrar mais de um registro de representação do referido objeto.

A distinção entre o objeto e sua representação fica explícita na definição de Pierce para representação é: "Alguma coisa que tem, no lugar de alguma outra coisa"

Duval (1993) organizou três perspectivas para esse termo:

- Representações mentais e subjetivas: refere-se as crenças, idéias, explicações, convicções espontâneas do sujeito sobre os fenômenos físicos, sendo representações internas e conscientes ocorrendo no nível do pensamento.;
- Representações internas ou computacionais: também são representações internas mas não conscientes. Envolvendo a Psicologia Cognitiva e a Inteligência Artificial, elas têm a função de tratamento quase instantâneo ou automático sem que o sujeito pense em todos os passos necessários para a realização de uma tarefa. Estas representações traduzem informações externas a um sistema, de forma que seja possível recupera-las e combina-las no interior do mesmo.
- Representações semióticas: são externas e conscientes do sujeito. Segundo Duval (1993, p.39): *(...) as representações (semióticas) não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais para as atividades cognitivas do pensamento.*

Um registro de representação semiótico é um sistema de signos que tem por objetivo não somente a comunicação mas também o tratamento da informação e a objetivação. Para o próprio Duval (1995) estas representações:

> São relativas a um sistema particular de signos, linguagem natural língua formal, escrita algébrica ou gráficos cartesianos, figuras, de um objeto matemático [...]. De onde a diversidade de representações para um mesmo objeto representado ou ainda a dualidade das representações semióticas: forma (o representante) e conteúdo (o representado). (p. 3)

As representações semióticas para a aquisição do conhecimento pelo sujeito que apreende com base na dualidade *forma* e *conteúdo* nos remete a relações de *tratamento* e *conversão* de registros.

O tratamento ocorre quando um elemento representação é transformado em outro que permanece no dentro do mesmo registro. Na maioria das vezes recorre-se aos tratamentos nos, procedimentos de justificação.

Já a conversão, consiste numa mudança entre dois registros de representação conservando a referência aos mesmos objetos. Pelo aspecto cognitivo, a conversão é uma atividade de transformação representacional fundamental pois ela conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão sendo, irredutíveis a um tratamento. Para Duval (2003) a originalidade da atividade matemática está em mobilizar e trocar os registros de representação semiótica, sendo que alguns são não algoritmizáveis como a língua materna e as figuras geométricas planas ou em perspectiva e outros com características essencialmente algorítmicas como os sistemas de escritas (numéricas, algébricas, simbólicas) e cálculo, bem como os gráficos cartesianos.

Neste sentido, elaboramos um processo de experimentação com o objetivo de detectar, 'analisar' os erros destes alunos ao solucionar questões que envolvem a idéia de número em inequações fundamentado nos princípios da Engenharia Didática de Michèle Artigue (1988).

Uma Engenharia Didática se caracteriza por um esquema experimental que visa analisar as situações didáticas em sala de aula e trata das concepções, realizações, observações e análise de seqüências de ensino, organizadas em quatro fases definidas por:

- *Análises preliminares*: leva em conta as concepções envolvidas. Nessa fase, o pesquisador ainda busca o quadro teórico orientador do processo e os conhecimentos didáticos adquiridos previamente sendo que estas informações serão retomados e aprofundadas nas demais fases desta metodologia;
- *Concepção e análise a priori*: nesta da fase, o investigador estabelece o número de variáveis pertinentes ao problema elaborado a fim de controlar o comportamento dos alunos envolvidos na pesquisa. Estas variáveis podem ser macro-didáticas (ligadas a organização global da engenharia) ou micro-didáticas (ligadas a organização local da engenharia, de uma seqüência ou da fase) mas de qualquer forma, podem ser independentes ou dependentes ao conteúdo didático enfocado;
- *Experimentação*: fase de realização da engenharia com a população de alunos pesquisados através do contato com o pesquisador e/ou professor e/ou observadores. Nesta etapa também ocorrem a "Oficialização" ou "Institucionalização" dos conceitos trabalhados na atividade aplicada
- *Análise posteriori e validação*: esta fase consiste no tratamento das informações obtidas com base nos dados coletados na experimentação e nas observações realizadas durante a aplicação da seqüência de ensino. E, por fim, realizam-se as confrontações entre as análises *a priori* e *a posteriori*, validando ou não a essência das hipóteses formuladas na investigação.

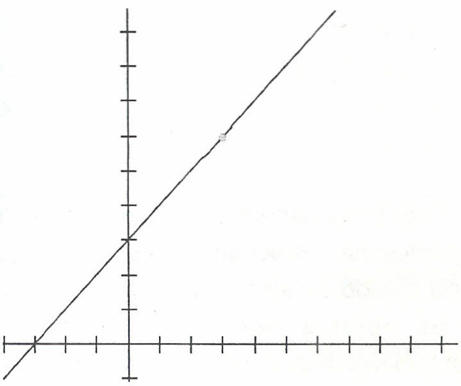
Para esta investigação, elaboramos e aplicamos uma seqüência de ensino com questões voltadas a tópicos de inequações, funções e gráficos para analisarmos os erros cometidos, classificando-os.

Este seqüência foi estruturada com 4 questões subdivididas em alguns itens e, para este trabalho analisaremos a um e a quatro que serão expressas a seguir, acompanhadas de sua análise prévia:

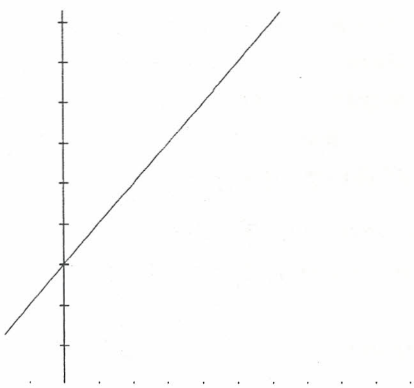
1) Sabendo-se que a expressão $\dfrac{x^2-9}{x-3}=x+3$,

$\forall\, x \neq 3$, e no entanto, os gráficos das funções

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$



$$g(x) = x + 3$$



a) Defina o domínio da função f e da função g:
OBJETIVO: verificar se os alunos apresentam noção de domínio de funções racionais afim.
EXPECTATIVA DE RESPOSTA:
I) Domínio da função f são todos os valores de x que pertencem aos reais tal que x^13, domínio da função g são todos os x que pertencem aos reais
II) Domínio das funções f e g são todos os valores de x que pertencem aos reais.

b) Explicite o porquê no ponto x=3 estes gráficos se diferem:

OBJETIVO: Verificar se os alunos observam a diferença nos domínios das funções e procurem alguma justificativa para expressar o fato da igualdade da expressão $\frac{x^2-9}{x-3} = x+3$ e da diferença das funções f e g
EXPECTATIVA DE RESPOSTA:
I)se verificam a não existência de x=3 no domínio da função f
II)se não verificam a não existência de x=3 no domínio da função f

4) Seja $f(x) = x^2$
a) Apresente os conjuntos domínio e imagem desta função:

OBJETIVO: verificar se a noção de domínio e imagem para uma função quadrática é familiar aos alunos.

EXPECTATIVA DE RESPOSTA:
I)Dom(f)= $\{x \in R\}$e Im(f)=$\{y \in R\}$
II) Domínio e Imagem da função expressos através de um conjunto de limitado de números inteiros.
Sabendo que, para um domínio conveniente, a função inversa a $f(x) = x^2$ é $g(x) = \sqrt{x}$ a) ,
estabeleça esse domínio e, a seguir o domínio e a imagem de g justificando-os:
OBJETIVO: verificar se os alunos estabelecem o domínio da função $f(x) = x^2$ a fim de que ela seja inversa da $g(x) = \sqrt{x}$

EXPECTATIVA DE RESPOSTA:
I)Dom(f)= $\{x \in R / x \geq 0\}$

II)Dom(f)= $\{x \in R\}$

III) Domínio e Imagem da função expressos através

de um conjunto de limitado de números inteiros.
EXPECTATIVA DE RESPOSTA:

I)Dom(g)= $\{x \in R / x \geq 0\}$

II)Dom(g)= $\{x \in R\}$

III)Domínio e Imagem da função expressos através de um conjunto de limitado de números inteiros.

a) Esboçe, em um único plano cartesiano o gráfico das funções f e g e explicite geometricamente como se pode obter o gráfico de uma delas a partir da outra.

OBJETIVO: verificar se os alunos concebem que uma função é inversa da outra através de uma reflexão com base na reta f(x)=x

EXPECTATIVA DE RESPOSTA:
I) duas retas passando pela origem;
II) traçado correto dos gráficos mas, sem a justificativa correta de como conceber, graficamente, que uma função é inversa da outra.

A partir dos protocolos apresentados pelos alunos obtivemos os seguintes resultados:

✓ **Resolução mecânica através de um mesmo procedimento**: na hora de determinar a qual era o domínio das funções $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ *e* $g(x) = x+3$, a grande maioria das duplas, aplicou um algoritmo a cada parte da função, isto é, ao numerador e ao denominador da função *f* e da função *g*. Assim, cada parte passou a ser uma desigualdade comparada com o zero (≥ 0), ao invés de especificar que o denominador deve ser diferente de zero ($\neq 0$):

- 3 duplas destacaram que o domínio da função *f* era: $D(f) = \{x \in R / x > 3\}$; uma dupla inclusive apresentou esta solução através de um registro gráfico. Selecionou, o numerador e impôs $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x \geq \pm 3$, marcou em um segmento de reta todos os valores menores que –3 e maiores que 3; a seguir, destacou a desigualdade $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$ e demarcou em um segmento abaixo os valores de x maiores que +3, e em uma terceira linha, os valores de x maiores que 3.

Este procedimento expressa uma técnica muito familiar na resolução de inequações, bem como, do estudo de sinais da função quadrática. Como os objetos domínio e imagem não representam significado, os alunos recorrem a este procedimento mecânico que já está presente em suas atividades matemáticas.

- 2 duplas ainda tentaram expressar a solução da questão 2a) através da representação de conjunto. Assumindo valores pontuais e, somente inteiros, para tais repostas. Uma delas ainda mantinha a noção de que este conjunto se estendia apresentando $Dm(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$; para a outra dupla não, $D(f) = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Em ambos os casos foram substituídos estes valores em $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ e, no caso de x=3, as duplas não obtiveram reposta, mesmo assim, o ponto permaneceu no domínio da função. Os pontos que foram destacados como imagem são os respectivos valores apontados no domínio após a substituição na função.

- 1 dupla ainda apontou que o domínio da função f era: *"todos os R menores que o número 3"*. Possivelmente, esta dupla também tenha imposto a condição $x-3 \geq 0$ e tomado para o domínio os números que não satisfazem esta condição.

- apenas 1 duplas expôs o resultados do domínio da *f* de forma correta: $D(f)=\{x\in R/x\neq 3\}$;

✓ **Falta de relação entre a tabela de valores e o conjunto domínio da função**: apesar de os gráficos, da questão 2) já constarem no enunciado da mesma, muitas duplas construíram uma tabela de valores e, a maioria, utilizou os números –2, -1, 0, 1, 2.

- as duplas I e J que substituíram na função $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, perceberam que no ponto x=3 a função não estava definida e mesmo assim, mantiveram este ponto no domínio da função. Ao justificar a questão 2b) que questionava a diferença dos gráficos de:

$$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3} \qquad e \qquad g(x)=x+3,$$

alegaram que a função *f* não está definida no ponto 3 por isso seu gráfico é "aberto" e que a função *g* está definida neste valor de x e vale 6.

- Outro fato semelhante ocorreu com a dupla F ao analisar o domínio de $y=\sqrt{x}$, na questão 4b). Observaram que no ponto x=-1 a função não estava definida, mas ao explicitar o domínio da respectiva função o ponto –1 continuava pertencendo a tal domínio. Desta forma, percebemos que, grande parte dos alunos, apresenta muitas dificuldades em atribuir significado ao objeto domínio.

✓ **Uma idéia de que número se restringe ao conjunto dos inteiros bem como o desconhecimento dos números irracionais**: várias pesquisas e experiências anteriores apontam que os alunos utilizam, em sua maioria, números inteiros muito mais positivos do que negativos. Pudemos comprovar, com estas questões, que esta é realmente uma afirmativa válida:

- Com exceção das duplas D, F e J que apresentaram os valores 1,4, 1,7, $\sqrt{2},\sqrt{3}$, na questão 4b) todos os alunos apontaram apenas números inteiros, na maioria positivos em todos os domínios, imagens e gráficos solicitados nas duas questões analisadas.

- No entanto, as duplas F e J deixaram explícito mais um problema: a inexistência dos números irracionais, uma vez que utilizaram dos valores aproximados 1,4 e 1,7 para $\sqrt{2},\sqrt{3}$, respectivamente.

✓ **Falta de significado das notações e representações:**

- a dupla L, na atividade 4a), expôs $D=\{R\}e\,\mathrm{Im}=\{R^-\}$, tentando expressar que a imagem da função $y=x^2$ era somente os números reais positivos, tentando excluir os negativos através dessa representação, R^-. O mesmo ocorreu na questão 4b), que envolvia a função $y=\sqrt{x}$, com o $D=\{R^-\}e\,\mathrm{Im}=\{R^-\}$

- Outro fato relevante, é a constatação que muitos desses alunos não compreendem o símbolo R como sendo o conjunto dos reais, visto que foi necessário expressa-los entre chaves.

- Já a dupla B, apresentou como domínio da função $g(x)=x+3$, *D*=0, talvez tentando expressar que este domínio não possuía nenhuma restrição, isto é, o domínio é o conjunto de todos os números reais.

- A dupla D, na questão 4b) também expressa falta de significado das notações matemáticas, uma vez que expõe

$$y=\sqrt{x}, \qquad x\geq 0 \qquad e \qquad D=\{x\in R/x\geq$$

e, a seguir, passa a atribuir em uma tabela de valores, números inteiros de 0 a 4, expondo que

"Dei valores para x e esses valores são o domínio e achei os valores que são imagem

$D=\{0,1,2,3,4\}$ *e* $\mathrm{Im}=\{0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2$

• Outra situação que revela falta de significado de notações foi expressa pela dupla D, na questão 2a) escrevendo $D=\{x\in R\}$ para apresentar o domínio da função $g(x)=x+3$. Se esses alunos compreendessem que R representa um conjunto dos números reais teriam utilizado esta última notação, bem mais simples.

• A dupla L também apresenta esta dificuldade quando expõe: "A função *f* todos os R menores que o número 3, da função *g* todos os R."

✓ **Falta de clareza quanto ao traçado dos gráficos**: a grande maioria dos alunos até conseguem encontrar alguns poucos pares ordenados que o compõem os gráficos das funções, no entanto não conseguem esboçá-los por imaginarem que estes gráficos devam ser, quase que sempre expressos por retas que passam pela origem dos eixos cartesianos.

• Outro fator interessante é que ao serem solicitados a expressarem o porquê da função $f(x)=x^2$ e $g(x)=\sqrt{x}$ representar, em um domínio específico, uma o inverso da outra, a maioria das respostas afirmaram que sim, o que já havia sido dito no enunciado da questão, mas não explicitaram o porquê.

• As duplas D e E, interpretaram curiosamente, que a "bolinha aberta" do gráfico da função $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, representa o número zero (0). A dupla D expressou: "*Se diferem pois a imagem de f(x)= 0 e a imagem de g(x)=6*" e a outra, *"Porque numa o x faz a função com o 6 e na outra é o 0 que faz função com o 3".*

Uma vez que estes alunos encontram-se no Ensino Superior, fica evidente, nos mais variados itens, as dificuldades apresentadas em relação aos números, sua representação e suas propriedades intrínsecas como a ordem, a densidade e a continuidade bem, como as funções e ao traçado de seus gráficos.

Parece ser consenso entre os alunos que uma questão de Matemática precisa ser resolvida com um algoritmo. Manipulando, mesmo que por uma tabela de valores, dados numéricos. Isto se revela quando observamos que muitos alunos buscaram procedimentos mecânicos para expressarem os domínios e as imagens das funções e não interpretaram o resultado obtido na tabela de valores no momento de explicitá-los, deixando claro que os objetos domínio e imagem são totalmente desprovidos de significados.

Bibliografia:

ARTIGUE, Michèle. Ingéniere didatiques. **Rechercehs em Didatique des Mathématiques**. Grenoble. v.9, n.3, p. 281-308, 1988.

DUVAL, Raymond. Quel cognitive retenir en didatique des mathématiques? **Actes de la 8éme École de Didactique des Mathématiques – Saint-Sauves d'Auvergne**. Édition IREM de Clermont-Ferrand, 1995. p. 198-225.

DUVAL, Raymond. Registres de Representation Sémiotique et Fonctionnement Cognitive de la Pensée.In: IREM, 1993, Strasbourg .**Annales de Didactique et Sciences Cognitives**. v.5. IREM-ULP, Strasbourg, 1993. p. 37-65.

KIERAN, C. Teaching and Learning of School Algebra. **Handbook of Research on Mathematics teaching end Learning**. 1992. c.7.

Measuring The Mathematics Problem. Disponível em: **http://www.engc.uk/publication/pdf/mathsreport.pdf**. Acesso em: 23 nov. de 2003.

SILVA, B. A. (et all). Analyzing Functions' Behavior in a Computational Environment. In: 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, 2002, Hersonissos. **Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics** Hersonissos, Crete: University of Crete, 2002. CD-ROOM.

D	Questão 2a		Questão 2b
A	Função f $x-3>0 \Rightarrow x>3$ $x^2-9\geq 0 \Rightarrow x \geq \pm 3$ $D=\{x \in R / x>3\}$	Função g $x+3>0$ $x>-3$ $D=\{x \in R / x>-$	Em branco
B	Função f $D=x>3$	Função g $D=0$	Porque no primeiro gráfico o x vale 3 e no segundo o x vale 0.
C	Em branco		Em branco
D	Função f $Df(x)=x-3>0$ $=x>3$ $D=\{x \in R / x>3\}$	Função g $g(x)=R$ $D=\{x \in R\}$	Se diferem pois a imagem de f(x) = 0 e a imagem de g(x) = 6
E	$[-2,\infty[$		Porque numa o x faz a função com o 6 e na outra é o 0 que faz função com o 3
F	Em branco		Em branco
G	Em branco		Em branco
H	Função f $D=\{x \in R / x \neq 3\}$	Função g $D=\{x \in R / x \in$	Porque na função $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ quando x=3 não existe solução
I	Função f $D(f)=\{0,1,2,3,...\}$ atribuiu valores para confirmar os gráficos das duas funções	Função g $D(g)=\{0,1,2,3,.$	Porque no primeiro gráfico os intervalos são abertos e no segundo são fechados
J	Calculou valores pontuais no intervalo [-2,-1,0,1,2,3] para as duas funções; verificou que f não estava definida em x=3 $D(f)=\{-2,-1,0,1,2,3\}$ $D(g)=\{-2,-1,0,1,2,3\}$		Porque na primeira função o gráfico não existe no ponto 3. Ou seja, a função é aberta neste ponto e a segunda função existe no ponto 3 e é 6.
L	A função f todos os R menores que o número 3, da função g todos os R.		Porque x não pode ser igual a 3 quando o x estiver no denominador

Quadro 1: Respostas dos alunos referentes a Questão 2

	Questão 4a	Questão 4b	Questão 4c
A	D = R I = R	$g(x) \Rightarrow D = R_+^*$ $\operatorname{Im} = R$ $f(x) = D = R$ $\operatorname{Im} = R$	Atribui em uma tabela de valores os números 0 e 1. Para $f(x)=x^2$. Atribuiu, também, valores 1 e 4 para $g(x)=\sqrt{x}$. Descrição do Gráfico: duas retas passando pelos pontos demarcados.
B	Atribui em uma tabela de valores números inteiros de 1 a 4. D = {1,2,3,4} Im = {1,4,9,16}	Atribui na tabela de valores os números 4,9 e 16. D = {4,9,16} Im = {2,3,4}	Descrição do Gráfico: marcou corretamente, no eixo cartesiano, os pares ordenados obtidos nas duas tabelas de valores mas, não realizou a união dos pontos.
C	Atribui em uma tabela de valores números inteiros de 0 a 3. Domínio 0,1,2,3 e Imagem 0,1,4,9	Domínio 0,1,2,3	Não esboçou gráfico.
D	Atribui em uma tabela de valores números inteiros de 1 a 4. D = {1,2,3,4} Im = {1,4,9,16}	$y=\sqrt{x} \quad x \geq 0$ $D=\{x \in R / x \geq 0\}$ Atribuiu em uma tabela de valores números inteiros de 0 a 4. A seguir, escreveu: *"Dei valores para x e esses valores são o domínio e achei os valores que são imagem.* $D=\{0,1,2,3,4\}$ $\operatorname{Im}=\{0,1,\sqrt{2},\sqrt{3},2\}$".	Descrição do Gráfico: fez, corretamente, os gráficos de $f(x)=x^2$ e de $g(x)=\sqrt{x}$ mas, em planos cartesianos diferentes. Escreveu ao lado: *"Uma é inversa da outra."*
E	Em branco	Em branco	Em branco
F	Atribuiu em uma tabela de valores números inteiros de -1 a 3 substituindo-os em $y = x^2$ $D=\{-1,0,1,2,3\}$ $\operatorname{Im}=\{0.1.4.9\}$	Atribuiu em uma tabela de valores números inteiros de -1 a 3 substituindo-os em $y=\sqrt{x}$ $D=\{-1.0.1.2.3\}$ $\operatorname{Im}=\{0,1,1.4,1.7\}$	Em branco
G	Em branco	Em branco	Em branco
H	$D=\{x \in R / x = R\}$ $Im=\{y \in R / y \geq 0\}$	$Dm(g)=\{x \in R / x \geq 0\}$ $\operatorname{Im}(g)=\{y \in R / y \geq 0\}$	Esboçou corretamente, o gráfico das duas funções.
I	Atribui em uma tabela de valores números inteiros de -2 a 2, substituindo-os em $y = x^2$ $D=\{-1,0,1,2,3\}$ $\operatorname{Im}=\{0,1,4,9\}$	Em branco	Descrição do Gráfico: fez, corretamente, os gráficos de $y = x^2$ e não fez o da $g(x)=\sqrt{x}$
J	Atribui em uma tabela de valores números inteiros de -2 a 2, substituindo-os em $y = x^2$ $Dm(f)=\{-2,-1,0,1,2\}$ $\operatorname{Im}(f)=\{4,1,0,1,4\}$	Atribui em uma tabela de valores números inteiros de -2 a 3, substituindo-os em $g(x)=\sqrt{x}$. Apresentou o símbolo como correspondência ao -1. $D=\{-1,0,1,2,3\}$ $\operatorname{Im}=\{0,1,1.4,1.7\}$	Descrição do Gráfico: fez, corretamente, os gráficos de y = e de $g(x)=\sqrt{x}$. A seguir, explicitou: "1º onde tiver x substituo por y e y substituo por x; 2º isolar o y." $y=x^2 \Rightarrow x=y^2$ $\sqrt{x}=y \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x}$
L	$D=\{R\} e \operatorname{Im}=\{R^-\}$	$D=\{R^-\} e \operatorname{Im}=\{R^-\}$	"$f(x)=x^2$ e $g(x)=\sqrt{x}$, não sei". Se referindo a justificativa. Descrição do Gráfico: fez duas parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$ grafando $g(x)=\sqrt{x}$ nesta última.

Quadro 2: Respostas dos alunos referentes a Questão 4