RAZONAR CON LA COVARIACIÓN. UN ESTUDIO SOBRE LAS ESTRATEGIAS EN UN CURSO DE FORMACIÓN DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA

Jhony Alexander Villa-Ochoa
jhony.villa@udea.edu.co

Universidad de Antoquia, Colombia

Resumen

En la investigación internacional se han desarrollado constructos que sugieren acciones mentales, procesos cognitivos y de uso y significado en contextos profesionales y sociales que caracterizan los razonamientos, la modelación y comprensión de la covariación. Este documento ofrece parte de los resultados de un estudio que se propuso investigar las características del razonamiento que exhiben los estudiantes cuando resuelven tareas de modelación de la covariación en las que existe la necesidad de usar información de un contexto extra-matemático. Los resultados sugieren que una parte de los estudiantes se preocupa por determinar un "patrón" para dar sentido a una función como un modelo matemático. También se evidencia que durante su razonamiento utilizan casos particulares para interpretar relaciones entre cantidades como objetos multiplicativos; finalmente se ofrece evidencia de que el razonamiento de otros estudiantes tiene características deductivas; a partir de ello, la tasa de variación emerge de un proceso de interpretación y uso de modelos matemáticos previamente conocidos y como "un caso particular" en la aplicación de estos modelos.

Palabras clave: *razonamiento covariacional, currículo, formación de profesores*

Modelación en la perspectiva de la Educación Matemática

El desarrollo del pensamiento matemático es una de las metas para los currículos a nivel global. Este pensamiento involucra no solo la comprensión conceptual y operatoria sino también la capacidad de llevar a cabo procesos propios de la matemática, entre ellos, la modelación, comunicación, argumentación, planteamiento y resolución de problemas. La modelación se reconoce como un proceso que promueve relaciones entre la matemática y otros dominios sociales, de las ciencias y de la cotidianidad.

En una reciente revisión, Stillman (2019) informó que la modelación puede valorarse, desde un punto de vista, para la formación en matemática y, por otro, para la formación en ciudadanía. Con respecto al primer punto de vista, la autora afirma que la modelación puede considerarse un vehículo para la enseñanza de conceptos y procedimientos matemáticos; también para la enseñanza de modelos y de aplicaciones. En ese sentido, se puede promover las matemáticas como una actividad humana que permite atender a problemas de diferente naturaleza que den lugar a la aparición de conceptos, nociones y procedimientos. En el otro punto de vista, la autora señala que existen investigaciones que se han enfocado en ofrecer experiencias que posibiliten una educación para la vida después de la escuela; ello involucra el análisis de problemas sociales, la educación en valores, cuestionar el rol de los modelos matemáticos en la sociedad y el medio ambiente.

A partir de las investigaciones realizadas en el Grupo de Investigación MATHEMA-Formación e Investigación en Educación Matemática de la Universidad de Antioquia y la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática - RECOMEM (Rendón-Mesa, 2016; Rendón-Mesa, Duarte y Villa-Ochoa, 2016; Parra-Zapata y Villa-Ochoa, 2016; Parra-Zapata et al., 2018; Villa-Ochoa, 2016; Villa-Ochoa y Berrio, 2015) es posible reconocer la modelación como un ambiente en que se considera:

1. Las ideas fundamentales de las matemáticas y su relación con los contextos, significados y procedimientos a partir de los cuales se construyó.
2. El uso de datos *reales* que les permita a los estudiantes matematizar; es decir, plantear y representar relaciones entre los diferentes objetos y cantidades.
3. El diseño de ambientes de clase que promuevan la participación, discusión, razonamiento y la toma de decisiones de los aspectos relevantes en el contexto o situación a modelar.
4. Promover diferentes conocimientos (matemáticos y no matemáticos) sin que se subordinen entre sí. El uso de estos conocimientos debe emerger de la naturaleza de la situación estudiada y no como imposiciones *a priori*.
5. Una comprensión de los resultados que proporcionan los modelos como *no absolutos*; es decir, relativos al campo, condiciones y supuestos bajo los cuales se construyeron.
6. Promover un discurso en el aula que incluya argumentos matemáticos y que se fundamente en ideas y procedimientos matemáticos.
7. El vínculo directo y constante con expertos (profesionales en distintas áreas) que permiten, por ejemplo, dar sentido a los datos en el contexto *real* del problema y tener interpretaciones profesionales de los modelos.
8. La evaluación debe considerarse como un proceso formativo y expresado en diferentes medios, y que involucra tanto contenidos matemáticos como conceptos, técnicas y habilidades del contexto en el cual se modela y de la modelación misma.

Al igual que Rosa y Orey (2019), la modelación, vista como un ambiente, permite que el proceso de aprender matemáticas se relacione con la elaboración de conceptos matemáticos que ayudan a los estudiantes a construir conocimiento a partir de sus propios contextos, cultura, intereses y motivaciones para aprender. Para los autores, este enfoque desarrolla la autonomía de los estudiantes porque aprenden a elaborar sus propias estrategias para resolver los problemas que enfrentan en su vida diaria. En el caso particular de este estudio, se han diseñado ambientes implementados en el trabajo con estudiantes de licenciatura en matemáticas (futuros profesores). En ellos, el estudio de la variación ha sido un aspecto clave, por un lado, para promover el desarrollo de un pensamiento variacional; por otro, como una manera de promover experiencias que le permita a los estudiantes el reconocimiento de acciones, estrategias y tareas que apoyen su futuro desempeño profesional.

En coherencia con Romo-Vázquez, Barquero y Bosch (2019), en estos ambientes se generan condiciones para que los participantes puedan comprender el papel de la modelación en el aprendizaje de las matemáticas, pero también, para que puedan considerarlo como manera de desarrollar sus futuras prácticas como profesores. En este documento se ofrece un análisis de dos episodios extraídos de los ambientes implementados con estos estudiantes cuando resuelven tareas de modelación que involucran el estudio de la covariación.

La covariación y el razonamiento covariacional

En el ámbito internacional se ha recomendado el estudio y la modelación de fenómenos de variación y cambio como una manera de promover el desarrollo de un pensamiento variacional (Colombia-MEN, 2006), como base para una comprensión del cálculo (Carlson et al., 2003, Tall, 2009) y como un enfoque para las matemáticas escolares (Villa-Ochoa y Acevedo, 2019). Por tanto, el estudio y la modelación de fenómenos de variación no solo es un propósito para el desarrollo de los currículos de matemáticas, sino que también, ha sido un objeto de estudio para un sector de la investigación en Educación Matemática.

En Colombia, los currículos escolares de matemáticas deben promover "el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos" (Colombia-MEN, 2006, p. 66). En relación con el estudio del Cálculo, Tall (2009) puntualiza que la variación está en el corazón del análisis matemático y que es indispensable hacer énfasis en los procesos funcionales y dinámicos que subyacen en cada uno de los conceptos allí tratados. Por su parte, Rueda Rueda y Parada Rico (2016) recomiendan el uso de software como el Geogebra para el estudio de la covariación debido a las posibilidades que ofrece el software para coordinar magnitudes que covarían, la cantidad en que covarían y la comprensión de la tasa de variación media entre esas cantidades.

En el ámbito de la investigación, se ha desarrollado el constructo "razonamiento covariacional" (Thompson y Carlson, 2017). Uno de los orígenes de este constructo, tiene su fundamento en la noción de *covariacion* de Confrey y Smith (1995); los autores describieron el razonamiento a partir de la noción de covariación entre cantidades; es decir, el reconocimiento de patrón predecible o reconocible de la manera en que cambia una variable con los cambios de otra variable. Otro de los orígenes está en el razonamiento cuantitativo descrito en los trabajos de P. Thompson; de acuerdo con Thompson y Carlson (2017), en estos trabajos existe un interés por comprender cómo los estudiantes conciben situaciones, cantidades que se involucran y las relaciones entre cantidades cuyos valores varían y las formas en que los estudiantes conciben la tasa de cambio.

Carlson et al. (2003) desarrollaron un marco conceptual que se describe en cinco acciones mentales y cinco niveles de razonamiento; sin embargo, recientemente, Thompson y Carlson (2017) reorganizaron este marco a través de la distinción de dos tipos de imágenes de covariación; a saber, suaves (*smooth*) y en partes (*chunky*). Esta reorganización incluye dos marcos que explican los niveles de razonamiento variacional y covariacional de los estudiantes; en ellos, el razonamiento que involucra imágenes suaves se encuentra en los niveles más altos de cada marco.

Las tareas y el contexto

En el marco de este estudio se utilizó el concepto de tareas de modelación presentado por Villa-Ochoa, Castrillón-Yepes y Sánchez-Cardona (2017), los autores describen estas tareas "como un conjunto de textos, enunciados, situaciones, orientaciones o indicaciones que se organizan para "dar vida" a la modelación en la cotidianidad escolar" (p. 222). También se tiene en cuenta la noción de tareas de covariación que Villa-Ochoa y Acevedo (2019) presentaron para analizar una interpretación "dinámica" de las razones trigonométricas; para estos autores, son tareas que exigen el reconocimiento de patrones de los cambios de una cantidad sobre las demás cantidades involucradas en la tarea. En coherencia con estos planteamientos, una *tarea de modelación de la covariación* puede presentarse a través de enunciados que exigen el reconocimiento y la matematización de las relaciones entre cantidades a través de funciones; es decir, las funciones se constituyen en modelos matemáticos de relaciones entre cantidades que covarían.

En el estudio del cual se deriva este documento, se diseñaron diferentes tipos de tareas de modelación de la covariación; entre ellas, tareas realistas, de análisis de modelos y la realización de proyectos de modelación. Estas tareas se han implementado en cursos de formación de profesores de matemáticas en un programa de Licenciatura en Matemáticas en una universidad pública en Medellín-Colombia. En particular, los datos que se analizan en este documento se extrajeron de una experiencia desarrollada durante 2017 en un espacio denominado: Semillero de Investigación; en el espacio mencionado, también participaron dos profesores coordinadores del Semillero. En total la experiencia tomó cuatro horas de clase (dos sesiones de dos horas cada una). Los datos se extrajeron de las notas de campo de los investigadores y de grabaciones en audio.

De acuerdo con las ideas presentadas en el primer apartado de este documento, el ambiente de modelación no se limitó a la presentación del enunciado de la tarea que los estudiantes deberían realizar; más allá de ello, se ofreció la posibilidad para que los estudiantes buscaran en diferentes fuentes información necesaria para poder resolverla. En coherencia con ello, la experiencia inició con una descripción del proyecto desarrollado por estudiantes que participaron en el estudio reportado por Villa-Ochoa y Berrío (2015). Los profesores describieron el contexto en el que estos autores desarrollaron el proyecto de modelación y cómo en la delimitación del tema del proyecto, los estudiantes discutieron sobre variables que dependen de otras variables. Los profesores también comentaron que, entre varias opciones, una parte de los estudiantes decidió indagar si la inclinación de un terreno tiene repercusiones sobre la cantidad de árboles que se pueden sembrar. Después de la presentación de este contexto, los profesores presentaron el siguiente enunciado

"*Se tienen dos terrenos, uno plano y otro inclinado, suponga que se desea sembrar determinado tipo de planta (por ejemplo, arbustos de café) y determine si la inclinación del terreno tiene o no alguna implicación en la cantidad de árboles que caben en él*".

Inicialmente los estudiantes trabajaron en subgrupos, mientras los profesores del curso estaban atentos a las discusiones que se presentaban en ellos. Los profesores también estuvieron atentos a las opiniones, estrategias de solución, interpretaciones que consideraron relevantes para promover una discusión plenaria ante todo el grupo. En la primera parte, los estudiantes se comprometieron con la comprensión de la tarea y la construcción (o interpretación) del modelo matemático para determinar la cantidad de árboles en un terreno plano. En la segunda parte, al igual que los participantes de Villa-Ochoa y Berrío (2015), los estudiantes extendieron los modelos a los terrenos inclinados, compararon los resultados en ambos casos, y respondieron a la pregunta formulada en la tarea. Para dar sentido a los datos en términos del razonamiento, se segmentaron y analizaron los datos a partir de las descripciones del marco del razonamiento covariacional propuesto por Thompson y Carlson (2017). Con el ánimo de identificar cómo la modelación interviene en ese razonamiento, se buscaron evidencias sobre las acciones que realizaron los estudiantes y sobre el *porqué* y el *para qué* las realizaron.

Los resultados

Los resultados que se presentan en este documento se fundamentan en la primera parte de la tarea, es decir, en las acciones que realizaron los estudiantes para modelar la cantidad de árboles que caben en un terreno plano. Para enfrentar esta primera parte de la tarea, los estudiantes se propusieron reconocer las condiciones bajo las cuales se deben sembrar los árboles. Una pregunta recurrente entre los equipos, fue ¿Qué se debe tener en cuenta para sembrar los árboles? La respuesta a esta pregunta se deriva de la información propia de la agricultura. A partir de esta pregunta, dos tipos de estrategias pudieron reconocerse; la primera de ellas se desarrolló de un grupo a quienes los profesores explicaron las condiciones de sembrado rectangular (ver Figura 1). La segunda estrategia se derivó de los estudiantes que buscaron información en Internet y encontraron en el sitio web de Permacultura la distribución tres bolillos[2] y rectangular[3]; en la página también se encuentra los respectivos modelos matemáticos que se usan en cada tipo de sembrado. A continuación, se presentan las características del razonamiento de los estudiantes cuando buscaron describir y matematizar la covariación presente en esta primera parte de la tarea.

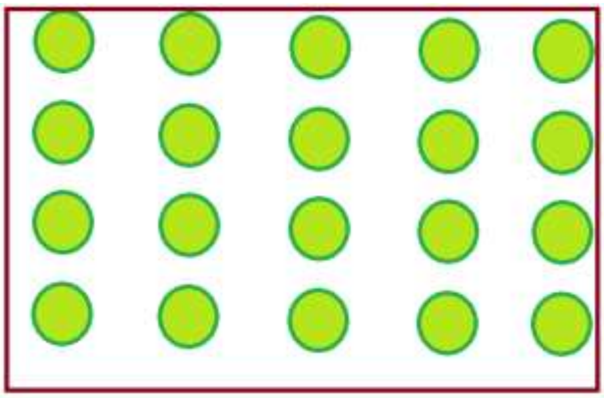

Figura 1. Ilustración sobre la distribución rectangular de arboles.

En la búsqueda de un patrón para el cálculo de árboles que se distribuyen de manera rectangular

Los estudiantes se comprometieron con la búsqueda de relaciones que le permitiera establecer la cantidad de árboles que cabrían según las dimensiones largo y ancho del terreno rectangular. En el siguiente comentario, Karla (seudónimo) explica el procedimiento realizado:

---

[2] https://www.permacultura.org.mx/es/herramientas/formulario/tresbolillo/

[3] https://www.permacultura.org.mx/es/herramientas/formulario/marco-en-calles/

Karla: (Grupo1) *En primer lugar, dibujamos cómo sería la distribución* [ver Figura 2] *e hicimos ejemplos concretos* [numéricos]*, por ejemplo, si el ancho del terreno es 50 metros, la copa del árbol es de 1.5 metros de diámetro y la calle* [distancia entre los tallos de dos árboles sobre la fila] *es de 50 centímetros, entonces todo va a depender de la distancia que dejemos en los extremos. Nosotros supusimos que entre los dos extremos también daba 2 metros. Así nos quedaba más fácil para ver* [encontrar] *la relación. Entonces vimos que dividíamos el ancho* [50 m] *entre 2 metros y nos dio 25; eso quiere decir cabrían 25 árboles a lo ancho. Luego a lo largo se hace lo mismo, se divide el largo con el valor de la copa más el puente* [distancia entre los tallos de dos árboles sobre la columna].

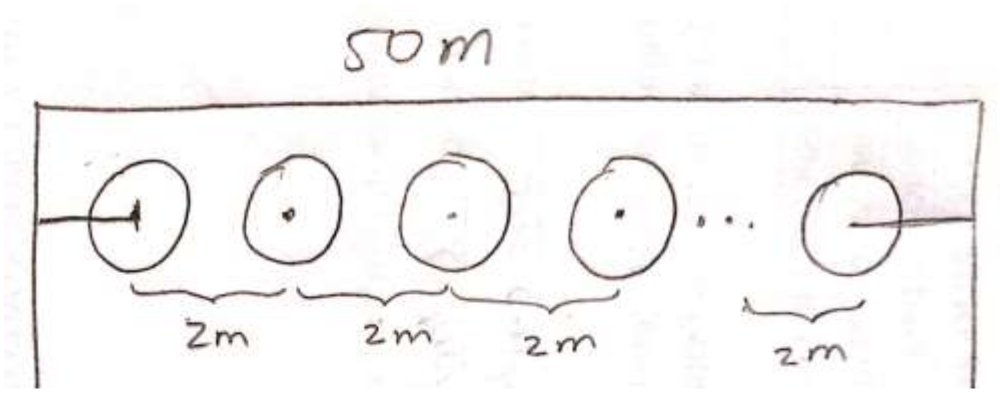

Figura 2. Esbozo de la distribución de árboles en un ancho de dimensión 50 metros

Una vez finalizada la intervención de Karla, uno de los profesores la interpeló para preguntarle, *¿y que pasa si las [suma de las] distancias en los extremos no da 2 metros*? A lo que Juan, otro compañero del equipo, respondió, "*alteraría el modelo y tendríamos que analizar, porque lo que sí es cierto, es que debe quedar una distancia entre el árbol y el borde del rectángulo, porque si no, no se podría recoger cosecha*".

Varios aspectos se pueden rescatar en la estrategia usada por el equipo de Karla. En primer lugar, se resalta que los estudiantes buscaron información que les permitiera comprender la tarea. El esbozo [Fig. 2] y la solución de casos numéricos particulares les permitió reconocer la relación el ancho y la distancia entre tallo y tallo para calcular la cantidad de árboles. Por un lado, este hecho se puede interpretar como una estrategia para identificar la relación numérica entre las cantidades, pero por otro, como una manera de evocar un razonamiento de tipo inductivo a través del cual se infiere la relación entre cantidades variables.

El hecho que los estudiantes hayan esbozado un caso particular como *ejemplo* [ver segunda línea descripción de Karla] sugiere que los estudiantes *a priori* reconocen la existencia de una relación funcional entre las cantidades y *razonan* con el fin de conocerla algebraicamente. En este esfuerzo buscan en los "casos particulares" una forma de "operar con números" para comprender "las relaciones entre cantidades variables". Si bien estas acciones pueden asociarse con el nivel de *coordinación de valores* (Thompson y Carlson, 2017), también es posible interpretar este hecho como una acción producto del esfuerzo por identificar la expresión algebraica de "un patrón" previamente existente.

Otro hecho que se puede resaltar radica en que los estudiantes lograron reconocer en el cociente a/c la presencia de una "nueva" cantidad denominada *cantidad de árboles que caben en el ancho del terreno*. Los estudiantes señalaron que el mismo razonamiento se podría extender para calcular la cantidad de árboles en el largo del terreno. Con base en estos dos datos señalaron "*Ya con estos datos multiplicamos y tenemos la cantidad de arboles en el terreno*" [Karla cuando finalizó su presentación ante el grupo]. Después de esta intervención, los estudiantes señalaron que obtuvieron el siguiente modelo:

$C = (a/c)\ (l/p)$

En donde:

C: cantidad de árboles en el terreno

a: medida del ancho del terreno

l: medida del largo del terreno

c (calle): distancia entre los tallos de dos árboles sobre la fila

p (puente): distancia entre los tallos de dos árboles sobre la columna.

El reconocimiento de esta "nueva" cantidad es evidencia de una característica del razonamiento covariacional denominada *objeto multiplicativo*. Para Thompson y Carlson (2017), la relación entre los valores de cantidades individuales como un objeto multiplicativo implica transformar cantidades individuales para crear una nueva cantidad conjunta que comprenda las cantidades individuales. Una interpretación de la manera en que los estudiantes llegaron a este objeto multiplicativo fue a través de la "ejemplificación" de "casos numéricos particulares". Otro de los aspectos a resaltar es la naturaleza de la expresión $C = (a/c)\ (l/p)$. Si bien puede considerase como una función que representa la covariación entre C y las demás cantidades (dependiendo del caso algunas serían constantes) no se encontró evidencia de su construcción como covariación en los términos de Confrey y Smith (1995); más allá de ello, las descripciones de los estudiantes sugieren una "aplicación automática" de la "fórmula" del área de un rectángulo para calcular la cantidad de árboles total en el terreno; esto puede deberse a la "necesidad" que sintieron de enfocarse en la búsqueda del modelo para el cálculo de la cantidad de árboles, en sus palabras "para saber si la inclinación tiene un efecto en la cantidad de árboles, debemos conocer como calcular la cantidad de árboles [que caben el terreno]"[Karla frente a la pregunta, ¿Por qué decidieron buscar la fórmula?].

Información proporcionada en Internet

Conforme se mencionó anteriormente, otro grupo de estudiantes se comprometió con la búsqueda de información en Internet. En la Figura 3 se ilustra los detalles de la distribución de árboles en el cultivo, el modelo matemático dado, y la calculadora ofrecida por la aplicación web. Después de su hallazgo, los estudiantes comenzaron a ingresar datos en la calculadora web para determinar la cantidad de árboles dependiendo que cabrían acorde con el área del terreno. A partir de allí, se esforzaron por "darle sentido" a la expresión n = Su/(M*m) (ver Fig. 3). Para ello, se apoyaron de la distribución de los árboles ofrecida en la Fig. 3 y realizaron cálculos para verificar si los resultados de sus cálculos a lápiz y papel coincidían con los resultados en la calculadora web. Posterior a ello, Camilo (Grupo 2) ofreció el siguiente comentario:

Camilo: (Grupo2)	*En la imagen se muestra que la distancia entre árboles es 7 metros y por el otro lado 3 metros. Pensamos en que esos valores son constantes cuando tenemos un cultivo fijo. Entonces la fórmula sería n sería igual a superficie dividido 21 metros [cuadrados]; y eso nos serviría para cualquier terreno que tenga ese mismo tipo de árboles.*

El comentario de Camilo, como representante del grupo 2, evidencia un razonamiento de tipo deductivo a partir del cual establecen el modelo $C(A) = A/21$. Para este grupo de estudiantes, la cantidad 1/21 aparece como "un valor particular" que resulta de hacer constante algunas cantidades en el modelo. Sin embargo, aun no aparece evidencia de una interpretación como constante de proporcionalidad entre $C(A)$ y A. Frente a ello, uno de los profesores cuestionó al grupo frente al significado de 1/21, a lo que Mariana (integrante del grupo 2) respondió: "sería el valor cuando el área es 1 [$C(1)$] …. Quiere decir que 1/21 árboles por metro cuadrado [árbol/metrocuadrado]".

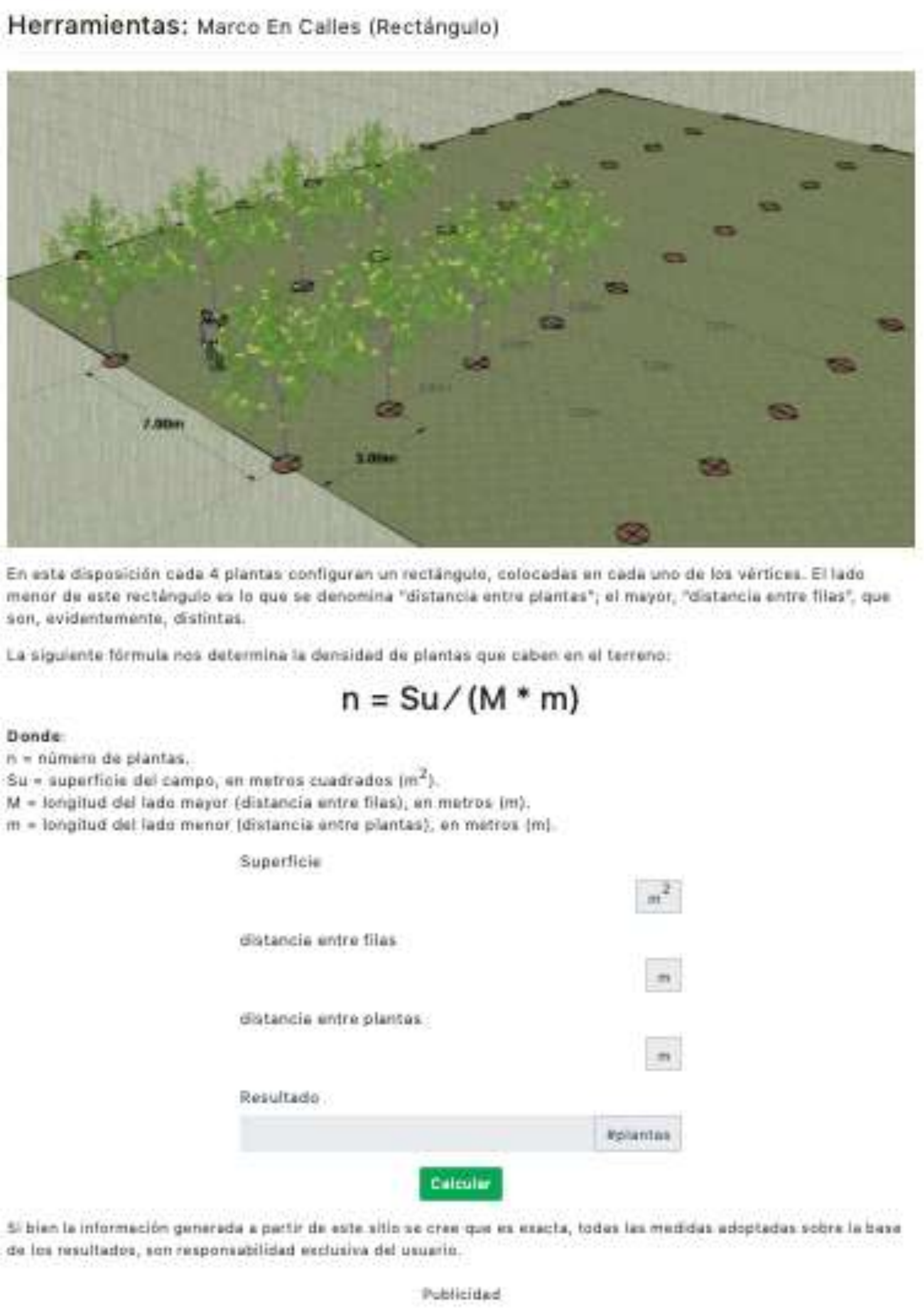

Figura 3. Imagen de la aplicación web: Permacultura

La presencia de los modelos como “expresiones matemáticas dadas” por la aplicación hizo que los estudiantes se comprometieran con casos particulares para comprender y usar los modelos. A partir de ello, el razonamiento fue deductivo. El reconocimiento de cantidades constantes hizo que la razón de cambio emergiera bajo una interpretación de un área particular y no como una constante de covariación entre las dos cantidades.

Consideraciones finales

La modelación de la covariación se reconoce como un proceso importante para otorgar significados al concepto de función; también se reconoce como una base para una comprensión dinámica del cálculo. Una parte significativa de la investigación sobre el razonamiento que se implica en la solución de tareas de covariación ha estado centrada en las acciones y procesos mentales que desarrollan los estudiantes cuando modelan la covariación; en estas tareas, la presencia de información del contexto extra-matemático es reducida.

En el presente estudio, se utilizó un tipo de tarea de modelación realista (Villa-Ochoa et al., 2017) que se adaptó de los resultados de un proyecto de modelación matemática. Para resolver la tarea los estudiantes se vieron en la necesidad de obtener información del contexto extra-matemático para comprender la tarea. Los primeros análisis de los datos permiten colegir que esta búsqueda de información pudo desencadenar dos tipos de razonamiento en los estudiantes; por un lado, un razonamiento de tipo inductivo en la que se encuentran indicios de una comprensión de una cantidad como objeto multiplicativo (Thompson y Carlson, 2017); pero también aparece una función como una "aplicación directa" de una fórmula previamente conocida. Por otro lado, la presencia de los modelos en la aplicación web hizo que la tarea se orientara más hacia el tipo "uso y análisis de modelos" (Villa-Ochoa et al., 2017); a partir de ello, se observaron características de un razonamiento deductivo en el cual la tasa de variación emergió como "un caso particular" del modelo previamente constituido. Esta interpretación de la tasa de variación parece ser diferente de las maneras en que emerge en los trabajos sobre razonamiento covariacional que se fundamentan en Confrey y Smith (1995).

Referencias

Carlson, M. P., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2003). Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista Ema*, *8*(2), 121–156.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 26(1), 66–86.

Colombia-MEN. (2006). *Estándares Básicos de Compentencias en Matemáticas*. Bogotá: Magisterio

Parra-Zapata, M. M., Rendón-Mesa, P. A., Ocampo-Arenas, M. C., Sánchez-Cardona, J., Molina-Toro, J. F., & Villa-Ochoa, J. A. (2018). Participación de profesores en un ambiente de formación online. Un estudio en modelación matemática. *Educación Matemática*, *30*(1), 185–212. https://doi.org/10.24844/EM3001.07

Parra-Zapata, M. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Interacciones y contribuciones. Formas de participación de estudiantes de quinto grado en ambientes de modelación matemática. *Actualidades Investigativas en Educación*, *16*(3), 1–27. https://doi.org/10.15517/aie.v16i3.26084

Rendón-Mesa, P. A., Duarte, P. V. E., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: componentes de un proceso de modelación matemática. *Revista de La Facultad de Ingenieria U.C.V.*, *31*(2), 21–36.

Rendón-Mesa (2016). *Articulación entre la matemática y el campo de acción de la ingeniería de diseño de producto: aportes de la modelación matemática*. Tesis de Doctorado (no publicada). Doctorado en Educación, Facultad de Educación, Medellín: Universidad de Antioquia.

Romo-Vázquez, A., Barquero, B., & Bosch, M. (2019). El desarrollo profesional online de profesores de matemáticas en activo: una unidad de aprendizaje sobre la enseñanza de la modelización matemática. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 161–183. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.09

Rosa, M., & Orey, D. C. (2019). Mathematical modelling as a virtual learning environment for teacher education programs. *Uni-pluriversidad*, *19*(2), 80–102. https://doi.org/10.17533/udea.unipluri.19.2.04

Rueda Rueda, N., & Parada Rico, S. (2016). Razonamiento covariacional en situaciones de optimización modeladas por Ambientes de Geometría Dinámica. *Uni-pluriversidad, 16*(1), 51-63. Recuperado de http://aprendeenlinea.udea.edu.co/revistas/index.php/unip/article/view/326184

Stillman, G. A. (2019). State of the Art on Modelling in Mathematics Education—Lines of Inquiry. In *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp. 1–20). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_1

Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM - Mathematics Education*, *41*(4), 481–492. https://doi.org/10.1007/s11858-009-0192-6

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation and functions: Foundational ways of mathematical thinking. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 421–456). Reston, VA: NCTM.

Villa-Ochoa, J. A., & Berrío, M. J. (2015). Mathematical Modelling and Culture: An Empirical Study. In G. A. Stallman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice, International Perspectives on the Teaching and Learning* (pp. 241–250). Cham: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_19

Villa-Ochoa, J. A. (2016). Aspectos de la modelación matemática en el aula de clase. El análisis de modelos como ejemplo. In J. Arrieta & L. Diaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación de la matemática educativa* (pp. 109–138). Barcelona: Gedisa.

Villa-Ochoa, J., Castrillón-Yepes, A., & Sánchez-Cardona, J. (2017). Tipos de tareas de modelación para la clase de matemáticas. *Espaço Plural*, *18*(36), 219-251.

Villa-Ochoa, J. A., & Tavera Acevedo, F. (2019). La covariación en las tareas de los libros universitarios de precálculo: el caso de las razones trigonométricas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *33*(65), 1379–139