

CONTRIBUIÇÃO DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA NA FORMA CONTINUADA DE PROFESSORES QUE ENSINAM MATEMÁTICA

Saddo Ag Almouloud

saddoag@gmail.com

Pontificia Universidad Católica de São Paulo, Brasil

Resumen

Proponemos presentar brevemente una parte de la contribución teórica de la Didáctica de las Matemáticas para comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos. Entendemos la "Didáctica de las Matemáticas" como la ciencia de la educación que estudia situaciones que apuntan a la adquisición de conocimiento por parte de estudiantes, niños o adultos en formación, tanto desde el punto de vista de las características de estas situaciones como del aprendizaje que permiten. También estudia las condiciones que favorecen la adquisición de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. En nuestro panel, nos centraremos esencialmente en la Teoría de las situaciones didácticas (TSD) y la Teoría antropológica de la didáctica (TAD) cuyo alcance va más allá del estudio de fenómenos relacionados con la construcción de conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. Centraremos nuestras reflexiones en las contribuciones de estas teorías en la formación de maestros que enseñan matemáticas.

Palavras-chaves: *Didática da Matemática; Teoria das Situações Didáticas; Teoria Antropológica do Didático; Formação de professores.*

Introdução

Um dos objetivos nesses últimos anos é investigar a formação de professores, mais especificamente, em nosso caso, a formação de professores de Matemática, bem como as questões metodológicas. Neste sentido, são temas de investigação: Formação de professores de matemática: demandas institucionais e da Universidades; Processos de ensino e de aprendizagem de Alunos com Necessidades Educacionais Especiais e formação de professores envolvidos nesses processos; Engenharia didática de formação voltada para a formação de professores; Engenharia Didática de Segunda Geração, Engenharia Didática dos Domínios de Experiência, Engenharia dos Percursos de Estudo Pesquisa (PEP) e Percorso de Estudo e Pesquisa para a Formação de professores (PEP-FP). O foco da minha conferência paralela vai estar na contribuição, principalmente, da TAD na compreensão de processos relacionados com a formação de professores que ensinam a Matemática, mais especificamente no estudo de PEP e PEP-FP.

Referencial teórico

As reflexões tecidas neste texto apoiam-se na TAD desenvolvida por Chevallard (1999) e colaboradores.

Bosch e Chevallard (1999) asseveram que essa teoria permite analisar, descrever e estudar as práticas institucionais. Nesse sentido um conteúdo matematicamente organizado é, em parte, o objetivo que o professor almeja ao mesmo tempo em que dá suporte para a elaboração da praxeologia ou organização didática, que será colocada em prática, na sala de aula, como organização do saber matemático em jogo. Segundo Chevallard (2002), o primeiro aspecto dessa organização caracteriza o saber-fazer, designado normalmente por um **bloco prático-técnico** que considera que toda atividade humana, inclusive as atividades matemáticas, consiste em cumprir uma tarefa (t) de certo tipo (T), por pelo menos uma técnica (τ). O segundo aspecto caracteriza o saber, em um sentido restrito, geralmente designado por um **bloco tecnológico-teórico**, que considera certa tecnologia (θ) que justifica a técnica (τ), ou seja, ao mesmo tempo permite pensar sobre tal técnica e também produzir novas técnicas, uma teoria (Θ), por sua vez, justificaria tal tecnologia.

Para Chevallard (2002), um tipo de tarefa do professor é "ensinar certo tema matemático" entendendo por "tema matemático" uma organização praxeológica de natureza matemática, que ele chama de **organização matemática**. Para o autor, em um universo de tarefas rotineiras, as praxeologias podem envelhecer, quando seus componentes teóricos e tecnológicos perderem crédito, pois, a todo o momento, novos tipos de tarefas problemáticas se apresentam como *problemas*, cuja solução encaminha para a construção de novas praxeologias.

A TAD que tem o propósito de formular o problema da formação de professores em termos das praxeologias a serem ensinadas, praxeologias para o ensino e praxeologias para a profissão, como proposto por Cirade (2006), na seguinte afirmação:

Quais são as questões cruciais que os professores enfrentam em sua prática docente e o que a formação pode fazer para ajudá-los a construir respostas satisfatórias – na forma de praxeologias – a essas questões? Em particular, como as questões na origem das praxeologias matemáticas são geradas pelo ensino e pelas praxeologias matemáticas para o ensino? Quais são os problemas que constituem a *raison de ser* das praxeologias da profissão docente? (CIRADE, 2016)

Se a proposta do dispositivo didático para o ensino e aprendizagem da matemática é formulada por meio dos percursos de estudo e pesquisa (PEP), a fim de integrar a razão de ser do saber escolar no cerne do processo de estudo (Chevallard, 2013), e promover o desenvolvimento das condições necessárias para tornar possível uma atividade matemática funcional, como apontado por Barquero (2009), Ruiz-Munzón (2010) e Serrano (2013), parece claro que uma abordagem progressiva no novo paradigma do questionamento mundial requer a transformação das condições matemáticas de trabalho dos professores e, em particular, um repensar radical do tipo de formação necessária para o ensino da matemática.

Assim, o dispositivo de formação de professores proposto a partir do TAD tem a estrutura do Percurso de Estudo e Pesquisa para a formação de Professores (PEP-FP), um percurso que começa a partir de uma questão problemática para a profissão docente, que chamamos de Q0-FP. O estudo desta questão será articulado em cinco módulos que constituem os componentes do PEP-FP, com as características que descrevo mais adiante.

Apresento minha perspectiva teórico-metodológica baseada na TAD e na Engenharia didática do Percurso de Estudo e Pesquisa proposta por Chevallard (2009a e 2009b), especificamente, no Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP).

Engenharia didática do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP)

Na Teoria Antropológica do Didático, Chevallard (2013) identifica o fenômeno didático do Monumentalismo dos saberes, que é descrito com a analogia de um museu no qual os estudantes visitam as obras as quais somente podem ser vistas e veneradas, sem tocá-las ou manipulá-las e sem questioná-las, isto sob o paradigma das vistas das obras. Como contra paradigma, o pesquisador apresenta o paradigma do questionamento do mundo, no qual as obras podem ser visitadas na procura de dar resposta a um questionamento inicial, neste paradigma é importante estudar as razões de ser que fizeram e fazem existir determinada obra.

Para Chevallard (2009), toda situação didática pode ser representada por um sistema didático $S(X; Y; \heartsuit)$. Os sistemas didáticos vão se diferenciar sob o paradigma que os envolve, porém, podem ser $S(X; Y; O)$, se este está sob do paradigma da visita das obras ou pode ser $S(X; Y; Q)$, se está sob o paradigma do questionamento do mundo.

Baseado no paradigma do questionamento do mundo, Chevallard (2001c, 2009a, 2009b, 2011a e 2013) apresenta um dispositivo didático chamado de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), que amplia o sistema didático para integrar o chamado esquema herbartiano⁴. A forma reduzida do esquema é a seguinte: $S(X; Y; Q) \Rightarrow R^\heartsuit$

O esquema indica que os estudantes X investigam sobre uma pergunta Q sob a direção de Y, no intuito de dar uma resposta R à Q. Isto é, uma pergunta Q é explorada e uma resposta R deve ser produzida. Esse processo é indicado pela seta \Rightarrow . O símbolo \heartsuit como expoente de R, representa a relatividade institucional do saber, isto é, que a resposta R é produzida sob determinadas condições restrições próprias dessa instituição. (CHEVALLARD, 2009).

A elaboração de R^\heartsuit a partir de Q supõe então a "fabricação", por parte do sistema S, de um *milieu* didático M, um meio de exploração e de construção da resposta Q. Isto é denotado como segue: $[S(X; Y; Q) \Rightarrow M] \Rightarrow R^\heartsuit$ (esquema herbartiano)

O esquema herbartiano, semidesenvolvido, indica que o sistema didático constrói e organiza (\Rightarrow) o *milieu* M como o qual produzirá (\Rightarrow) uma resposta R^\heartsuit . Para Chevallard (2009a),

M não está construído de antemão, se constrói de forma paralela à busca de respostas. A construção do *milieu* M implica ativar os gestos

⁴ Chamado de esquema herbartiano pelo o pedagogo alemão, Johann Friedrich Herbart (1776-1841) quem é considerado como o pai da pedagogia científica.

em cinco momentos: observar, analisar, avaliar, desenvolver, difundir e defender objetos, obras, recursos, informação etc. que possam ser incorporados, total ou parcialmente, ao *milieu* e ser parte indispensável na construção da resposta R^\heartsuit . (CHEVALLARD, 2009a, p.20, tradução nossa)

O *milieu* M é o conjunto de todos os recursos úteis para a construção de R^\heartsuit . Pode ser representado como: $M = \{R_1^\circ, R_2^\circ, R_3^\circ, \dots, R_n^\circ, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}$.

Assim, o esquema herbartiano desenvolvido ficaria representado como segue:

$[S(X; Y; Q) \Rightarrow \{R_1^\circ, R_2^\circ, R_3^\circ, \dots, R_n^\circ, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \Rightarrow R^\heartsuit$

O autor assevera que

Os elementos de R_i° para $i = 1, \dots, n$ são as respostas "carimbadas", "validadas" por instituições como por exemplo, o livro de classe, um site, o curso do professor, apontes de cátedra etc. Os elementos de Q_j para $j = n + 1, \dots, m$ são perguntas derivadas de Q , isto é, perguntas formuladas a partir da procura de dar resposta a Q . Os elementos de O_l para $l = m + 1, \dots, p$ são obras, teorias, montagens experimentais, praxeologias que se acredita úteis para desconstruir a resposta R^\heartsuit . (CHEVALLARD, 2009b, p.21-23, tradução nossa)

Com a introdução do esquema herbartiano, Chevallard (2009a, 2009b) propõe que os Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) partem de uma pergunta geratriz Q , de maneira que na procura de uma resposta, leva a gerar outras perguntas derivadas de Q em função das necessidades de conhecimento gerados no estudo de Q .

Algumas das características dos PEP são: É gerado a partir de uma pergunta Q , denotada geratriz, pois sua resposta não é imediata; para sua resposta, é necessário formular outras perguntas derivadas de Q . A construção do *milieu* didático M é simultânea à construção de respostas. O professor não é o possuidor absoluto do saber. Para Chevallard (2012), os estudantes ampliam suas possibilidades de ação, formulando perguntas, procurando recursos e fontes de informação, constroem respostas, as avaliam e as defendem de maneira crítica a outros estudantes. O PEP é codisciplinar, para Chevallard (2009a), isto é, o aluno precisará mobilizar várias ferramentas praxeológicas de vários quadros da matemática, estabelecendo relações entre diferentes disciplinas.

Dependendo da pergunta geratriz e do gerenciamento dela, o autor indica que os PEP podem ser abertos, semiabertos e fechados (CHEVALLARD, 2017). O autor ainda afirma que

De maneira sub-reptícia, o professor pode impor um certo percurso que leva a classe a conhecer (e confrontar) as noções matemáticas escolhidas previamente pelo mesmo professor. Mais sutilmente, o professor pode ter escolhido a pergunta para investigar de tal maneira que, sob as restrições vigentes, o percurso passe quase necessariamente por esta ou aquela obra matemática. No primeiro caso, falo de um **percurso fechado**; no segundo, de um **percurso**

semiaberto. Chamarei aberto um percurso em que o papel desempenhado pelo professor é puramente negativo, no sentido de que o professor, como "chefe de investigação", conforma-se com impor de vez em quando a decisão de não ir encontrar tal ou qual obra, que lhe parece estar ainda fora do alcance do grupo de estudantes. Só neste caso falarei de **percurso aberto**. (CHEVALLARD, 2017, p. 168-169, tradução minha).

O autor (1989, 1991 e 2009a) indica três funções didáticas ou funções de produção denotadas como **cronogênese** (avanço de estudo), **mesogênese** (evolução do *milieu*) e **topogênese** (evolução das responsabilidades entre as posições de professor e aluno).

O estudo de uma pergunta Q é concretizado em um PEP cuja duração pode variar. Mais amplamente, a descrição e análise de PEP (especialmente do ponto de vista triplo da topogênese, mesogênese e cronogênese) é um problema fundamental do TAD (CHEVALLARD, 2011b, p. 29).

Além das funções didáticas, Chevallard (2001c, 2007, 2009a) indica que o ensino por meio do PEP envolve formas de fazer ou gestos de estudo e pesquisa chamadas dialéticas (*Dialética do estudo e pesquisa, Dialética do individual e do coletivo, Dialética média – milieu, Dialética da análise e da síntese praxeológica e didática, Dialética de entrada e saída do tema, Dialética do paraquedista e das trufas, Dialética das caixas negras e caixas claras, Dialética da leitura e da escritura, Dialética da difusão e da recepção*), para pôr em marcha, pilotar, organizar e ao mesmo tempo descrever o processo de estudo.

No próximo tópico, teço algumas reflexões sobre o Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP) que tem a mesma estrutura do PEP.

Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP)

Pesquisas como as de Ruiz-Olarría (2015), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2015), Barquero, Florensa, Hausberger e Romo-Vázquez (2016), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2016), Licera (2017), Sierra e Gascón (2018), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2018), Benito (2019), Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2019) e Florensa, Bosch e Gascón (2019) apresentam o dispositivo didático do Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores.

O percurso de estudo e pesquisa para formação de professores tem como objetivo familiarizar aos professores em formação inicial ou em formação continuada com o PEP como um dispositivo didático útil para seu desenvolvimento profissional.

O objetivo é ir preparando uma transição efetiva do paradigma monumentalista ao paradigma de questionamento do mundo, a própria formação de professores necessita de dispositivos didáticos não fundamentados unicamente no paradigma monumentalista e, por isso, se deve recorrer de alguma forma a dispositivos com estrutura do

tipo PEP (Estudo de questões, mídias, *milieux*). (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 136, tradução nossa).

Para Ruiz-Olarría (2015), o PEP-FP também inicia com uma questão geratriz Q_0 -FP a qual deve ser formulada para a busca de contextos ligados na formação de professores, esta deve focar um objeto de ensino a ser trabalhado considerando o nível escolar em que estes professores estão inseridos.

Todo processo de formação surge para responder a uma pergunta problemática Q_0 . No caso da formação de professores, o ponto de partida é uma questão vital e crucial para a profissão de professor que chamamos de Q_0 -FP. Para dar resposta a essa pergunta, o processo de formação é articulado em cinco módulos e é justamente o estudo dessa pergunta inicial que dará origem ao PEP-FP, permitindo ao mesmo tempo articular os módulos que o compõem e mostrar sua funcionalidade. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 137, tradução minha).

Como indicado por esses autores, o PEP-FP se desenvolve em 5 módulos (M_0 , M_1 , M_2 , M_3 e M_4) que são articulados durante o percurso. Segundo Ruiz-Olarría (2015); Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2015); Sierra e Gascón (2018); Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2018); Florensa, Bosch e Gascón (2019); Barquero, Bosch e Romo-Vázquez (2019) e Ruiz-Olarría, Bosch e Gascón (2019), os módulos do PEP-FP são:

Módulo M_0 : *Tornar explícitas as razões de ser do PEP-FP*, esse módulo. inicia-se com uma pergunta geratriz do tipo, como ensinar um conteúdo matemática específico C ? Esta pergunta é a que se pretende dar resposta, ao menos parcialmente, ao finalizar o processo de estudo.

O que é C ? De onde surgiu? Em quais âmbitos matemáticos e não matemáticos se utiliza ou utilizava? Por que se deve ensinar C ? Quais são suas razões de ser na matemática escolar (as estabelecidas explícita ou implicitamente e as potenciais)? Quais propostas de ensino existem? O que se sabe delas? etc. (RUIZ-OLARRÍA, 2015, p. 138, tradução minha).

O desenvolvimento desse módulo é feito mediante a procura de informação disponível como resultados de pesquisa, as diretrizes do currículo, e outras propostas inovadoras. Esse módulo é transversal aos outros módulos e vai se manter aberto durante todo o percurso, pois coleta os resultados dos outros módulos do PEP-FP.

Em nosso caso, nossa pergunta Q_0 -FP é como ensinar os quadriláteros? Com perguntas parciais como: Por que se deve ensinar os quadriláteros? Quais são suas razões de ser dos quadriláteros na matemática escolar? Quais propostas de ensino dos quadriláteros existem? O que se sabe dos quadriláteros?

Módulo M_1 : *Viver um PEP*, neste módulo, os professores são devem atuar como estudantes de um PEP que é apresentado como uma possível resposta ao Q_0 . Nesta perspectiva, os autores afirmam que

Esse módulo tem como objetivo familiarizar aos professores com uma atividade matemática normalmente desconhecida e que pode existir até certo ponto em uma sala de aula comum. Os formadores atuam como "professores" do PEP, orientando o processo de estudo e pesquisa com um contrato didático muito mais aberto que o tradicional. (FLORENSA, BOSCH E GASCÓN, 2019, p. 384, tradução minha).

Este módulo, tem como finalidade que o professor conheça o que é um PEP e como gerenciá-lo, mas para isso deve de ter vivido um PEP na posição do estudante.

Módulo M₂: *Analisar o PEP vivido*, depois de ter vivenciado o PEP no módulo M₁, neste módulo procura-se que o professor analise as tarefas sob uma perspectiva praxeológica, didática e ecológica, focando no problema das condições e limitações existentes para implementar esse tipo de dispositivo de ensino nas instituições escolares.

Módulo M₃: *Desenho de um PEP*, neste módulo, o professor deve desenhar um PEP para um grupo específico de estudantes, para isto deve considerar o trabalho nos anteriores módulos e as restrições institucionais.

Adotando um papel preliminar de designers, propõe-se adaptar e desenhar sua própria versão de atividade para um grupo específico de estudantes. Durante essa adaptação, espera-se que diferentes restrições institucionais surjam, por exemplo, rigidez curricular, distribuição de tempo, papéis tradicionais assumidos por professores e alunos, entre outros, e que sejam os próprios professores que os façam explícitos. (BARQUERO, BOSCH E ROMO-VÁZQUEZ, 2019, p. 494, tradução minha).

Este módulo procura que o professor consiga desenhar um PEP considerando o vivido, analisado e conhecido nos módulos M₀, M₁ e M₂.

Módulo M₄: *Gerenciar e experimentar um PEP*, o objetivo desse módulo é o apoio aos professores que começam no desenho e no gerenciamento dos PEP, e a coleta dos problemas, dificuldades e obstáculos que possam surgir durante a aplicação do PEP na sala de aula.

A seguir apresentamos uma relação entre o PEP é a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa para uma proposta de um PEP-FP.

Engenharia Didática como metodologia de pesquisa e desenho do PEP

A noção de Engenharia Didática (ED) surgiu na didática da matemática no início dos anos 80. Segundo Artigue (1988, 1995), esse termo foi denominado pela forma de trabalho no ensino comparável ao trabalho do engenheiro. A autora, argumenta que o professor concebe, executa, observa e analisa sequências de ensino para alcançar a aprendizagem de um conteúdo matemático em um grupo específico de estudantes.

A Engenharia Didática (ED) possui as seguintes fases:

Primeira fase: Análise preliminar. Segundo Artigue (1995) nesta análise é realizada distinguindo três dimensões: *epistêmica* (associada às características do saber posto em jogo), *cognitiva* (associada às características cognitivas dos estudantes aos que está dirigida o ensino) e *didática* (associada às características do funcionamento do sistema de ensino). Mas a mesma autora, (Artigue, 2015) reorganiza estas dimensões e as apresenta como: Análise epistemológica, análise institucional e análise didática.

Uma análise epistemológica do conteúdo em jogo, incluindo frequentemente uma parte histórica. Essa análise ajuda os pesquisadores a fixar os objetivos precisos da ED e a identificar possíveis obstáculos epistemológicos a serem enfrentados. Também apoia a busca de situações matemáticas representativas do conhecimento visado, o que a teoria das situações didáticas chama de situações fundamentais. São situações problemáticas para as quais o conhecimento é necessário ou, em certo sentido, ideal. A análise epistemológica ajuda os pesquisadores a tomar a posição reflexiva e a distância necessárias em relação ao mundo educacional em que estão inseridas e a construir um ponto de referência. *Uma análise institucional* cujo objetivo é identificar as características do contexto em que a ED ocorre, as condições e restrições que enfrenta. Essas condições e restrições podem estar situadas em diferentes níveis do que é chamado de hierarquia de níveis de codeterminação (Chevallard, 2002) na Teoria Antropológica do Didático. [...] *Uma análise didática* cujo objetivo é pesquisar o que as pesquisas têm a oferecer em relação ao ensino e aprendizagem do conteúdo em jogo e provavelmente orientará o design. (Artigue, 2015, p. 472, tradução minha)

Observa-se nesta citação que a autora reorganiza as dimensões da primeira fase da ED considerando aspectos propostos pela TAD.

Segunda fase: Concepção e análise a priori. Nesta fase se identificam as variáveis didáticas, as quais permitem controlar os comportamentos dos estudantes e seus significados. É uma fase descritiva e preditiva.

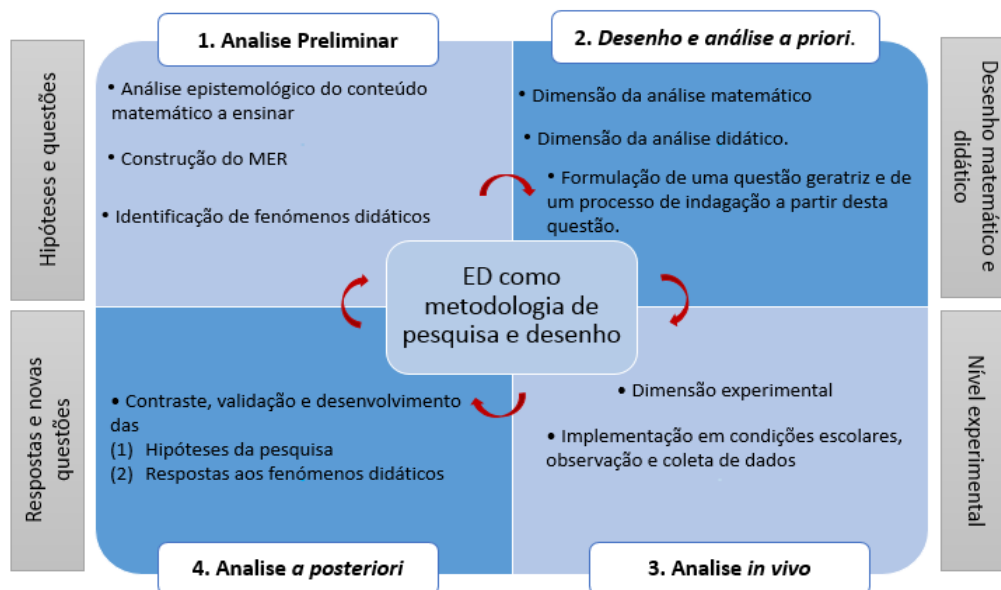
Terceira fase: Experimentação, observação e coleção de dados. Nesta fase, predomina a abordagem entre o professor pesquisador e a população de estudantes, sujeitos à pesquisa. Também são aplicados instrumentos projetados pelo pesquisador e são realizados registros de observação da experiência e a coleta de dados da pesquisa.

Quarta fase: Análise a posteriori e validação. Segundo Artigue (1995), nesta fase, é realizada a análise dos dados coletados nos diferentes momentos da experiência, assim como o confronto entre o conjunto de dados coletados na experimentação, observações da sequência de ensino e produções dos estudantes com o análises a priori.

Bosch e Barquero (2015) e García, Barquero, Florensa, Bosch (2019), levando em consideração os construtos teóricos da TAD, apresentam uma reorganização das fases da Engenharia

Didática (ED), especificamente para a construção, aplicação e análise (engenharia) de um PEP (Figura 2).

Figura 1 - ED como metodologia de pesquisa e desenho do PEP



Fonte: García, Barquero, Florensa, Bosch (2019, p.82, tradução nossa).

Na **fase de análise preliminar**, é preciso fazer o estudo das dimensões do problema didático do objeto matemático em jogo, isto é, a dimensão epistemológica que permite construir um Modelo Epistemológico de Referência (MER), a dimensão económica e a dimensão ecológica, as quais permitem a identificação do Modelo Epistemológico de Dominante (MED).

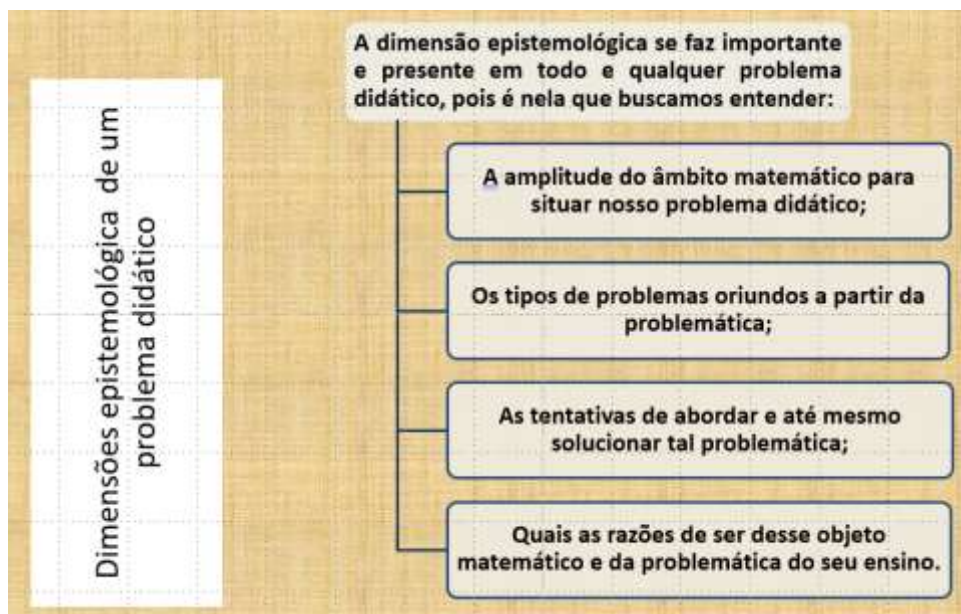
Nesta primeira fase, o estudo epistemológico nos permite a procura das razões ou razão de ser do objeto matemático investigado, tentando responder aos seguintes questionamentos elencados na figura 3.

As respostas a esses questionamentos dão indícios para a elaboração da pergunta Q_0 do PEP a ser vivido com os professores em formação inicial ou continuada.

Na fase de **desenho e análise a priori**, identificamos as questões Q_0 -FP do módulo M_0 , as quais são: Como ensinar o objeto matemático? Por que se deve ensinar esse objeto matemático? E perguntas parciais como, $Q_{0,1}$ -FP: O que dizem os documentos oficiais sobre esse objeto, sobre seu ensino e sua aprendizagem? $Q_{0,2}$ -FP: O que dizem livros didáticos sobre esse objeto? $Q_{0,3}$ -FP: Como esse objeto é ensinado? $Q_{0,4}$ -FP: Quais são as razões de ser do ensino desse objeto? O que dizem a história e os cientistas sobre esse objeto? $Q_{0,5}$ -FP: O que se sabe desse objeto? O que precisa saber sobre esse objeto para ensiná-los. Além disso, o desenho do PEP a ser vivido no módulo M_1 do PEP-FP é feito, assim como o mapa de questões e respostas⁵ preliminares.

⁵ O Mapa de questões e respostas é um esquema usado para enfatizar principalmente a dialética e a estrutura semântica de perguntas e respostas, às custas, por exemplo, da maneira como elas se desdobram no tempo. Winslow, Matheron e Mercier (2013, p. 271, tradução nossa)

Figura 2 - Questões para o estudo da dimensão epistemológica



Fonte: Construção própria

Para a construção da pergunta Q_0 do PEP a ser vivido, surge a partir do estudo epistemológico do objeto matemático em jogo, determinando a razão de ser histórica

Nesta segunda fase, Bosch e Barquero (2015) afirmam que se deve levar em conta as funções didáticas da mesogênese (evolução dos milieux experimentais), cronogênese (evolução das novas questões e o conhecimento introduzido pela mídia) e topogênese (compartilhamento de responsabilidades entre professor e estudantes).

Na fase da **Análise *in vivo***, aplica-se os módulos do PEP-FP (M_0 , M_1 , M_2 , M_3 e M_4) com professores ou futuros professores de matemática e que atuam em diferentes níveis do sistema educativo.

A coleta de dados poderia ser feita por meio de fichas de trabalhos, gravações em vídeo e em áudio das discussões que apareçam, assim como o mapa de questões e respostas produzidos no percurso da aplicação, fóruns de discussão em ambiente de tecnológico.

Em caso seja possível a aplicação do PEP construído no módulo M_3 por um professor participante da formação, deve-se apoiar, monitorar e observar as sessões da fase experimental.

Na fase da **Análise *a posteriori***, far-se-ia uma análise dos dados recolhidos durante a fase anterior (experimentação – Análise *in vivo*), a validação do desenvolvimento tanto do PEP como o PEP-FP por meio das dialéticas supracitadas. Além disso, faremos um estudo das condições e restrições dos módulos do PEP-FP pelo intermédio das funções didáticas da mesogênese, cronogênese e topogênese. Deve-se avaliar, também, as hipóteses das pesquisas feitas na primeira etapa da ED.

Referências

- Artigue, M. (1988) Engenharia Didática. In: BRUN, Jean (Org.). Didáticas das Matemáticas. Tradução de Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, Coleção Horizontes Pedagógicos, cap. 4, p.193-217.
- _____. (1995) Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R, Moreno, L., Gómez, P. (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática: un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Bogotá: Grupo editorial Iberoamérica.
- _____. (2011) Les questions de développement curriculaire à traves un exemple: l'enseignement de l'analyse en France au lycée depuis le début du XXème siècle. Revista Quadrante, vol XX, nº2, p. 109-131.
- _____. (2015) Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education, p. 467–496. doi:10.1007/978-94-017-9181-6_17
- Barquero, B., Bosch, M., Gascón, J. (2013) Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. Revista Educação Matemática e Pesquisa, 15 (1), p. 1 – 28.
- Barquero B., Bosch, M. Romo-Vázquez, A. (2015) A study and research path on mathematical modelling for teacher education. In: Proceedings of the 9th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education. (CERME 9).
- _____. (2018) Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. ZDM Mathematics Education 50: 31.
- _____. (2019) El uso del esquema Herbartiano para analizar um REI online para la formación del profesorado de secundaria. Educação matemática e pesquisa, v.21, n.4, p. 493-509.
- Barquero, B. ; Florensa, I ; Hausberger, T. ; Romo-Vázquez, A. (2016). La prise en compte du collectif dans l'analyse de deux parcours d'étude et de recherche en ligne. Enjeux et débats en didactique des mathématiques : 18ème École d'été de Didactique des Mathématiques, La pensée sauvage, p.457-486. {hal-01323676}
- Bosch, M. (2018) Study and research paths: a model for inquiry. In: International Congress of Mathematics. Rio de Janeiro, Brazil.
- Bosch, M.; Garcia, F.J; Gascón, J.; Ruiz-Higuera, A. (2006) La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Educación Matemática, 18(2), p. 37-74.
- Bosch, M. ; Gascón, J. (2005) La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. Em A. Mercier & C. Margolinas (Coord.) Balises en Didactique des Mathématiques, pp. 107-122. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- _____. Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (2014). In: Bikner-Ahsbabs A., Prediger S. (eds) Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education. Springer.

- Brousseau, G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions, v.7, n.2, p.33-115, 1986.
- Chevallard, Yves (1991). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions.
- _____. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. In : Recherches en Didactique des Mathématiques. v. 19. N° 2. 1999, p.221-266.
- _____. (1989) Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. Grenoble : IREM d'Aix-Marseille.
- _____. (1991) La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Grenoble (2^a edición).
- _____. (1997) La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique, Buenos Aires.
- _____. (1999) El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches em Didactique Mathématiques, Vol 19, n. 2, p. 221-266.
- _____. (2001a) Aspectos problemáticos de la formación docente. Conferencia impartida en las XVI Jornadas del seminário interuniversitário de Investigación en Didáctica de las Matemáticas. Escuela del Magisterio Huesca. Universidad de Zaragoza, 2001a.
- _____. (2001b) Les mathématiques et le monde : dépasser l'horreur ins-trumentale, Quadrature, núm. 41, p. 25-40.
- _____. (2001c) Les TPE comme problème didactique. Comunicação ao Seminário Nacional de Didática Matemática. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=14.
- _____. (2002a) Organiser l'étude. 1. Structures & Fonctions. Actes de la 11^e École d'Été de Didactique des Mathématiques. France : La Pensée Sauvage. 2002. Versão eletrônica.
- _____. (2002b) Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (Eds.), Actes de la 11^e École d'Été de Didactique des Mathématiques, p. 41 – 56. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.
- _____. (2003) Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. Communication aux 3^{es} Journées d'étude franco-québécoises (Université René-Descartes Paris 5, 17-18 juin 2002). Paru dans S. Maury S. & M. Caillot (éds), *Rapport au savoir et didactiques*, Éditions Fabert, Paris, p. 81-104.
- _____. (2007) Passé et present de la Théorie Anthropologique de Didactique. En A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.
- _____. (2009a) La notion de PER: problèmes et avancées. Texto de uma apresentação apresentada à IUFM de Toulouse. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

- ____. (2009b) La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 15e école d'été de didactique des mathématiques, p. 16-23.
- ____. (211a) Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. Séminaire de l'ACADIS. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=208
- ____. (2011b) Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD ? En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G..., M. Larguier (Eds), Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico. Un panorama de la TAD, Vol 1, pp. 23-32. Cataluña, España: Centre de Recerca Matemàtica. Disponible en : <http://yves.chevallard.free.fr/>.
- ____. (2012) Théorie Anthropologique du Didactique, Ingénierie Didactique du Développement. Disponible en <http://yves.chevallard.free.fr/>
- ____. (2013) Enseñar matemática en la Sociedad del Mañana : Alegato a favor de un contraparádigma emergente. REDIMAT, Journal of Research in Mathematics Education, V2, n. 2, p. 161-18.
- ____. (2017) ¿Por qué enseñar matemáticas en secundario? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 20(1), p.159-169.
- García, F.J.; Baquero, B.; Florensa, I.; Bosch, M. (2019) Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Avances de Investigación en Educación Matemática, 15, p.75-94.
- Gascón, J. (2011) Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 14 (2), p. 203-231.
- ____. Efectos del autismo temático sobre el estudio de la Geometría secundario II. La clasificación de los cuadriláteros convexos. Revista SUMA, 45, p. 41 – 52, 2003.
- ____. (2014) Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la Didáctica Y La Historia De Las Matemáticas. Educación Matemática, P. 99-123, 2014.
- Ruiz-Olarría, A. (2015) La Formación Matemático-Didáctica del Profesorado de Secundario. De las Matemáticas por Enseñar a las Matemáticas para la Enseñanza. Tesis de Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid. Madrid/ES.
- Ruiz-Olarría, A.; Bosch, M.; Gascón, J. (2019) Construcción de una praxeología para la enseñanza en la institución de formación del profesorado. Educación matemática, v.31, n.2.