EL PAPEL DE LOS PROBLEMAS DE MODELACIÓN EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

María Trigueros Gaisman
trigue@itam.com

Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM), México

Resumen

La perspectiva de modelación consiste en un acercamiento didáctico en el que se introduce nuevo conocimiento matemático a través del trabajo colaborativo de los alumnos en la solución de problemas reales o realistas que sean de su interés. Esta estrategia de enseñanza se suma a los enfoques de resolución de problemas, pero al presentar problemas más abiertos que demandan exploración e investigación, amplía el reto para los alumnos. Esta estrategia de enseñanza permite acercarse al conocimiento matemático de los alumnos y abrir oportunidades de nuevos aprendizajes. La investigación en Educación Matemática reporta criterios que permiten diseñar problemas de modelación efectivos para ser utilizados en el aula y en algunos estudios se sugiere su uso conjuntamente con actividades didácticas que apoyen la reflexión de los alumnos sobre la necesidad de nuevos conceptos matemáticos en su solución. En esta conferencia discutiremos tanto los elementos que deben tomarse en consideración al diseñar y utilizar este tipo de problemas en el nivel de la escuela secundaria. Mostraremos algunos ejemplos de problemas de modelación y de actividades de reflexión que los han acompañado al introducirlos en el aula y que se han investigado en detalle en el marco de un proyecto de investigación. Se presentarán los resultados obtenidos en las investigaciones en términos de la motivación y del aprendizaje de los alumnos. Terminaremos con una reflexión acerca de las bondades, los retos y limitaciones del uso de esta perspectiva en la enseñanza secundaria.

Palabras clave: *Problemas de modelación, estrategia didáctica, aprendizaje, secundaria.*

Introducción

Los resultados de las investigaciones recientes ponen de manifiesto que, aunque los cambios de la enseñanza tradicional hacia una enseñanza más participativa de las Matemáticas acontecen lentamente, es posible observar cada vez con mayor frecuencia un interés de los profesores por una enseñanza más participativa en la que se trabaja en problemas relacionados con el mundo de los estudiantes y en el que el maestro actúa como un guía y un promotor de las discusiones de los alumnos.

El contexto en el que se enseñan las matemáticas tiene un peso muy fuerte en su aprendizaje. Cuando los conceptos se enseñan de manera abstracta, con énfasis en la operatividad más que en la comprensión, el conocimiento queda encapsulado y es difícil aplicarlo a situaciones distintas a las del contexto del aula; la transferencia del conocimiento no se da por sí sola. El reto del uso de problemas de modelación en la enseñanza intenta romper con la separación entre el aprendizaje de conceptos abstractos y su aplicación a través de enfrentar a los alumnos a situaciones que los motiven, les representen un reto y puedan utilizar sus conocimientos previos, relacionarlos y enfrentar la necesidad de nuevos conocimientos para encontrar soluciones adecuadas que además podrán ser útiles en la solución de nuevos problemas (i.e. Kaiser & Maaß 2006; Busee, 2011; Trigueros & Bianchini, 2016). Los alumnos logran además construir una visión de las matemáticas más cercana al trabajo propio de los matemáticos (Trigueros 2009).

La introducción de una nueva metodología de enseñanza representa un reto para los maestros. Es difícil adaptarse a ello. La investigación en enseñanza de las matemáticas ha propuesto diversas formas de apoyar a los alumnos para que aprendan matemáticas de manera más efectiva, entre ellas, el uso de problemas de modelación es una opción que puede utilizarse ya sea de manera continua o en forma ocasional de acuerdo a los temas a tratar y a las necesidades de los alumnos. Esta metodología permite al maestro acercarse a la forma en que los alumnos utilizan sus conocimientos, a sus dudas y a sus estrategias frente a una situación nueva que pone al maestro en una posición en la que cuenta con información relevante para proponer nuevas preguntas, responder algunas dudas y así promover el aprendizaje de los alumnos (Carlson, Larsen & Lesh, 2003).

La posibilidad de incorporar problemas que tienen su origen en otras disciplinas juega un papel importante en la posibilidad de aplicación de las matemáticas escolares en contextos diferentes. Brinda también oportunidades para que los alumnos reflexionen sobre la estructura de las matemáticas y para que exploren problemas que la comparten. El conocimiento de los alumnos de esa estructura puede conduciros a descubrir ideas poderosas de las matemáticas que permiten resolver de la misma manera problemas que en apariencia son diferentes, pero que comparten justamente la estructura matemática. Desde hace muchos años, diversos investigadores han propuesto la idea de introducir las Matemáticas en la escuela a través de problemas de modelación de problemas reales o ficticios que planteen un reto a los alumnos y que al mismo tiempo no representen una dificultad imposible de salvar i.e. (Trigueros, M. 2009; Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman, G., 2011; Lesch & English, 2005).

Uno de estos acercamientos es la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh & Doerr, 2003). En ella se postula que el uso de este tipo de retos permite la construcción de nuevo conocimiento a través de la interacción de los alumnos y de la guía efectiva del maestro. Esta perspectiva introduce, además, una serie de criterios que permiten al investigador o al maestro determinar si un problema puede resultar o no efectivo en la promoción del conocimiento en el aula y, a través de ciclos de modelación, abre al maestro y a los investigadores la posibilidad de analizar el conocimiento que los alumnos ponen en juego en su trabajo con el problema: desde la exploración del mismo, hasta el uso de las matemáticas para trabajar con él y el desarrollo de productos en los que comunican sus resultados.

El uso de modelos en el aula de Matemáticas permite al maestro y a los investigadores determinar qué conocimientos previos ponen en juego los alumnos, como los relacionan y diagnosticar con ello sus posibles dificultades. A través de los distintos ciclos de exploración y de trabajo con el modelo, los alumnos tienen múltiples oportunidades de interpretación de diversos fenómenos y de reflexión sobre sus características más sobresalientes, pueden utilizar las Matemáticas como herramienta de predicción y, en casi todas las situaciones, tendrán necesidad de nuevos conocimientos matemáticos, de la búsqueda y uso de datos y de apoyarse en una variedad de tecnologías para poder trabajar eficazmente en la solución del problema de interés aprovechando las características de los modelos matemáticos planteados.

Los modelos a utilizar pueden provenir de distintas disciplinas, lo que brinda al maestro la oportunidad, mencionada anteriormente, de relacionar las disciplinas y de enfatizar cómo distintos problemas pueden ser abordados mediante modelos semejantes. Los modelos dejan de ser únicamente una herramienta matemática poderosa de solución de problemas para ser además una herramienta valiosa en la toma de decisiones.

En el contexto de la modelación, el uso de proyectos es particularmente interesante pues, al trabajar con un mismo problema durante varias sesiones de clase y mediante trabajo fuera del aula, se ofrece a los múltiples de reflexionar sobre sus estrategias de modelación y de trabajo matemático con el modelo. En los proyectos es posible también aprovechar la situación para introducir y desarrollar técnicas importantes, necesarias en la solución de una gran diversidad de problemas reales. Entre ellas podemos mencionar a la aproximación, el cálculo de parámetros, la creación de nuevas herramientas de análisis, el uso de una gran variedad de fuentes de información y el uso de una gran variedad de recursos, entre otras. La comunicación de los resultados de estos proyectos hace posible que los alumnos desarrollen su creatividad y utilicen sus habilidades artísticas, literarias, musicales, técnicas o científicas de formas novedosas e interesantes para ellos y para sus compañeros. En el proceso de trabajo y comunicación del proyecto los alumnos aprenden las matemáticas de interés.

En este artículo presentaremos algunas ideas teóricas que juegan un papel importante en el diseño de actividades de modelación adaptadas a distintos niveles educativos, en particular, a la secundaria. En particular se centra la atención en dos perspectivas teóricas y su posible articulación: Modelos y modelación (Lesh y Doerr, 2003) y la Teoría APOE (Arnon et, al. 2014). Se mostrarán dos ejemplos de problemas de modelación que han sido empleados en el aula y los resultados del análisis de los datos obtenidos en cada caso haciendo énfasis en algunas características de los problemas de modelación que se pueden utilizar en la enseñanza de matemáticas en el nivel de secundaria. En la descripción se mostrará, además, cómo el diseño de actividades basado en una teoría cognitiva de aprendizaje permite potenciar y dirigir la reflexión de los alumnos sobre las matemáticas involucradas en su trabajo en el modelo. Por último, se presentarán los resultados obtenidos en cada uno de los casos y se discutirán algunas bondades y limitaciones del uso de problemas de modelación en el aula en relación con el aprendizaje de los alumnos.

Modelos y modelación

Modelos y Modelación es un acercamiento conceptual que propone que el aprendizaje puede desarrollarse a partir del trabajo que hacen los alumnos para describir el comportamiento de una situación en un contexto real o realista que les permita utilizar aquello que han aprendido con anterioridad para desarrollar un modelo con el que pueden responder preguntas relacionadas con la situación. El trabajo en el modelo puede requerir además el uso de nuevo conocimiento que puede construir mediante el trabajo en equipo y en discusión con el maestro (Lesh & Doerr, 2003, Lesh & English, 2005). El trabajo que se desarrolla con esta perspectiva incluye el postulado de un conjunto de principios que el modelo a utilizar debe satisfacer para poder aplicarse exitosamente en el aula (Lesh, Hoover, Hole, Kelly & Post, 2000):

Principio de realidad: El problema debe estar basado en una situación real o realista que tenga sentido para los alumnos.

Principio de construcción del modelo: El problema debe diseñarse para promover el desarrollo de un modelo. Debe considerar elementos para operar con, relaciones entre esos elementos y patrones y reglas que gobiernan la situación que los alumnos están modelando.

Principio de auto- evaluación: Los alumnos deben poder verificar su progreso y examinar si los modelos propuestos describen la situación que están modelando.

Principio de documentación: Los alumnos deben ser capaces de registrar su proceso de pensamiento mediante la presentación escrita de sus supuestos y modelos en términos verbales y matemáticos.

Principio de generalización de los constructos: El modelo desarrollado debe poder generalizarse y usarse en otra situación o problema. Debe convertirse en una nueva manera de pensar que los alumnos pueden aplicar a otros problemas y ser útil como una nueva herramienta de análisis.

Principio de simplicidad: El problema debe representar un reto para los alumnos, pero no debe ser tan complicado que no permita que los alumnos lo analicen.

La teoría APOE y su relación con Modelos y modelación

La teoría APOE utiliza elementos de la epistemología genética de Piaget que se consideran indispensables en la construcción de los conceptos matemáticos para definir las estructuras que forman la parte central de la teoría (Dubinsky y McDonald, 2001). Esta teoría se desarrolló para comprender cómo se aprenden las matemáticas. Sus principales estructuras son las Acciones, los Procesos, los Objetos y los Esquemas. La construcción de esas estructuras se lleva a cabo mediante el mecanismo de abstracción reflexiva que en la teoría se identifica con los mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación y tematización (Arnon et. al., 2014).

Las Acciones son transformaciones de objetos que los estudiantes perciben como externas o como un algoritmo a seguir. Las Acciones pueden ser muy limitadas, pero son cruciales en la construcción de un concepto. Un Proceso se construye cuando los estudiantes repiten estas Acciones y reflexionan sobre ellas. De esta manera se forma una construcción interna que ejecuta las mismas acciones pero que el individuo ha hecho suyas. Diferentes Procesos pueden coordinarse en nuevos Procesos. La construcción de un Objeto se lleva a cabo cuando un estudiante reflexiona sobre las Acciones que se pueden aplicar a un Proceso y lo concibe como un todo, es decir, cuando considera al Proceso como una transformación global. Los Esquemas se describen en la teoría como una colección de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas relacionados entre sí que el estudiante utiliza cuando enfrenta un problema matemático.

Cuando un Esquema se desarrolla y sus elementos son coherentes entre sí, puede tematizarse, en este caso es posible que el estudiante lo utilice como un Objeto sobre el cual puede hacer nuevas Acciones.

Un elemento fundamental en esta teoría es el modelo conocido como descomposición genética. Este modelo describe de manera minuciosa las construcciones que los investigadores consideran necesarias para aprender un concepto matemático. El modelo permite, por una parte, diseñar propuestas didácticas e instrumentos de investigación y, por otra parte, llevar a cabo un análisis de los datos recabados en la investigación de manera objetiva. La descomposición genética debe probarse experimentalmente y dependiendo de los resultados obtenidos puede refinarse para dar cuenta de ellos o validarse si no es necesaria a refinación. La descomposición genética no pretende describir la única forma en que un concepto puede construirse. Distintas descomposiciones genéticas sobre un mismo concepto pueden coexistir. Lo que es importante es que se demuestre experimentalmente que los estudiantes ponen en juego esas construcciones en la solución de los problemas matemáticos de interés relacionados con el esquema.

En APOE se considera que la tendencia general del estudiante a utilizar las estructuras de la teoría, cuando trabaja con una serie de situaciones relacionadas con una noción matemática específica, es diferente dependiendo del tipo de estructuras que muestra en su trabajo. Estas diferentes posibilidades se relacionan con el paso del estudiante de un nivel de conocimiento a otro, es decir, con su aprendizaje.

La modelación como estrategia de aprendizaje puede describirse en términos de las estructuras de la teoría APOE: Al enfrentar un problema real o realista, los estudiantes utilizan los Esquemas que han construido en el contexto de las matemáticas y otros Esquemas que han construido en otras asignaturas o en otros dominios para trabajar la situación problemática que enfrentan. Los estudiantes usan estos Esquemas en el proceso de selección de variables, en el proceso de establecer relaciones entre ellas y en la coordinación de estos procesos y Esquemas para llegar a lo que puede considerarse como la matematización de la situación problemática. De esta manera desarrollan un modelo que se encapsula en un Objeto. Los estudiantes hacen Acciones y Procesos sobre el modelo para analizarlo, determinar sus propiedades y para proponer nuevas preguntas. Es necesario que los estudiantes construyan nuevos Esquemas para responder a las preguntas que la situación problemática de modelación plantea. Estos nuevos Esquemas se usan para modificar, ampliar y analizar el modelo y para proponer nuevas preguntas.

La teoría APOE propone una metodología de investigación y propone también una metodología de enseñanza: el ciclo ACE en el que los estudiantes trabajan colaborativamente sobre actividades (A) didácticas diseñadas mediante la descomposición genética, discuten en grupo completo con la guía del maestro (C) y trabajan en Ejercicios que el maestro deja como tarea. El uso de modelos en la enseñanza de las matemáticas cuando se utiliza la teoría APOE.

Desde el punto de vista teórico, Modelos y Modelación y la teoría APOE postulan formas de construcción del conocimiento. Es posible entonces proponer una posible coordinación entre ellas considerando que el trabajo sobre el problema original permite poner en juego un modelo matemático sobre el cual pueden hacerse dos tipos de actividad, una que permite analizar, desarrollar y validar el modelo matemático y otra en la que las Acciones sobre el modelo matemático, libres o guiadas mediante actividades, pueden ser complementadas mediante actividades específicas diseñadas en términos de una descomposición genética. Estos dos tipos de actividad se pueden ir intercalando en ciclos en los que la modelación da lugar a la necesidad de reflexión y a la construcción de las estructuras necesarias para el aprendizaje de los nuevos conceptos y éstos permiten mirar el trabajo sobre el modelo desde una perspectiva distinta que lo hace evolucionar. Desde el punto de vista metodológico la Modelos y Modelación puede utilizarse para validar el funcionamiento de la situación planteada en términos la promoción de nuevo conocimiento mientras que APOE puede utilizarse para analizar las construcciones de los alumnos y cómo podrían relacionarse con nuevas actividades que promuevan la construcción del conocimiento de interés pues, de acuerdo a esta teoría, el uso de conocimiento previo no es suficiente para garantizar la construcción de nuevos conocimientos. Los ciclos de enseñanza e investigación de APOE se insertan, además, de manera natural en los ciclos de modelación previstos por Modelos y Modelación. Y así, ambas teorías pueden ampliar sus fronteras para plantear nuevas propuestas didácticas y de investigación.

A continuación, se ejemplifican un par de problemas de modelación, uno de los cuales se trabajó como un proyecto, que han sido empleados en el aula y cuyos resultados han sido investigados, aunque no necesariamente publicados con anterioridad.

Una decisión importante

En una clase de Matemáticas con alumnos de 3º de secundaria, alumnos de alrededor de 15 años de edad, el plan de estudios de la materia proponía la necesidad de establecer relaciones entre distintos conceptos estudiados. En ese contexto se diseñó una actividad de modelación para los alumnos con el objetivo de que utilizaran sus conocimientos sobre semejanza de triángulos y sobre funciones. El problema presentado a los alumnos es el siguiente:

El señor López tiene un terreno en un acantilado que da al mar. Quiere construir en él un hotel. El terreno tiene una forma complicada, que se muestra en la figura que representa una vista del terreno desde arriba. El dueño del terreno no se decide sobre la forma de colocar un edificio de planta rectangular que aproveche mejor la posible vista al mar. Lo discutió con su hija Inés y decidieron solicitarnos ayuda para tomar una mejor decisión.

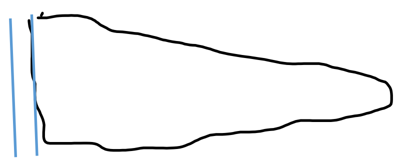

Figura 1. Forma del terreno a considerar

Reúnete con dos compañeros. Exploren y analicen la situación y respondan ¿Qué datos les pedirían y qué les sugerirían a Inés y al señor López?

Todos los alumnos asociaron al terreno una forma triangular. Utilizaron distintos tipos de triángulo, los más frecuentes, isósceles y rectángulos, aunque posteriormente los isósceles se convirtieron en triángulos rectángulos en distintas posiciones que intentaron comparar. Al discutir intentaron comparar el área de los rectángulos y surgieron comentarios acerca de cómo sería más conveniente dibujar el rectángulo dentro del terreno. Después de este trabajo discutieron y decidieron que era importante contar con más datos sobre el terreno, por ejemplo *"¿Cuál es su área? ¿Cuánto mide lo que da a la carretera? ¿Cuánto mide cada uno de los lados?"* En cuanto a un primer ciclo emergen dos sugerencias: *"Pondríamos el rectángulo pegado a la carretera, así queda más fácil para entrar y salir"* y *"Si se coloca el rectángulo del plano del hotel horizontalmente se aprovecha mejor la vista al mar"*.

Después de la discusión de estas posibilidades con todo el grupo y el maestro, los alumnos decidieron que sería conveniente pensar en colocar el rectángulo horizontalmente y que sería conveniente que el rectángulo fuera lo más grande posible para que fuera un buen negocio. El plano para el hotel que surgió de esta discusión y con el que continuó el trabajo de todo el grupo fue semejante al que se muestra en la figura 2:

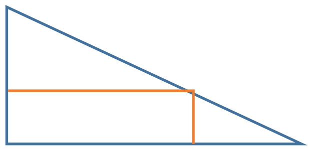

Figura 2. Modelo geométrico del problema

La maestra ofreció en este momento las dimensiones del terreno que solicitaron a Inés: La longitud de la base es de 150m, y el lado que da al camino es de 75m.

La maestra proporcionó además a los alumnos algunas actividades diseñadas con base en la descomposición genética para apoyarlos. Ejemplos de esas actividades son:

¿Cuántas maneras de dibujar el rectángulo pueden encontrar? _______________

Observen la figura y anoten las características que les parezcan relevantes ______________

El objetivo de estas actividades tenía la intención de que los alumnos fijaran su atención en las matemáticas del problema y hagan Acciones sobre los elementos de la figura para obtener algunas relaciones entre ellos.

El siguiente diálogo ejemplifica la discusión de los alumnos:

A1: Se forman dos triángulos adentro del triángulo grande

A2: Sí y el rectángulo si lo dejamos pegado a la hipotenusa se puede poner de distintas maneras, así, moviendo este vértice (el vértice que toca la hipotenusa del triángulo) ¿Cuál puede convenir más?

A3: Yo creo que necesitamos el más grande, con más área. Ese conviene más. Lo que sobre pueden ser jardines y otras cosas así.

A1; ¿Ven estos triángulos? Los tres que se ven son triángulos semejantes. Podemos ver cómo son.

A3: Sí, pero tenemos que ver su área. Si movemos el vértice no es tan fácil saber dónde ponerlo para que el área del rectángulo, base por altura, sea la más grande....

La discusión condujo a los alumnos a usar los datos para los lados del triángulo y a nombrar los puntos en donde el rectángulo toca al triángulo. Le dieron también un valor a la altura del rectángulo, pero reconocieron que esa altura cambia al mover el vértice del rectángulo y que la base del rectángulo también cambia, así llamaron x a la base del rectángulo y llamaron y a la altura.

Otros equipos analizaron el problema geométricamente y consideraron, por ejemplo: *"Las partes que sobran son los triángulos ahí no hay rectángulo, queremos que sobre lo menos que se pueda"*. Haciendo dibujos de triángulos con rectángulos en diferentes posiciones intentaron encontrar dónde puede estar el punto en el que lo que sobra fuera lo menos posible después de comparar con el área del rectángulo. Por ejemplo: *"Si doblamos aquí hacia abajo parte del área del triángulo coincide con la del rectángulo, pero no toda. Sobra estos dos triángulos lo de este triángulo y también queda un triángulo que no queda tapado del rectángulo. Si nos imaginamos que lo movemos... Creo que ya sé, tenemos que ponerlo a la mitad de A porque ahí se tapa la mitad del rectángulo, pero... el área de la otra mitad, no sé si se tapa con el triángulo de la derecha"*.

Se puede observar que los alumnos, en general, discutieron matemáticamente y trataron de encontrar maneras de abordar el problema que representó un reto para ellos. Mediante la discusión en grupo se compararon las estrategias de los alumnos y el profesor intentó que todo el grupo las entendiera. Entregó después otra hoja de actividades para apoyar la reflexión de los alumnos en la introducción de variables, usando la sugerencia del primer grupo que fue compartida por los alumnos. Ejemplos de las nuevas actividades son:

1) Si llamamos x a la base del rectángulo ¿Entre qué valores podría variar?

2) Si llamamos y a la altura del rectángulo ¿Entre qué valores podría variar?

3) ¿Cómo cambia el área del rectángulo si se cambia el valor de x o el valor de y?

4) ¿Para qué valores de x y de y el área del rectángulo sería cero? ¿Tiene sentido elegir esos valores? ¿por qué?

7) Analicen la figura ¿Cuántos triángulos observan? Señálenlos en la figura.

8) Comparen los triángulos ¿Cómo son uno respecto a los otros?

9) Qué propiedad de los triángulos pueden utilizar para encontrar una relación entre el valor de x y el valor de y?

Con esta guía y lo que los alumnos habían considerado anteriormente los alumnos lograron plantear un modelo matemático para describir la situación y, posteriormente, encontrar la relación que describe el área del rectángulo restringido por las medidas del triángulo. Reconocieron con facilidad la expresión como una función cuadrática y que el valor mayor del área se obtiene para el valor de x que corresponde al vértice. De esa manera pudieron resolver el problema.

En la discusión en grupo los alumnos dieron evidencia de entender el problema y la maestra propuso como tarea que utilizaran el otro método sugerido por los compañeros que utilizaban los triángulos y que comparan las dos soluciones, que deberían ser iguales. No todos los alumnos pudieron resolver el problema de esta manera, pero los alumnos que la sugirieron sí lo lograron y demostraron informalmente su resultado y lo relacionaron con la metodología empleada en las actividades de la maestra. Ella pidió además a los alumnos que escribieran una carta a Inés y al señor López explicando su sugerencia y aclarando por qué consideraron que es la mejor opción para construir el hotel. Les pidió que sugieran además qué hacer con las partes del terreno que quedan fuera del rectángulo.

Los alumnos permanecieron siempre interesados en el problema. Discutieron en sus equipos y con otros equipos para intercambiar ideas. La principal dificultad encontrada fue identificar los triángulos en la figura como semejantes y pasar de la exploración utilizando números al uso de variables. En su carta, los alumnos mostraron haber entendido la relación entre los triángulos, el rectángulo y la función cuadrática. Los alumnos dieron evidencia de construcción de conocimiento que la maestra corroboró planteando otros problemas semejantes en la clase siguiente y en el examen parcial correspondiente donde el 73% de los alumnos obtuvo resultados satisfactorios.

El papel de la derivada implícita en la física

A partir de una discusión entre los maestros de Cálculo Diferencial e Integral para alumnos de bachillerato, se discutió la dificultad que encuentran los alumnos para comprender y utilizar correctamente las derivadas implícitas. Algunos maestros comentaron que plantear problemas sencillos relacionados con las ecuaciones diferenciales era, en su opinión, una forma más natural de introducir este concepto y uno de ellos completó la idea al comentar que además se podrían aprovechar esos problemas para relacionar con otras asignaturas como la Física, la Química o la Biología. En ese entorno se decidió intentar el uso de un problema abierto, conocido por los estudiantes, pero en el que siempre se les da una fórmula para trabajar con él y se pierde la oportunidad de que razonen sobre cómo surge esa fórmula. Después de una larga discusión, algunos maestros decidieron aprovechar el problema para que los alumnos trabajaran experimentalmente en la búsqueda de datos y lo plantearon como un proyecto de investigación (Trigueros & Oktaç, 2019). El problema planteado a los alumnos fue:

¿Cómo se puede encontrar la velocidad terminal de un paracaidista que se deja caer desde un avión? ¿Sería posible hacer un experimento para determinarla?

A los alumnos les interesó mucho el problema y comenzaron a discutir, pero encontraron dificultades para abordar el problema y dudaban sobre qué podrían hacer. Después de unos minutos imaginaron la situación y pensaron en ella; hicieron algunos dibujos y decidieron, en todos los equipos, empezar a concentrarse en un caso simple para "*poder pensar mejor*". El significado de la velocidad terminar fue el objeto de la mayor parte de las discusiones; los alumnos se preguntaban si era el caso que siempre al caer con el paracaídas abierto se alcanzara una velocidad terminal. Poco a poco, con la ayuda del maestro, fueron desarrollando estrategias para proponer un modelo. Varios equipos usaron el equilibrio de fuerzas; otros la suma de fuerzas en la caída y otros la razón de cambio de la velocidad. Para poner en juego estos conceptos, los alumnos discutieron en términos generales la necesidad de incluir la fuerza de fricción que frena al paracaídas y propusieron algunas hipótesis, por ejemplo, que esa fuerza "*solamente depende de la densidad del aire*" y que "*lo que importa más es el tipo de paracaídas, en particular su tamaño y su forma*". Después de discutirlo más, la mayoría concluyó que esos factores se podían agrupar en una constante porque las condiciones de la atmósfera podrían no variar en el tiempo de caída del paracaidista, pero que era importante considerar el área del paracaídas que también es constante.

Después de alrededor de 20 minutos el profesor pasó al frente a representantes de distintos equipos para discutir con el grupo completo cada una de las propuestas anteriores y compararlas. Los alumnos que propusieron el uso de la razón de cambio de la velocidad, por ejemplo, dieron el siguiente argumento para convencer al resto del grupo: "*Cuando algo cae su velocidad aumenta, el movimiento es acelerado. El paracaidista empieza a caer así, pero cuando se abre el paracaídas la fricción con el aire aumenta y en eso, suponemos que depende de qué tan grande es el paracaídas. Así se va frenando y si llega a una velocidad terminal eso pasa cuando la fuerza de fricción y la de la gravedad se equilibran y el movimiento a partir de ese momento es con velocidad constante que es la velocidad terminal.*" Al igual que este equipo, los demás consideraron que el paracaidista se iría frenando y que la velocidad disminuiría más si la constante discutida anteriormente era mayor.

Los alumnos regresaron a trabajar en equipo para encontrar un modelo para la situación planteada, como recomendó el maestro. Para los alumnos fue fácil considerar al tiempo como la variable independiente y a la velocidad como variable dependiente, aunque hubo alumnos que siguieron considerando más pertinente considerar las fuerzas y su equilibrio. Los modelos propuestos por los estudiantes se discutieron en el grupo y el maestro actuó como guía en la elaboración de argumentos. Se consideraron al final tres posibles modelos:

1) Fr = mg - Derivado únicamente del equilibrio de fuerzas necesario para que se alcance una velocidad terminal constante

2) v′= a – bv - Derivado de la consideración de la aceleración como razón de cambio; modelo basado principalmente en consideraciones algebraicas y con a la altura de la que inicia el movimiento.

mv′ = mg – Fr(v) - Derivado de la consideración de la fuerza resultante de la suma de la caída libre y la resistencia del aire

La primera sesión concluyó con la distribución por el maestro de una hoja de trabajo con actividades relacionadas con la construcción de la derivada implícita para llevarla a cabo parte en clase y parte como tarea. Ejemplos de actividades de esa hoja son:

1. Si sabes que *y* es una función de *x* definida implícitamente mediante la ecuación: $2x^4+\exp(2x)+5y^2 = 3$

a) Explica cuáles términos requieren de la regla de la cadena para encontrar la derivada de la ecuación.

b) Encuentra la derivada de *y*.

c) Encuentra el valor de y en el punto (-1,1) y el valor de *y'* en el mismo punto. ¿Qué significa el valor de y′ en ese punto en relación con la ecuación dada?

2. Si sabes que *y* es una función de *x* definida implícitamente mediante la ecuación:

$$x^3 + \exp y - xy - \cos(xy) = 0$$

a) Explica cuáles términos requieren de la regla de la cadena para encontrar la derivada de la ecuación.

b) Encuentra la derivada de *y*.

3. a) Encuentra la primera y la segunda derivada de y para $x^3 + y^4 = a^2$.

b) Usa la información que encontraste para describir el comportamiento de la función *y(x)*.

c) Calcula la derivada de y en el punto (-1,1) ¿Qué significa esa derivada en términos de la ecuación del inciso (a)?

4. a) Si sabes que *v = v(t)* y que *v′ = av*, calcula la derivada de *v′*. Exprésala únicamente en términos de *v*.

b) Usa la información de *V'* y *V''* para analizar el comportamiento de la función *v(t)* ¿Qué sucede cuando *v´=0*?

c) ¿Para qué valores de *t v′*=1? ¿Para qué valores de *t, v´*= -1? Responde las mismas preguntas para distintos valores de *v*. Interpreta los resultados en términos del comportamiento de *v(t)*.

d) Utiliza estos resultados para dibujar la gráfica de la función *v(t)*.

En la segunda sesión se retomó el trabajo sobre el problema de modelación. Los equipos que trabajaron con el primer modelo encontraron la ecuación *vt= mg/b*, en la que *b* se consideró la constante de la fuerza de fricción *Fr = bv*, aunque discutieron también la posibilidad de que la fuerza de fricción fuera proporcional a la velocidad al cuadrado. Pero, al no poder responder algunas de las preguntas de otros equipos respecto a la variación de la velocidad, optaron por utilizar uno de los otros modelos propuestos.

En un equipo que trabajaba con el segundo modelo surgió una idea importante. Al tratar de verificar qué predecía modelo y dado que no podían resolver la ecuación, los alumnos intentaron encontrar una función v que al sustituirla en la ecuación satisficiera la igualdad. Al no lograrlo, decidieron analizar la ecuación gráficamente y dibujaron una gráfica de v′(t) vs v(t). Estos estudiantes encontraron la representación de la ecuación diferencial en el plano fase que no habían estudiado antes. Los alumnos determinaron que esa variación era lineal y que la velocidad determinada por su modelo era positiva si la velocidad era menor que *a/b* y negativa si *v* era mayor que *a/b*.

Los alumnos interpretaron este resultado como "l*a velocidad aumenta primero, pero después de ese punto decrece porque la derivada es negativa*" pero surgió una duda importante "*¿cómo encontramos la velocidad terminal?... creo que a esta mal por las unidades*". El maestro manifestó su interés por el método y sugirió que notaran que la función v es la variable dependiente del problema y que analizaran la derivada con mayor cuidado.

En la discusión en grupo se presentó esta herramienta de análisis al resto del grupo. Los estudiantes de otro equipo que trabajaban con el tercer modelo consideraron que los modelos 2 y 3 eran semejantes matemáticamente, aunque el 3 contenía más información en términos físicos. Al tratar de resolver la duda de sus compañeros uno de ellos comentó, *"…en esa gráfica como la derivada depende de v, pero no de t, si la derivada ahí es cero será cero para esa v en cualquier tiempo*" y otro de sus compañeros completó "*Lo que dice es que, si la velocidad ahí es cero para toda t, es la velocidad terminal… y si la aceleración inicial es mayor que ese número, la derivada se va a hacer cada vez menor hasta llegar a la velocidad terminal"*. Después de discutir con el maestro, la mayoría de los alumnos entendieron el razonamiento de sus compañeros. Este resultado muestra que los alumnos descubrieron por sí mismos una herramienta de análisis útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales. El poder predecir algo sobre el movimiento con ella despertó el interés de muchos estudiantes. El maestro sugirió analizar sus ecuaciones con la primera y segunda derivadas y detectó que los alumnos no usaban la derivada implícita así que entregó la primera hoja de trabajo.

Una vez analizado el modelo la mayoría de los equipos regresó a interpretar el significado de la constante b en términos del problema. En general los alumnos consideraron que *"Entre mayor sea el área del paracaídas, la velocidad disminuirá más; es decir b debe ser proporcional al área A"* y que "*…si lo hiciéramos en agua sería distinto, a lo mejor no se hundiría*" o *"Si lo hiciéramos en el Everest caería más rápido porque la densidad del aire es menor"*. Otro resultado interesante fue que los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad en comprender que la solución de una ecuación diferencial es una función o una familia de funciones. El contexto del problema lo hizo evidente. Los alumnos experimentaron dejando caer paracaídas desde una ventana del tercer piso de la universidad. Otros compañeros tomaron el tiempo en el que pasó el paracaídas por la ventana del primer piso y parados sobre una banca del patio. Con estos datos comprobaron que la velocidad era la constante y calcularon la velocidad terminal.

Los alumnos interpretaron este resultado como *"la velocidad aumenta primero, pero después de ese punto decrece porque la derivada es negativa"* pero *"¿cómo encontramos la velocidad terminal?… creo que a esta mal por las unidades"*. El maestro manifestó su interés por el método y sugirió que notaran que la función v es la variable dependiente del problema y que analizaran la derivada con mayor cuidado.

En la discusión en grupo se presentó esta herramienta de análisis al resto del grupo. Los estudiantes de otro equipo que trabajaban con el tercer modelo consideraron que los modelos 2 y 3 eran semejantes matemáticamente, aunque el 3 contenía más información en términos físicos. Al tratar de resolver la duda de sus compañeros uno de ellos comentó, *"…en esa gráfica como la derivada depende de v, pero no de t, si la derivada ahí es cero será cero para esa v en cualquier tiempo"* y otro de sus compañeros completó *"Lo que dice es que, si la velocidad ahí es cero para toda t, es la velocidad terminal… y si la aceleración inicial es mayor que ese número, la derivada se va a hacer cada vez menor hasta llegar a la velocidad terminal"*. Después de discutir con el maestro, la mayoría de los alumnos entendieron el razonamiento de sus compañeros. Este resultado muestra que los alumnos descubrieron por sí mismos una herramienta de análisis útil en el estudio de las ecuaciones diferenciales. El poder predecir algo

sobre el movimiento con ella despertó el interés de muchos estudiantes. El maestro sugirió analizar sus ecuaciones con la primera y segunda derivadas y detectó que los alumnos no usaban la derivada implícita así que regresó a discutir la primera hoja de trabajo con todo el grupo e introdujo la segunda hoja de trabajo en la que las actividades consistían en dibujar la gráfica de varias ecuaciones diferenciales sencillas en las que aparecía la variable independiente explícitamente utilizando su conocimiento sobre la derivada y dibujar la gráfica de otras ecuaciones diferenciales en las que la variable independiente no aparecía explícitamente y dibujar una gráfica como la que presentaron sus compañeros y a partid de ella dibujar la gráfica de la variable dependiente contra la independiente. Los alumnos mostraron dificultades, pero lograron hacer las gráficas y explicarlas verbalmente. El maestro pidió enseguida que los alumnos utilizaran estos métodos con la ecuación diferencial del modelo.

Una vez analizado el modelo la mayoría de los equipos regresó a interpretar el significado de la constante b en términos del problema. En general los alumnos consideraron que "*Entre mayor sea el área del paracaídas, la velocidad disminuirá más; es decir b debe ser proporcional al área A*" y que "*…si lo hiciéramos en agua sería distinto, a lo mejor no se hundiría*" o "*Si lo hiciéramos en el Everest caería más rápido porque la densidad del aire es menor*". Otro resultado interesante fue que los estudiantes no tuvieron ninguna dificultad en comprender que la solución de una ecuación diferencial es una función o una familia de funciones. El contexto del problema lo hizo evidente. En los días posteriores, los alumnos experimentaron dejando caer muñecos de plástico con distintos paracaídas diseñados en papel o en tela desde una ventana del tercer piso de la universidad y tomando el tiempo en que observaban que caía con velocidad constante. Otros compañeros tomaron el tiempo en el que pasó el paracaídas por la ventana del primer piso y parados sobre una banca del patio. Con estos datos comprobaron que la velocidad era la constante y calcularon la velocidad terminal.

La experiencia resultó exitosa. El interés de los estudiantes se mantuvo durante las dos sesiones; su interés los condujo incluso a experimentar durante varios días para asegurarse de que su procedimiento era correcto y para obtener mejores datos. Surgieron, en el transcurso de la experiencia, dos herramientas conceptuales sin intervención del profesor: la ecuación diferencial como modelo del problema y el plano fase. La segunda apareció como herramienta de análisis y de evaluación del potencial de predicción del modelo matemático propuesto sin necesidad de resolver la ecuación. Los estudiantes construyeron las nociones de ecuación diferencial y de su solución y lograron considerar a la derivada implícita como un ejemplo de la derivada de composición de funciones. Los alumnos lograron interrelacionar el plano fase y la gráfica velocidad tiempo, así como interpretar una en relación con la otra. A partir del análisis gráfico surgió la necesidad de buscar métodos de solución de ecuaciones diferenciales simples. La determinación adecuada de la relación entre la densidad del aire, el área del paracaídas y la variación de la velocidad fue un logro importante. Los distintos equipos presentaron un reporte de su trabajo en el que explicaron verbal y matemáticamente sus razonamientos y en el que utilizaron distintos medios de presentación como el escrito y el audiovisual.

Los alumnos mostraron evidencia de aprendizaje a lo largo del proyecto y en su comunicación. En una entrevista posterior con cada uno de los equipos se encontró que en dos de ellos los alumnos mostraron evidencias de haber construido el conocimiento deseado y de haber construido una relación sólida entre la derivada implícita como Objeto y como un uso de la regla de la cadena y la solución a las ecuaciones diferenciales simples. Los demás mostraron una mejor comprensión de la derivada implícita como Proceso y la construcción de la relación de la derivada implícita con la solución de las ecuaciones diferenciales estudiadas.

Conclusión

Las evidencias encontradas en estos estudios muestran que el trabajo en los problemas de modelación contribuyó al aprendizaje de nuevos conceptos por parte de los alumnos. Es necesario aclarar que, si bien el trabajo en la modelación permitió que la necesidad de nuevos conceptos surgiera, su aprendizaje a profundidad y la construcción de relaciones con otros conceptos aprendidos en otro contexto o en el mismo curso, había sido más difícil si se hubiera utilizado únicamente el trabajo en los modelos. El trabajo en las actividades conceptuales diseñadas con la descomposición genética y su introducción en los momentos adecuados por parte de los maestros jugó un papel fundamental.

Es cierto que el uso de los modelos plantea dificultades importantes fuertes en el aula. Por una parte, está la complejidad del problema de modelación que debe elegirse de acuerdo a lo que se desea enseñar, el nivel matemático de los alumnos y su interés en el tema asegurando que se satisfacen los principios propuestos en Modelos y Modelación y, por otra parte, las formas de enseñar requieren ajustarse a las necesidades del problema de modelación. Decisiones como, por ejemplo, hasta dónde llegar en la modelación de una situación deben planearse de antemano, pero es importante considerar que, en muchas ocasiones, los alumnos van más allá de lo que el profesor espera y lo importante no es encontrar un modelo muy preciso o muy detallado, sino mostrarles que los problemas en los que se necesita utilizar matemática pueden surgir de muchos contextos, se pueden resolver de distintas formas y no siempre tienen una solución exacta. Los ejemplos mostrados en este artículo y en otros publicados en la literatura, es que los alumnos se acercan al problema, determinan variables, trabajan con el modelo reflexionando sobre lo que hacen y cambian, agregan o simplifican el modelo a la luz de lo que pueden hacer y de las preguntas a responder. Los procesos de comparación de modelos propuestos apoyan el desarrollo del pensamiento crítico y de las habilidades de argumentación. La comparación de soluciones encontradas al utilizar distintos modelos introduce, además, la idea fundamental de que, al usar matemáticas para resolver problemas reales, es necesario tomar decisiones y elegir la más apropiada en el contexto en el que surgió el problema. Pero lo central es recalcar que el uso de las matemáticas permite encontrar soluciones, compararlas y tomar las decisiones pertinentes para encontrar la respuesta a la pregunta de la cual surgió el modelo. En ese proceso de reflexión y de toma de decisiones los alumnos aprenden y los maestros, al trabajar junto con ellos, tienen la oportunidad de escucharlos, detectar sus dificultades y sus inquietudes y moldear su enseñanza introduciendo actividades conceptuales basadas en una descomposición genética tomando estos aspectos en consideración.

La importancia de la selección del problema a estudiar no debe dejar de enfatizarse. Los problemas a modelar no deben ser muy complejos, tampoco demasiado fáciles. Las sugerencias del trabajo de Lesh y sus colaboradores (2000) dan al maestro una buena guía para determinar si un problema es adecuado para el nivel de la clase en la que se pretende emplear. Diseñar estas situaciones y la forma de emplearlas en clase puede ser un obstáculo para el maestro, pero si los maestros utilizan el trabajo colaborativo con otros maestros, esta tarea es motivadora y eficiente. Los resultados que se obtienen, aun cuando se introduzcan este tipo de problemas ocasionalmente en la clase, hacen que el trabajo valga la pena.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J. Dubinsky, E., Oktaç, A. Roa, S. Trigueros, M. & Weller, K. (2014) *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. Springer. New York.

Busse, A. (2011). Upper secondary students' handling of real-world contexts. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri, & G. Stillman, G. (Eds.) *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*. ICTMA 14 (pp 37–46). New York, NY: Springer Science + Media, LLC.

Dubinsky, E., & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching andlearning of mathematics at university level: An international commission on mathematical instruction study*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer AcademicPublishers.

Kaiser, G. & Maaß, K. (2006). *Modelling in Lower Secondary Mathematics Classrooms – Problems and Opportunities*. W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (eds.), Modelling and Applications in Mathematics Education. New York, Springer Academics (former Kluwer Academics).

Carlson, M., Larsen, S., & Lesh, R. (2003). Integrating a model and modeling perspective with existing research and practice. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.) *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 465–478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Camacho, M., Perdomo, J., and Santos, M. (2012). Procesos conceptuales y cognitivos en la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias vía la resolución de problemas. *Enseñanza de las ciencias*. 30.2, 9 – 32.

English, L. D.Lesh, R. &Fennewald, T. (2008) Methodologies for investigating relationships between concept development and the development of problem-solving abilities. In Santos, Manuel & Shimizu, Yoshi (Eds.) *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education*, Monterrey, Mexico.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In A. Kelly, & R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* pp. 591–646. New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003) Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning and problem solving. En *Beyond constructivism: Models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. NewHampshire: Lawrence Erlbaum Associates.

Lesh, R., & English, L. (2005). Trends in the evolution of the Models and Modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education.* 37(6), pp. 487- 489.

Trigueros, M. (2009) El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas Innovación Educativa, 9, pp. 75-87 Instituto Politécnico Nacional DF, México.

Trigueros, M. (2014). Vínculo entre la modelación y el uso de representaciones en la comprensión de los conceptos de ecuación diferencial de primer orden y de solución. *Educación Matemática*. Número especial 25 Años, pp. 207-226.

Trigueros, M., & Bianchini, L. B. (2016). Learning Linear Transformations using models. First conference of international network for didactic research in university mathematics. France: Montpellier. (hal-01337884) https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337884/.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2019). Task design in APOS Theory. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, 15, 43 – 55