

INDAGAR, CREAR Y RESOLVER PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Uldarico Malaspina Jurado

umalasp@pucp.edu.pe

Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú

Resumen

En la formación de estudiantes y de profesores, es primordial el estímulo del pensamiento matemático, más allá del manejo adecuado de algoritmos y de procedimientos. En esta perspectiva, es fundamental no solo aprender a resolver problemas, sino aprender mediante la resolución de problemas y, para ello, integrar la competencia de resolver problemas con la indagación y la creación de problemas. Se presentan experiencias didácticas que muestran la estrecha relación entre indagar, crear y resolver problemas de matemáticas, como parte de los procesos de aprendizaje y de estímulo del pensamiento matemático. Se han experimentado secuencias con estudiantes de primaria, con profesores en formación y con profesores en ejercicio. Cabe destacar los aspectos emocionales que se manifiestan en los estudiantes; y en los profesores, las oportunidades de hacer reflexiones didácticas, así como de aclarar y profundizar contenidos matemáticos.

Palabras clave: *Pensamiento matemático, indagación, creación de problemas, resolución de problemas,*

Introducción

En el documento oficial vigente del Ministerio de Educación del Perú, Currículo Nacional de la Educación Básica (2017), se destaca el desarrollo de veinte y nueve competencias de los estudiantes, siendo cuatro de ellas directamente vinculadas con el aprendizaje de las matemáticas: Competencia 23: Resuelve problemas de cantidad. (p.133); Competencia 24: Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio. (p.136); Competencia 25: Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre. (p.141); y Competencia 26: Resuelve problemas de forma, movimiento y localización. (p.144). Es evidente el énfasis en la resolución de problemas, lo cual ocurre también en otros países, entre los que destaca Singapur (Liljedahl, Santos-Trigo, Malaspina, & Bruder, 2016). Considero fundamental potenciar este enfoque, articulando fuertemente la resolución de problemas con la indagación y con la creación de problemas, por su presencia en el pensamiento científico y en la forma en que avanza el desarrollo de la ciencia y en particular de las matemáticas.

En el Currículo Nacional también se considera la indagación en la competencia 20: Indaga mediante métodos científicos para construir sus conocimientos. (p. 120); sin embargo, la indagación aparece más ligada a las ciencias naturales, no a la matemática. En cuanto a la creación de problemas, no hay una mención específica al explicitar las capacidades asociadas

a las competencias mencionadas.

En los siguientes apartados, presentaré algunos planteamientos sobre la resolución de problemas, la indagación en el aprendizaje de las matemáticas y la creación de problemas de matemáticas. Luego describiré algunas experiencias didácticas, tanto con estudiantes, como con profesores, en las que se muestra la interrelación de estos enfoques.

Resolución de problemas

Son abundantes las investigaciones y experiencias didácticas relacionadas con la resolución de problemas. Una muestra de esto se encuentra en la Liljedahl y Santos Trigo (2019), que reúne una selección de artículos que fueron presentados en el ICME-13, en el 2016, en Hamburgo. Ciertamente, uno de los trabajos pioneros sobre resolución de problemas es el de Polya (1945), con sus ya muy conocidas cuatro fases para la resolución de problemas. Cabe destacar su cuarta fase (looking back), en la cual abre pistas para la creación de nuevos problemas, al proponer el examen de la solución, del resultado y del método usado, pensando en su uso para otro problema.

Al reflexionar sobre resolución de problemas en la educación, un aspecto fundamental a destacar, es que es importante aprender a resolver problemas de matemáticas, pero aún más importante es aprender matemáticas mediante la resolución de problemas. Es muy usual desarrollar clases de matemáticas, sobre todo en el nivel universitario, empezando por la exposición de un teorema o concepto matemático, continuar con alguna aplicación o ejercicio y dejar los problemas para el final; sin embargo, casi siempre es posible empezar planteando un problema relacionado con el tema que se va a tratar, y que los estudiantes sientan el desafío de resolverlo, hagan uso de los conocimientos que tienen para intentar resolverlo y verificar luego, con orientación del profesor y usando ideas intuitivas en torno al teorema que se quiere tratar, que hay formas más eficientes de resolver tal problema. Entonces enunciar el teorema y, reflexionando conjuntamente con los estudiantes, ir armando su demostración, para luego regresar al problema y conjuntamente examinar otras soluciones, modificarlo, generalizarlo. En esta línea de reflexión está Houdement (2017) al considerar problemas básicos, que se espera sean resueltos sin mayor dificultad; problemas complejos, originados en problemas básicos, cuya construcción y manejo de la información son de responsabilidad del estudiante; y problemas atípicos, cuya resolución requiere la construcción de una estrategia, en ausencia de una semejanza con un problema resuelto, percibida por quien resuelve el problema.

Indagación en el aprendizaje de las matemáticas

Según el Consejo Nacional de Investigaciones de Estados Unidos (NRC), ante el énfasis que había en la acumulación de información en la enseñanza y aprendizaje de la ciencia, en lugar del estímulo del desarrollo de habilidades y actitudes para la ciencia, John Dewey presenta por primera vez en 1910 el concepto de indagación. Dewey (1916) sostiene que los problemas que se estudien deben tener relación directa con las experiencias de los estudiantes, para fomentar que ellos sean aprendices activos en búsqueda de sus propias respuestas. Ciertamente, esto es coherente con lo manifestado en el párrafo anterior, en relación a la resolución de problemas de matemáticas; sin embargo, cuando en 1996 el Consejo Nacional de Investigación de Estados

Unidos de América presenta una definición de indagación, esta no incluye, explícitamente, su uso en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Afirma que indagación es:

Las diversas formas en las que los científicos estudian el mundo natural y proponen explicaciones basadas en la evidencia derivada de su trabajo. La indagación también se refiere a las actividades de los estudiantes en la que ellos desarrollan conocimiento y comprensión de las ideas científicas. (NRC, 1996, p.23)

Anderson (2007) pone énfasis en la enseñanza basada en la indagación y destaca tres formas diferentes en que la NRC utiliza la palabra indagación en sus documentos: la conocida como "indagación científica", la enseñanza a través de la indagación y el aprendizaje basado en la indagación.

En el 2012, Artigue y Baptist publican, en el marco del Proyecto Fibonacci, un artículo sobre indagación en la educación matemática (Artigue, & Baptist, 2012) en el que toman las ideas generales de la indagación, orientada básicamente hacia las ciencias naturales y dan algunas pautas para incluir la indagación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Nos recuerdan que, en general, «la indagación es un término usado, tanto en la educación como en la vida cotidiana, para referirse a la búsqueda de conocimiento o información mediante el método de hacer preguntas» (Harlen, 2012) y nos manifiestan que:

La indagación matemática parte de una pregunta o un problema, y las respuestas se buscan a través de la observación y la exploración; se realizan experimentos mentales, materiales o virtuales; se buscan conexiones con preguntas ya respondidas y que tienen analogías relevantes para la pregunta que se está investigando; se ponen en juego técnicas matemáticas conocidas y se adaptan cuando es necesario. (Artigue, & Baptist, 2012, p. 4).

Este marco, da bases para ir aún más allá, hacia una indagación didáctica de los profesores, vinculada con la creación y resolución de problemas de matemáticas. Entendemos esta indagación, como la búsqueda de actividades adecuadas para sugerirlas a los estudiantes, así como la formulación de preguntas en torno a tales actividades y luego la creación, resolución y revisión de problemas relacionados con las actividades y preguntas. Todo esto constituye un proceso de indagación, que es una forma de desarrollar competencias didáctico-matemáticas de los profesores.

La creación de problemas de matemáticas

La creación de problemas de matemáticas es un proceso mediante el cual se obtiene un nuevo problema (Malaspina 2015, 2017), que está fuertemente vinculado a la resolución de problemas y a la indagación. Es sumamente importante en el estímulo del pensamiento matemático de estudiantes y profesores; más aún, contribuye a desarrollar competencias didácticas de los profesores.

La importancia de la creación de problemas ha sido destacada por científicos, matemáticos e investigadores en educación matemática (Einstein e Infeld, 1938, p.92; Halmos, 1980, p.524; NCTM, 1989, p. 138; y muchos otros). Hay numerosas y muy importantes publicaciones tratando diversos aspectos de la creación de problemas, vinculados con la formación matemática de los estudiantes en todos los niveles educativos y con el desarrollo de

competencias didácticas y matemáticas de los profesores. Así, Ellerton (2013) nos dice:

Durante demasiado tiempo, la resolución exitosa de problemas ha sido exaltada como la meta; ha llegado el momento en que a la creación de problemas se le dé un lugar prominente pero natural en los planes de estudio y las aulas de matemáticas. (pp. 100-101)

Crespo (2015), con base en sus investigaciones y experiencias didácticas, manifiesta que enseñar con énfasis en creación de problemas provee a los estudiantes de oportunidades de convertirse en productores de conocimiento y no solo ser receptores de contenidos ya conocidos. (p. 495).

En relación a la formación de profesores, en las investigaciones se evidencia la vinculación entre creación de problemas de matemáticas con el estímulo de competencias docentes (Crespo, 2003; Tichá & Hošpesová, 2013; Malaspina, Mallart & Font, 2015; Malaspina, Torres, & Rubio, 2019). Como lo manifestamos en Malaspina y Vallejo (2014, p 8), crear problemas es parte fundamental de la tarea docente. Cada profesor conoce la realidad específica en su aula, el entorno sociocultural y las motivaciones de sus alumnos y es un desafío a sus conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, tanto crear secuencias de actividades y problemas adecuados para esa realidad, como estimular a sus alumnos no solo a aprender resolviendo problemas, sino a “ir más allá”: a aprender creando sus propios problemas.

¿Cómo crear problemas de matemáticas? En artículos y conferencias anteriores he detallado mis propuestas, compartidas con otros investigadores (Malaspina, 2015; Malaspina, Mallart & Font, 2015; Malaspina 2017; Malaspina, Torres, & Rubio, 2019). En resumen, se puede crear problemas modificando la información, el requerimiento, el contexto o el entorno matemático de un problema dado (uno o más de los cuatro componentes de tal problema); o, a partir de una situación dada, construyendo estos cuatro elementos de un problema. En el primer caso, decimos que el problema ha sido creado por variación; y en el segundo caso, decimos que ha sido creado por elaboración. Para estimular las competencias didáctico matemáticas de los docentes, mediante la creación de problemas, proponemos la estrategia Episodio, problema-pre, Problema-pos (EPP) para crear problemas por variación, y la estrategia Situación, Problema-pre, Problema-pos (SPP) para crear problemas por elaboración. En Malaspina, Torres, & Rubio (2019) y Torres (2016) complementamos estas estrategias con fases de reflexión didáctica, usando constructos teóricos del enfoque ontosemiótico de la educación matemática (EOS).

La relación estrecha entre creación de problemas y resolución de problemas parece clara y es mencionada desde el artículo pionero de Kilpatrick (1987). Hay estudios que evidencian esta relación, como los de Ayllón (2012). Silver (2013); Bonotto y Del Santo (2015). Más aún, se ha publicado un voluminoso libro, editado por Felmer, Pehkonen y Kilpatrick, J. (2016), con numerosos artículos sobre resolución y creación de problemas.

Parte fundamental en la creación de problemas, tanto por variación como por elaboración, es la formulación de preguntas. Una que es fundamental y bastante destacada por Brown & Walter (1983), es ¿qué pasaría si...? En nuestro enfoque, para crear problemas por variación, algunas preguntas útiles son: ¿qué pasaría si cambio la información?, ¿qué pasaría si cambio el requerimiento?, ¿qué pasaría si cambio el contexto?, ¿qué pasaría si cambio el entorno

matemático?, ¿qué casos particulares pueden tener especial relevancia?, ¿puedo generalizar?; y para crear problemas por elaboración: ¿qué información selecciono?, ¿qué relaciones puedo establecer en la información que selecciono?, ¿qué requerimiento hago?, ¿puedo considerar un contexto intra matemático? (Malaspina, 2018). Todo esto evidencia la relación de la creación de problemas con la indagación; y para dar énfasis a una indagación didáctica, en talleres que he desarrollado con profesores, introduje dos fases previas a la creación de problemas por elaboración, en un entorno matemático determinado. Una primera fase de propuesta de actividades, a partir de la situación presentada, y una segunda fase de formulación de preguntas, a partir de las actividades propuestas. La tercera fase fue la formulación de un problema, tomando como referencia alguna de las actividades propuestas, y sus respectivas preguntas. También he desarrollado talleres con estudiantes de primaria, en los cuales la propuesta de actividades y preguntas, así como la creación de problemas, fue usando material manipulativo estructurado y trabajando en grupos.

Una experiencia didáctica con profesores

Fue desarrollada con catorce profesores de educación secundaria en ejercicio. Mostraré parte de las actividades desarrolladas por el profesor de código 4C y por el grupo 4 que integró.

Situación: Juan y María disponen de alambres flexibles de 72 cm y 36 cm de longitud, respectivamente.

Actividad 1(Individual): Escriba brevemente una o más actividades, con los alambres flexibles de Juan y María, que Ud. sugeriría a estudiantes de segundo grado de secundaria, para afianzar sus conocimientos sobre área y perímetro de rectángulos.

Propuesta del profesor 4C:

- Construye rectángulos utilizando el alambre de 72 cm, en su totalidad. (sin partes)
 - Construye rectángulos utilizando el alambre de 36 cm.

Actividad 2 (Individual): Escriba una o más preguntas que Ud. haría a los estudiantes, o se plantearía Ud misma(o), relacionadas con la(s) actividad(es) propuesta(s).

Preguntas sugeridas por el profesor 4C:

- ¿Cuál es el perímetro en el primer caso?
 - ¿Cuál es el perímetro en el segundo caso?
 - ¿Siempre el área de los rectángulos en el primer caso es mayor que el área de los rectángulos del segundo caso?
 - ¿Qué podemos concluir de la propuesta anterior?
 - ¿Cuál es el área máxima que se puede obtener en el primer y segundo caso?

Actividad 3 (grupal): Considerar una de las actividades propuestas – u otra que se les ocurra en el grupo – para crear y resolver un problema relacionado con *área y perímetro de rectángulos*.

Actividad considerada:

Actividad considerada:

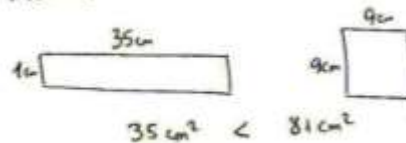
Dibujen 3 rectángulos que se podrían construir con el alambre de 72 cm y 3 rectángulos que se podrían construir con el alambre de 36 cm.

Problema creado:

¿Siempre el área del rectángulo construido con el alambre de mayor longitud será mayor que el área del rectángulo construido con el alambre de menor longitud? Explique su respuesta.

Una solución del problema creado:

No siempre es mayor, ya que podríamos formar un rectángulo cuyas dimensiones son 35 cm y 1 cm y cuya área mide 35 cm^2 y un rectángulo de 9 cm y 9 cm de dimensiones cuya área mide 81 cm^2 .



Una experiencia didáctica con estudiantes

Fue desarrollada con 18 niñas y 12 niños, entre 10 y 11 años de edad. Mostraré parte de las actividades desarrolladas por el grupo 7, conformado por tres niñas y dos niños.

Situación: Julia recibió una caja con palitos de madera de distintos tamaños y colores. Los palitos del mismo tamaño son del mismo color. La información se resume en el siguiente cuadro:

Color	Cantidad de palitos	Medida de cada palito
Azul	3	10 pulgadas
Blanco	3	2 pulgadas
Amarillo	3	6 pulgadas
Rojo	3	4 pulgadas
Verde	3	8 pulgadas

Actividad 1 (Grupal): Escriban algunos ejemplos de actividades relacionadas con triángulos, que se podrían hacer con los palitos que recibió Julia.

Grupo 7: Un triángulo con 2 colores rojo y 1 amarillo.

- Un triángulo con tres lados color verde del mismo tamaño todos sus lados.

Actividad 2 (Grupal): Escriban 3 o más preguntas sobre las actividades relacionadas con triángulos, que escribieron antes (u otras que se les ocurra), que se podrían hacer con los palitos que recibió Julia.

Grupo 7: *¿Se puede crear un triángulo dentro de otro triángulo?* *¿Dos triángulos pueden estar encima de otros triángulos?*

Actividad 3 (Grupal): Utilicen una o más preguntas de las escritas en la segunda parte, para inventar un problema sobre triángulos. Pueden usar la información que se da sobre los palitos, o modificarla.

Grupo 7: *¿Cuántos triángulos se pueden formar con los de verde, rojo y amarillo y cual sería su perímetro?* *Rpta: Se puede formar 3 triángulos y el perímetro de cada 1 es 12.*

Comentarios

Los niños crearon problemas y en el camino, descubrieron por indagación que, con tres palitos de longitudes diferentes, no siempre se puede construir un triángulo cuyos lados tengan las longitudes de los palitos. En uno de los grupos, uno de los niños "adivinaba" cuándo se podía formar el triángulo y cuándo no, con tres palitos escogidos al azar, pero de diferentes tamaños. Ciertamente es una aproximación intuitiva al teorema correspondiente.

Los profesores desarrollaron una indagación didáctica, pues reflexionaron en grupo la pertinencia de las actividades propuestas, la importancia de la claridad en la formulación de estas y de los problemas y, además de los problemas inicialmente creados, inventaron otros problemas; unos que faciliten la comprensión y solución del problema creado, cuando en el grupo lo consideraron de cierta complejidad, y otros que sean más retadores que el problema inicial, cuando lo consideraron muy "sencillo" (estrategias EPP y SPP). A partir de los problemas retadores, y pasando a lo que se denomina el conocimiento especializado del profesor, en la puesta en común se llegó a discusiones en las que se vinculó perímetros de rectángulos con gráficos de segmentos de recta abiertos, y áreas de rectángulos con curvas de nivel de una función de dos variables.

Cabe destacar que las experiencias didácticas desarrolladas, relacionando indagación, creación y resolución de problemas, estimularon el pensamiento matemático y evidenciaron gran involucramiento emocional, tanto en los estudiantes como en los profesores, lo cual es altamente positivo para el aprendizaje de los primeros, así como para la reflexión didáctica de los segundos y también para la aclaración y la profundización de conocimientos.

Referencias

- Anderson, R. D. (2007). Inquiry as an organizing theme for science curricula. En: Abell, S. K., Lederman, N. G. (Eds.), *Handbook of Research on Science Education*, pp. 808-830. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Artigue, M., & Baptist, P. (2012). Inquiry in mathematics education (Resources for implementing inquiry in science and in mathematics at school). The Fibonacci Project Resources. <http://www.fibonacci-project.eu>.
- Ayllón, M. (2012). *Invencción-resolución de problemas por alumnos de educación primaria*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Bonotto, C., & Dal Santo, L. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving and creativity in the primary school. En Singer, F., Ellerton, N., & Cai, J. (Eds.) *Mathematical Problem Posing*. (pp. 103-124) New York: Springer.
- Brown, S. & Walter, M. (1983). *The art of problem posing*. Philadelphia: Franklin Institute Press.
- Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in pre service teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 243-270.
- Crespo, S. (2015). A collection of problem-posing experiences for prospective mathematics teachers that make a difference. In *Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice* (pp. 493-511). Springer New York.
- Dewey, J. (1916). Method in science teaching, *The Science Quarterly*, 1, 3-9.
- Einstein, A. e Infeld, L. (1938). *The evolution of Physics from early concepts to relativity and quanta*. New York: Simon & Schuster.
- Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101
- Felmer, P., Pehkonen, E., & Kilpatrick, J. (Eds.) (2016). *Posing and solving mathematical problems. Advances and new perspectives*. Switzerland: Springer.
- Halmos, P. (1980). The heart of mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87, 519-524.
- Harlen, W. (2012). *Inquiry in science education*. The Fibonacci Project Resources, 2012, <http://fibonacci-project.eu>.
- Houdement, C. (2017). Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N*, 100, 59-78.
- Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problem come from? In A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education*, 123-147. Hillsdale, N.J: Erlbaum.
- Liljedahl, P., Santos-Trigo, M., Malaspina, U., & Bruder, R. (2016). *Problem Solving in Mathematics Education*. Germany: Springer.
- Liljedahl, P., & Santos-Trigo, L. (Eds.) (2016). *Mathematical Problem Solving*. Suiza: Springer.

- Malaspina, U. & Vallejo, E. (2014). Creación de problemas en la docencia e investigación. En Malaspina, U. (Editor) *Reflexiones y propuestas en Educación Matemática*. (pp 7 – 54). Departamento de Ciencias PUCP. Lima: Moshera
- Malaspina, U., Mallart, A., & Font, V. (2015). Development of teachers' mathematical and didactic competencies by means of problem posing. En Krainer, K. & Vondrová, N. (Eds.) *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2861-2866). Prague, Czech Republic: Proceedings of the CERME 9.
- Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia en la XIV CIAEM, México.
- Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo CIVEOS* Disponible en <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- Malaspina, U. (2018). ¿Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación. *UNION, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 52, pp. 307-313
- Malaspina, U., Torres, C., & Rubio, N. (2019). How to stimulate in-service teachers' didactic analysis competence by means of problem posing. En P. Liljedahl, & L. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving*. (pp. 133 -151) Suiza: Springer.
- Ministerio de Educación del Perú (2017). *Currículo Nacional de la Educación Básica*. Lima: Ministerio de Educación.
- National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM
- NRC, National Research Council (1996). *National Science Educational Standards*. Washington: National Academy Press.
- Silver, E. A. (2013). Problem posing research in mathematics education. Looking back, looking around and looking ahead. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 157 – 162.
- Pólya, G. (1945). *How to solve It*. Princeton University: Princeton NJ
- Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 133-143.
- Torres, C. (2016). Creación de problemas sobre funciones cuadráticas por profesores en servicio, mediante una estrategia que integra nociones del análisis didáctico. Tesis de Maestría no publicada. Maestría en Enseñanza de las Matemáticas – Pontificia Universidad Católica del Perú.