CURIOSIDADES CRIATIVAS NA HISTÓRIA DO CONCEITO DE FUNÇÃO: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO

Iran Abreu Mendes
iamendes1@gmail.com

Universidad Federal de Pará-UFP, Brasil

Resumen

En esta conferencia tomaré como supuesto inicial que el conocimiento matemático contiene una composición epistemológica siempre conectada a la 4dinámica sociocultural de la producción de conocimiento en sus múltiples niveles (sociedad, escuela, ciencia, tecnología, religión, etc.), cuyas combinaciones epistémicas están organizadas de manera lógica para que diferentes grupos sociales puedan enunciar sus formas de ver lo que llamamos matemáticas. Se trata de proceder con un proceso de creación o invención basado en las ideas defendidas por Poincaré (1908) y otros que apoyan mis argumentos sobre la creatividad del desarrollo histórico de conceptos matemáticos para su enseñanza, como el concepto de función, considerando sus formulaciones y reformulaciones históricas, las que pueden explorarse pedagógicamente como una contribución conceptual y didáctica para enseñar esta materia en las clases de matemáticas de hoy.

Palavras-chaves: *Criatividade. História da matematica. Conceito de função. Ensino de funções.*

Introdução

> A imaginação é mais importante que o conhecimento. O conhecimento tem seus limites (Albert Einstein).

A expressão de Albert Einstein, tomada como epígrafe de abertura desta introdução ao tema deste trabalho, deixa explicitamente evidente o quanto a relação entre o exercício da imaginação criativa é capaz de nos possibilitar a habilidade para se dar um passo sempre a frente em um processo de invenção que se desdobre em conhecimento novo, pois se levarmos em conta um antigo provérbio cujo enunciado afirma que *a necessidade é a mãe da invenção*, poderemos nos perguntar: essa proposição afirmativa também se aplica à criatividade? Um pensador pragmático responderia "sim", porque não há diferença entre invenção e criatividade. Assim estaria terminando o debate sobre esse tema.

No entanto, esta simples resposta não parece ser suficiente para se tornar satisfatória a um pensador reflexivo e inquiridor, pelo menos não no que diz respeito à matemática. Se é inegável que a invenção passa por processo que emanam criatividade, é verdade que essa necessidade é sempre a causa subjacente? Não se pode negar que a invenção desempenha um papel importante na criação matemática embora não seja suficiente, pelo menos no se refere à experiência criativa e sua sistematização que caminhe para a elaboração teórica. Não se trata somente disso, uma vez que a criatividade está no coração da matemática e é o exemplo perfeito para uma discussão sobre a arte criadora na produção matemática em todos os tempos e espaços nos quais se estabelece a cultura humana.

A esse respeito, destaco um fragmento do registro de uma palestra proferida por Herbert Spencer em Oxford, no ano de 1933, no qual Albert Einstein comentou o seguinte:

> até agora, nossa experiência nos permite acreditar que a natureza é o produto de idéias matemáticas que são simplesmente imagináveis. Estou convencido de que podemos descobrir, através de construções puramente matemáticas, os conceitos e leis que organizam essas ideias (EINSTEIN, 1933)[6].

A expressão de Einstein deixa transparecer o quanto as ideias imaginadas estão, muitas vezes, a frente do que admitimos como possível, más que podem nos levar a tornar outras coisas possíveis, desde que apostemos na ousadia da imaginação de modo a torná-la o mais real possível. Esse é verdadeiramente um exercício de criação. Entretanto, o ingrediente que falta para colocar em prática, os exercícios de criação é a curiosidade. No caso de vários investigadores criadores em matemática, muitas vezes, foi o impulso dado por uma pergunta simples: *¿e se?* Trata-se verdadeiramente de um momento em que pode surgir toda uma dinâmica criativa por meio da curiosidade, tal como o fez Arquimedes em seu tempo.

Neste trabalho convidamos o leitor a pensar um pouco sobre os múltiplos processos operacionalizados pelo pensamento e pelas práticas matemáticas em busca de explicação para o modo de ser e de estar dos objetos matemáticos em suas correlações no contexto sociocultural ao longo da nossa história humana, visando compreender como esses modos de ser e estar foram e são captados pela mente de quem exercita a criatividade na criação matemática em todas as suas dimensões, para assim produzir conhecimento a ser disseminado no contexto escolar e científico. Neste sentido tomarei aspectos relativos ao desenvolvimento histórico do conceito de função como foco intencional para este processo de pensar sobre o tema central: a criatividade na criação matemática ao longo de sua história e o potencial de uso no ensino de matemática.

Sobre criatividade e criação matemática

Os fundamentos teóricos que sustentam as discussões apresentadas em diversos artigos e livros que publiquei desde 2001, quase sempre convergem para princípios investigativos, ou seja, sobre o que é investigação, como praticar, como se aprender por meio da investigação, como se conhece investigando, dentre outros aspectos epistemológicos acerca desses princípios. Nesses artigos e livros tais ideias transparecem como matrizes teóricas nas quais me apoio para dialogar com princípios que sustentam minhas pesquisas sobre *História da matemática e Práticas Socioculturais*, com vistas a desenhar fundamentos epistemológicos para o ensino de matemática na Educação Básica e Superior.

[6] Palavras de Albert Einstein sobre uma palestra de Herbert Spencer, em Oxford, em 1933.

Assim, a perspectiva da cultura matemática imbricada em práticas socioculturais não é de se encerrar a conformação do objeto em limitações epistêmicas porque como se trata apenas de uma forma para se focalizar vetorialmente o objeto na dinâmica sociocultural de produção de conhecimento humano, o aspecto matemático destacado por esse olhar nunca conformará uma dimensão plural desse conhecimento. Isto porque a dinâmica sociocultural, que é humana, não se encerra nunca; e como ela não encerra nunca, sempre surgirão elementos agregadores para que possamos fazer uma nova caracterização do que pode ser explicitado como cultura matemática material ou imaterialmente estabelecida por meio de um processo no qual a criatividade é essencial. E o mais importante é que essa dinâmica de criação vem justificar a mesma configuração epistemológica que a matemática evidencia em todo os eu desenvolvimento histórico, assim como o seu comportamento epistemológico como um certo jogo imaginativo, inventivo e inovador que se organiza por meio de combinações e rigores próprios em linguagem e técnica – eu diria um tipo de composição que não se fecha nunca, para oportunizar novos processos de criação e ampliação conceitual, embora a representação sociocultural de matemática faça emergir alguns sentidos como "uma conta" (uma expressão algorítmica que envolve aritmética ou álgebra), como "uma forma geométrica" (expressão geométrica que envolve medidas, proporcionalidade ou construções geométricas), ou outras expressões desse tipo. Todavia, a composição epistemológica do que pode ser concebido como matemática tem uma dinâmica que faz emergir múltiplos jogos combinatórios lógicos, de modo que sempre possa caber alguma explicação a mais, para ampliar sentidos e significados, e assim alargar o campo de criação matemática.

No meu entendimento a cultura matemática tem essa composição epistemológica em formação contínua, porque sempre recorre à dinâmica sociocultural de produção de conhecimento em seus múltiplos patamares (sociedade, escola, ciência, tecnologia, religião, etc), cujas combinações epistêmicas, se organizam de maneira lógica para que esse conhecimento que denominamos matemático, amplie nosso olhar nos modos como os diferentes grupos sociais podem enunciar determinados olhares sociais sobre aquilo que nos chamamos de matemática.

Trata-se, portanto, de proceder em exercícios de olhar sobre como a sociedade produz suas ideias, suas leituras do mundo, e que se torna enriquecedor, possibilitando que imaginemos mais possibilidades de diálogo com o mundo. Isto é o mais importante para adentrarmos em um caminho de compreensão da dinâmica cultural na qual a matemática se insere, ou seja, que se constitua em um movimento no qual os exercícios de olhar sobre os modos como a sociedade produz ideias, e que é enriquecedor. Talvez seja nesse princípio humano, logo sociocultural, que se assenta toda base epistemológica da matemática. Não se trata de se despir de um olhar formalizado, mas admitir que temos um olhar uno e múltiplo, singular e plural, portanto imaginativo e inventivo, que nos despe do nosso pensamento técnico para emprestar o pensamento lúdico do outro, que também é um modo de olhar. E quando pedimos o olhar do outro para também olharmos as coisas, começamos a criar possibilidades de ter conosco todos os olhares sobre as coisas.

E neste caso esse movimento sustentado pela sociodinâmica dos olhares culturais é que dá um caráter transdisciplinar à matemática, tal como estão presentes nas histórias das matemáticas produzidas nos tempos e nos espaços, fazendo emergir daí pontos de sustentação epistemológica, como podemos ver nas histórias da cultura humana, de um modo geral, sempre com possibilidades de olharmos e emprestarmos os vários olhares para podermos ter uma amplitude maior sobre o objeto que queremos olhar. Esse é o modo característico do pensamento transdiciplinar, complexo, e que a matemática historicamente produzida também se materializa por este olhar. Se não exercitamos esse olhar, dificilmente conseguimos fazer matemática como cultura humana. Porque se restringirmos nosso olhar perderemos muitos aspectos a serem observados e, portanto, refletidos. Logo, esse é um ponto principal, ou seja, a base epistemológica para se pensar a matemática humana em sua diversidade e ao mesmo tempo unicidade; singularidade e pluralidade.

É com esse princípio que podemos abordar o processo de criação ou invenção em matemática. Para tanto podemos partir das ideias advogadas por Poincaré (1908) para formular argumentos baseados no fato de que a gênese da criação matemática é um problema que deve inspirar o mais vivo interesse do psicológo, uma vez que se trata de uma ação cognitiva humana de processar modos de compreender e explicar fatos que forjam os modos de existir do mundo exterior e os processos internos de organização dessa compreensão e explicação no interior de cada humano em seus processos de comunicação sociocultural. Todavia, há uma questão provocativa no discurso de Poincaré: o que é, de fato, essa invenção matemática?

Para Poincaré (1908), não se trata apenas de fazer novas combinações com entes matemáticos já conhecidos, pois qualquer um poderia fazê-las e assim poder obter um número finito de resultados. Logo, inventar não significa somente ou apenas combinar para gerar coisas às vezes até inúteis, mas sim produzir para poder fazer escolhas que sejam úteis. Neste sentido, o autor assevera que os fatos matemáticos dignos de serem estudados são aqueles que, por analogia com outros fatos, podem nos conduzir ao conhecimento de novas teorias matemáticas assim como as experimentações nos favorecem conhecer melhor as fundamentações do conhecimento do mundo físico. Poincaré assevera, ainda, que a invenção se processa como se o inventor fosse um examinador de segundo nível, que não teria que interrogar senão os candidatos declarados elegíveis após uma primeira prova.

Criatividade no desenvolvimento histórico do conceito de função

A ideia da relação entre quantidades é tão antiga quanto a Matemática. Mas qual tem sido o caminho que conduziu desse sentido tão vago à concepção teórico-contemporânea de uma *função ou aplicação*, que estabelece correspondência entre elementos de um conjunto com um elemento de outro conjunto? E quais foram as diferentes representações do conceito de função ao longo da nossa história, como um conceito que se constitui central no desenvolvimento da análise? Essas são algumas das questões que moveram o exercício criativo em matemática para o desenvolvimento desse tema denominado conceitual de função.

Já na Antiguidade a ideia de função aparece exposta como relação entre grandezas na matemática babilônica, nas tábuas sexagesimais, nas relações entre quadrados e raízes quadradas, cubos e raízes cúbicas, dentre outros aspectos como medidas referentes à astronomia antiga, particularmente nas observações estelares, solares, lunares e de outros planetas. É também desse período antigo as atribuições clássicas dos pitagóricos nas relações entre medidas relacionadas à geometria, astronomia, como por exemplo as tábuas astronômicas presentes no Almagesto de Ptolomeu.

As noções de função a partir das correspondências entre medidas de grandezas e valores transparece como uma concepção moderna. Entretanto, a ideia intuitiva sobre quantidade variável é muito antiga. Neste sentido, as matemáticas práticas emergentes do trabalho de Arquimedes remetem ao conceito de variável, limite e consequentemente ao conceito de função. O mais importante dessa dinâmica conceitual é o processo criativo estabelecido desde esses tempos remotos até a contemporaneidade, para se reinventar o conceito e se ampliar os horizontes epistemológicos sobre o assunto.

As dinâmicas concernentes ao desenvolvimento da criatividade na criação do conceito de função e sua epistemologia avança da Antiguidade clássica como no estágio zero ou de tendência técnica preliminar mencionado por Ervynck (1991) seguido pelo estágio 1 das atividades algorítmicas embrionárias estabelecidas por Nicolau de Oresme até às escolas de Oxford e de Paris, com as primeiras representações, como momentos teóricos extremamente importantes caracterizados pelos estudos dos movimentos ao das trajetórias dos corpos físicos.

Tal processo criativo históricamente construídos por filósofos e matemáticos apontam para uma dinâmcia que convergiu para a ampliação dos exercícios inventivos que levaram a história do desenvolvimento do conceito de função ao estágio 2, concernente às atividades criativas (conceitual, construtiva), caracterizadas pelos modelos de função, como por exemplo a função logarítmica originada do trabalhos de John Napier (1550-1817) e o trabalho de René Descartes (1637) sobre as curvas geométricas e as funções algébricas que representaram tais curvas.

Das ideias de Descartes pode-se considerar que as atividades criativas sobre o conceito de função avançaram em direção aos algorítmos infinitos originados pelo método de John Walis em seu *Arithmetica Infinitorum*, que originaram novos estudos em direção a um novo objeto matemático estabelecido pelos princípios e leis das variações, concretizados pelos trabalhos de Newton e Leibniz, ampliando esse conceito em extensão e significado, que retomou os embriões plantados por Arquimedes, Cavalieri, Oresme e Descartes. Tratava-se, portanto, da continuidade do estágio das atividades criativas que avançaram em direção ao estabelecimento da análise algébrica produzida, principalmente, no século XVIII, por meios dos trabalhos de Leonhard Euler (1707-1783) e de Daniel Bernoulli (1700-1782), que posteriormente abriram espaços para o fenômeno das funções multiformes.

É nesse movimento criativo que surge a obra *Introductio in analysin infinitorum* (Introdução da análise infinita), de Leonhard Euler (1748), que passou a dar outro contorno ao conceito e novas configurações algorítimicas ao assunto, de modo a evidenciar um espírito de invenção, dotado de uma técnica muito segura e confiável para obter resultados novos e variados.

Assim, o conceito de função na matemática de Euler, passou a contribuir sobremaneira para o desenvolvimento da análise algébrica, e que revelou um fenômeno ainda desconhecido sobre as funções e sua classificação formal como funções algébricas (racionais: inteiras e fracionárias e irracionais: explícitas e implícitas) e transcendentes como as funções trigonométricas, logarítmicas, exponenciais, etc.

Implicações para o ensino de Matemática

No final do século XIX as noções de função passaram a exercer uma importância decisiva na organização das matemáticas escolares, influenciando fortemente os currículos do ensino de Matemática. A abordagem proposta por Felix Klein, para a inserção do conceito de função no curso secundário e superior, naquele período, exerceu forte influência nos principais centros de estudos sobre Matemática e universidades, de modo a implicar na criação de disciplinas escolares relativas à Matemática com ênfase nos aspectos ligados à funcionalidade. Assim, o conceito de função, centrado nas ideias de variabilidade e interdependência, ocasionadas pelos estudos sobre o desenvolvimento do cálculo, já mencionados anteriormente, passou a ser tomado como princípio unificador do ensino de Matemática[7].

A esse respeito, em 1893, durante um Congresso Internacional de Matemática, ocorrido em Chicago, Felix Klein apresentou para os professores presentes no evento, uma proposta que defendia a conveniência de adoção do conceito de função como eixo central unificador do ensino de Matemática. Posteriormente em 1904 persistiu no tema em uma conferência proferida em Götingen, quando argumentou favoravelmente acerca do principal objetivo do ensino da Matemátiuca no curso secundário, quando sugeriu que o ensino de Matemática deveria priorizar uma correlação com diversas partes de temas integrantes da formação intelectual dos estudantes, como por exemplo a noção de função e sua representação geométrica e analítica (gráfica), apoiada na ideia de dependência entre duas grandezas variáveis, tais como já vinha sendo anunciada desde os trabalhos de Nicolau de Oresme até Euler, ou seja, um processo de criação funcional que tinha uma trajetória de desenvolvimento há mais de quatro séculos, por meio de um processamento criativo (cf. ROXO, 1937).

Assim, o conceito de função passou a ser visto como um dos objetos principais do ensino de Matemática. Logo, haveria necessidade de uma reorganização dos conteúdos de Matemática no curso secundário e superior, em vistas das novas propostas de abordagens didáticas e conceituais para tal assunto, considerado de importância decisiva para o desenvolvimento científico e tecnológico do século XX que estava se iniciando, até então.

Tratava-se, portanto, de uma inovação criativa no ensino de Matemática que havia tomado como base a criação matemática desenvolvida durante mais de quatro séculos e que passava a exercer importância essencial na organização de um processo de disciplinarização e disciplinação da Matemática, que ocasionou a produção de saberes profissionais relativos ao ensino de Matemática, ou seja, *o saber a ensinar e para ensinar matemática no curso*

[7] Para maior aprofundamento no assunto ver Roxo (1937) mencionado nas referências no fial deste livro.

secundário, conforme enfatiza Valente (2017), quando menciona as discussões conceituais e pedagógicas propostas por Euclides Roxo nas primeiras décadas do século XX.

Foi com esse pensamento que nas primeiras décadas do século XX surgiram propostas e encaminhamentos disciplinares de reorientação curricular, inovações em programas de ensino e reelaboração de conteúdos dos livros didáticos ou manuais escolares de Matemática para o curso secundário, com base nas inovações criativas advindas da nova Matemática caracterizada pelo pensamento funcional. Tratava-se de uma abordagem para o ensino de Matemática baseada no conceito de função, como uma perspectiva de estabelecimento de conexões entre saberes matemáticos por meio do referido conceito, tendo em vista a preparação dos estudantes para o ensino superior. Essa abordagem funcional estava fundamentada nas divulgações epistemológicas enunciadas por Felix Klein para essa transformação de saberes, advindas dos estudos sobre função na Europa, ao longo do século XIX, como desdobramento conceitual do desenvolvimento do cálculo diferencial e integral, mencionado anteriormente.

Os desafios à criatividade dos professores dos cursos secundário e superior, bem como aos autores de livros didáticos e manuais escolares de matemática residia em estabelecer conexões conceituais e didáticas entre os conteúdos de matemática por meio de uma abordagem funcional que transversalizasse o conhecimento disciplinar do curso, de modo a preparar os estudantes para o ensino superior. Assim foram estabelecidos alguns objetivos para um ensino de matemática centrado no pensamento funcional, cuja diretriz epistemológica reconhecia que a dependência de uma quantidade variável em relação a outra era um dos aspectos que os professores de matemática deveriam considerar como parte mais importante do pensamento funcional a ser estimulado como uma importante construção na aprendizagem da matemática escolar pelos estudantes.

Consequentemente, propunha-se a determinação da natureza das relações entre essas variáveis e os modos como as mesmas poderiam ser expressas algebricamente por meio de tabelas e gráficos, a fim de possibilitar o alcance dos objetivos desse novo ensino de matemática, centrado no desenvolvimento das várias caracterísitcas do pensamento funcional, conforme já mencionado anteriormente. Assim, considerou-se prioritário o uso de expressões algébricas para representar o conceito de função, com destaque para o estabelecimento da definição de variável ou de variação e do significado desse conceito como aplicação e transformação.

A evidência de criatividade sobre esse tema se estabeleceu principalmente nas conexões entre pensamento, linguagens e problematizações com características de ações transversais ou interdisciplinares para esse tema, uma vez que eram muito utilizados problemas relacionados às mais diversas áreas de conhecimento, além da matemática, para expressar tanto o pensamento quanto as linguagens funcionais. Nessa dinâmica foram se estabelecendo processos criativos para inserção nas atividades curriculares, conceituais e didáticas no ensino de matemática do curso secundário.

Neste sentido, Euclides Roxo (1937) considerou que o desenvolvimento das noções de função era completamente acessível aos estudantes do curso secundário, desde que tais noções fossem desenvolvidas processualmente, de maneira lenta e progressiva, em todos os anos do curso secundário e configurado para todas as partes da matemática como elemento unificador. Daí terem surgido vários comentários sobre o princípio da funcionalidade que transversalizava todo o ensino da matemática na época, como um aspecto criativo que transfromava os modos de pensar e fazer matemática no curso secundário da época, embora tenha sofrido fortes críticas de muitos *experts* daquele período.

Outro destaque apontado por Roxo (1937) foi a respeito da necessidade de se discutir acerca do desenvolvimento histórico-epistemológico do conceito de função no ambito do domínio matemático e filosófico dos estudantes para sua ampliação conceitual ao ingressar na universidade, bem como a relação desse conceito nas ciências físicas e naturais e nas ciências sociais. Percebe-se que é a partir desses novos encaminhamentos conceituais e didáticos que os saberes concernentes ao ensino e a aprendizagem de função no curso secundário passaram a seguir uma nova trajetória como disciplina escolar que implicou modificações curriculares e reorientações nos modos de tratar o assunto nos manuais escolares conforme já mencionei anteriormente.

Igualmente, os estudos que desenvolvo desde 2007 sobre esses processos criativos na história da criação matemática apontam que outros ramos disciplinares da matemática em seu aspecto acadêmico e escolar passaram por transformações similares que processo apresentado nesta conferencia, sobre o conceito de função, podendo também me levara apresentar outros exemplos desses processos criativos, conforme se fizerem necessários, como é o caso do desenvolvimento histórico do cálculo diferencial e integral.

Referências

Barthélemy, G. (2003). *2500 anos de Matemática*. A evolução das ideias. Tradução Isabel Andrade. Lisboa : Instituto Piaget.

Dahan-Dalmedico, A., Peiffer, J. (1986). *Une histoirie des mathématiques* : Routes et dédales. Paris : Éditions du Seuil, 1986.

Descartes, R. (1637). La Géométrie. In : *Discours de la méthode*.

Einstein, A (1993). *Escritos da Maturidade*. Tradução Maria Luiza X. de A. Borges. 5ª Reimpressão. Rio de Janeiro: Nova Fronteira.

Hofstetter, R., Valente, W. R. (Org.) (2017). *Saberes em (trans)formação*: tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Poincaré, H. (1908). *Science et Methode*. Paris: Flammarion. Reed. Paris: Kimé, 1999.

Roxo, E. (1937). *A Matemática na Educação Secundária*. São Paulo: Companhia Editora Nacional.

Valente, W. R. (2017). A matemática a ensinar e a matemática para ensinar. In: Hofstetter, R., Valente, W. R. (Org.). *Saberes em (trans)formação*: tema central da formação de professores. São Paulo: Editora Livraria da Física.