FORMACIÓN DOCENTE: EL CASO DE LA PROPORCIONALIDAD

Jean-Pierre Bourgade
jean-pierre.bourgade@univ-tlse2.fr

Université Toulouse 2 Jean Jaurès, Francia

Resumen

La concepción de une formación docente sobre la enseñanza de la proporcionalidad puede fundamentarse en la identificación de dificultades del profesorado, vistas como síntomas de ciertas necesidades praxeológicas. Sin embargo, en general las propuestas de formación se enfrentan con resistencias u objeciones del profesorado: ciertas elecciones de organización del estudio ofrecen ventajas, cuyos posibles costos didácticos a veces no perciben los profesores. Dichos costos tienen que ver con el hecho de que la enseñanza de un tema dado se concibe generalmente de manera aislada, a un nivel de estudio particular, mientras que el pasado y el porvenir didáctico del tema de estudio tendría que ser tomado en consideración. Ilustramos nuestro punto de vista en el caso del concepto del coeficiente de proporcionalidad para enfatizar que superar un problema local a bajo costo puede conducir a otras dificultades a niveles inesperados.

Palabras clave: *formación docente, necesidades praxeológicas, proporcionalidad, magnitudes*

Introducción

Diseñar una formación sobre un tema matemático dado para una audiencia de profesores de matemáticas, principiantes o avanzados, requiere la aclaración preliminar de un cierto número de puntos. Quizás los más obvios son los siguientes: especificar lo más posible los contenidos matemáticos que se enseñarán en el tema seleccionado, de acuerdo con el nivel de estudio previsto; determinar las principales dificultades qué plantean dichos contenidos para los estudiantes; etc.

Algunas asignaturas resisten, quizás más que otras, el deseo de idear una formación adecuada para superar ciertas dificultades escolares: la proporcionalidad sigue siendo una asignatura difícil de enseñar, a pesar de los muchos esfuerzos realizados para mejorar la formación del profesorado. A las dificultades específicas del estudio de las magnitudes y su medición, el tema de la proporcionalidad agrega además aquellas que son específicas del estudio de las relaciones entre las magnitudes. La "constante de proporcionalidad" vive así una vida a veces caótica en las clases; las técnicas de búsqueda de la cuarta proporcional no suelen ser sólidas debido a la falta de procedimientos de control sistemáticos; la gestión de las unidades en los cálculos es difícil tan pronto como intervienen dos cantidades o más; etc.

En esta conferencia, buscamos identificar algunas fuentes posibles, no de las dificultades de estos alumnos, sino de ciertas restricciones institucionales de las cuales estas dificultades son el síntoma. En particular, la profesión no tiene la capacidad de anticipar las consecuencias didácticas que esta o aquella elección con respecto al estudio de la proporcionalidad pueda tener en el estudio de otros temas (como el de las magnitudes y su medición, por ejemplo), o para determinar todos los efectos que tal elección puede tener en el estudio de la proporcionalidad misma: veremos que este problema tiene que ver, del punto de vista didáctico, con la capacidad de identificar los efectos a largo plazo de desarreglos de condiciones.

Dificultades de la profesión

En esta sección intentaremos presentar algunas de las dificultades de la enseñanza de proporcionalidad. Estas dificultades son bien conocidas (véase por ejemplo Bolea, Bosch & Gascón, 2001, Comin, 2002 y Hersant, 2005) y no es nuestro propósito estudiarlas exhaustivamente, señalar ciertos aspectos que son comunes entre sí.

En un aula en Francia, en 2019, trabajando con estudiantes de 12-13 años, una profesora propone la siguiente definición de la proporcionalidad: "Dos magnitudes son proporcionales si los valores de una se obtienen multiplicando los valores de la otra por el mismo número". Esta definición plantea una dificultad que uno comprende mejor si considera la siguiente situación: el precio del gasóleo es

proporcional al volumen comprado; si el precio por litro es S/5.57, pasamos de la magnitud "volumen" a la magnitud "precio" multiplicando las medidas (en litros) de los valores del primero por 5.57, y luego obtenemos las medidas (en S/) de los valores de la segunda. Sin embargo, el mismo precio por litro vale US$6.21 por galón: para obtener medidas de precios en dólares estadounidenses a partir de medidas de volumen en galones estadounidenses, multiplique por 6.21 en lugar de 5.57. Las magnitudes son proporcionales en ambos casos, y son las mismas magnitudes. Sin embargo, el "número" por el cual debemos multiplicar los "valores" de una para obtener los de la otra no es fijo: depende de una elección de unidades. La definición dada por el profesor es, en el mejor de los casos, ambigua. Por otro lado, esta definición no tiene en cuenta lo que los estudiantes han trabajado en las clases anteriores, especialmente la construcción de proporcionalidad como una propiedad de aditividad común a dos magnitudes. Si recolectamos dos sacos de naranjas, sumamos sus masas, así como sus precios: es incluso lo que caracteriza la proporcionalidad del precio y la masa de las naranjas. La definición propuesta por la profesora no permite relacionar esta propiedad de aditividad con la existencia de una constante de proporcionalidad: pasa por alto la discusión, imponiendo, al nivel de la definición misma, la existencia de la constante de proporcionalidad como propiedad fundamental, independientemente de los antecedentes didácticos de los estudiantes. Veremos que, además de esto, impide aclarar la naturaleza de la constante de proporcionalidad.

Terminemos con un último ejemplo, tomado en la misma sesión. La maestra insiste en que los cálculos deben realizarse con unidades "en todas partes", o sin unidades, especificando la unidad solo en el resultado final. A continuación, ella escribe en la pizarra: "40×1.48€ = 50.29€". La mayor dificultad aquí está relacionada con la elección de una magnitud privilegiada: si uno debe calcular con las unidades "en todas partes", en el caso del cálculo del precio de 40L de gasóleo, ¿por qué el cálculo no se escribe con unidades de volumen? Finalmente, las funciones realizadas por el cálculo "con unidades" no aparecen claramente; el discurso de la profesora sugiere que se trata de controlar la coherencia de los cálculos, sin ser explícita la técnica que lo haría posible. Asimismo, el uso "mixto" de medidas y de magnitudes en el mismo cálculo no permite controlar la coherencia de dicho cálculo, como lo indica bien el siguiente ejemplo. Imaginemos que un conductor de camiones deba comprar 3.15 hL de gasóleo. El cálculo puede asumir la siguiente forma sin que aparezca fácilmente para el estudiante la fuente de su error: 3.15 ×1.48€ ≈ 4.66€.

Necesidades praxeológicas

Las dificultades que acabamos de presentar son el síntoma de ciertas necesidades praxeológicas: en la Teoría antropológica de lo didáctico (TAD, Chevallard 2007), consideramos que toda acción humana consiste en la realización de un tipo de tareas T (lo que hay que hacer) por medio de una técnica τ (cómo hacerlo) que un discurso, una tecnología θ, viene a producir, justificar, hacer inteligible; la tecnología misma es objeto de un discurso, de una teoría Θ destinada a producirla, a justificarla y hacerla inteligible. El saber-hacer, la praxis [T / τ] y el saber, el logos [θ / Θ], constituyen una praxeología [T / τ / θ / Θ]. Las elecciones hechas por la profesora mencionada en la sección anterior tienen implicaciones para las praxeologías matemáticas estudiadas por los estudiantes; además, al tomar estas decisiones y ponerlas en práctica en el aula, la maestra da a conocer su propia praxis, a partir de la cual podemos inducir algunos elementos de su logos. De este modo, podemos reconstruir parte de sus praxeologías profesionales, que incluyen, sin reducirse a ellas, las praxeologías matemáticas para enseñar.

Un maestro en su clase puede tener dificultades, que eventualmente atribuirá a ciertas necesidades praxeológicas. En una discusión que siguió a la sesión mencionada en la sección anterior, la profesora pudo demostrar su incapacidad para calcular el costo de 40 litros de diésel con las unidades de precio y volumen. La necesidad praxeológica que se manifiesta aquí cae a la teoría de las magnitudes y su medición. Más allá de este profesor, es la posición misma de profesor en la institución escolar francesa la que padece esta necesidad praxeológica: el cálculo de las magnitudes generalmente se interpreta como un cálculo "con las unidades", cuyas funciones son generalmente mal entendidas. Esta interpretación se basa a su vez en una distinción entre tres entidades, como se ilustra en el siguiente diálogo entre el profesor (P.) y un estudiante (E.), extraído de la misma sesión:

P. ¿Se dijo que estábamos estudiando la proporcionalidad entre dos cosas? ¿Qué eran: unidades, medidas, magnitudes?

E. ¿Unidades?

P. Atención, se dijo que las unidades eran L, m, etc. ¿Había L escrito allí?

E. ¡Magnitudes!

El logos del maestro (y a través de él, el de la posición de profesor) incluye la distinción entre tres objetos: las magnitudes, las medidas de magnitudes y la unidad de medida de una magnitud.

Aquí nace el posible origen de una solicitud de formación: una determinada instancia (posición o persona, aquí la posición de investigador en didáctica p_ξ) identifica en otra instancia (aquí, la posición de profesor de matemáticas en Francia, p_t) una falta cuya naturaleza es una praxeología (aquí relativa a las magnitudes, a su medida y la proporcionalidad). Uno puede imaginar que la formación a producir podría (debería) garantizar que dicha praxeología se difunde en la posición p_t. La identificación de la falta, es decir, su descripción praxeológica, generalmente se basa en la siguiente observación (Chevallard, 2019; Artaud, 2019): ξ juzga que la relación de p_t a un objeto o (proporcionalidad, aquí) no cumple con un una relación con o que le gustaría ver existente, y que denotaremos genéricamente $R(*\hat{s}, o)$, donde $*\hat{s}$ es, en cierto modo, la posición que debería existir, según imagina p_ξ. ¿De qué, precisamente, consta esta relación deseable, esta necesidad praxeológica de p_t según p_ξ? Lo siguiente se fundamenta a lo largo en Chevallard y Bosch, 2001 y en Chevallard y Bosch, 2002.

En la Figura 2, vemos una propuesta de ejercicio de 2º grado de secundaria en Perú. El objetivo es establecer la existencia de una constante de proporcionalidad. Este ejercicio tiene un formato clásico: se entrega una tabla, los estudiantes deben completarlo y luego calcular el cociente de los valores escritos en une fila por los valores escritos en la otra fila. Los estudiantes observan que el cociente es constante y concluyen que existe una "constante de proporcionalidad" entre las dos magnitudes.

Tabla 3 (Reporte del MINSA)							
Cantidad de jóvenes con obesidad	2						...
Cantidad de jóvenes	5						...
Tabla 4 (Reporte del MINSA)							
Cantidad de mujeres obesas en edad reproductiva	1						...
Cantidad de mujeres en edad reproductiva	2						...

- Luego de completar las tablas, los estudiantes responde a las interrogantes que se plantean en esta actividad.
  a. ¿Explica qué observas en cada una de las tablas con los valores asignados?
  b. ¿Qué sucede si dividimos en cada columna los valores de la primera fila entre los valores de la segunda fila?
  c. ¿El resultado obtenido en cada columna de cada una de las tablas es constante? ¿Por qué?

Figura 2. Extracto de una sesión de aprendizaje

El "resultado" de la división, en cada columna, del valor de la primera fila por el de la segunda fila, es constante para cada tabla. ¿Pero sigue siendo el caso? Tomemos el ejemplo del precio del gasóleo; en la misma sesión estudiada en la sección anterior, la profesora proporciona a los estudiantes la siguiente tabla:

Cantidad de gasóleo (en L)	1	20
Precio del gasóleo (en €)	1.48	29.6

En dicha tabla, el coeficiente obtenido es: 29.6 / 20 = 1.48 / 1 = 1.48. Pero imaginemos que medimos volúmenes en galones estadounidenses:

Cantidad de gasóleo (en gal)	0.26	5.28
Precio del gasóleo (en €)	1.48	29.6

El coeficiente obtenido es ahora: 1.48 / 0.26 ≈ 29.6 / 5.28 ≈ 5.6.

En aras de la coherencia, expresemos los precios en dólares estadounidenses:

Cantidad de gasóleo (en gal)	0.26	5.28
Precio del gasóleo (en US $)	1.63	32.58

El coeficiente vale, esta vez: 1.62 / 0.26 ≈ 32.58 / 5.28 ≈ 6.2.

Observamos aquí una dimensión problemática de la relación con la proporcionalidad cometida por la profesora observada: su logos incluye la idea de que el cociente de dos cantidades proporcionales es constante; también incluye que es irrelevante completar una tabla colocando las unidades en la primera columna y las medidas en esas unidades en todas las otras columnas, o colocar las unidades en todas las columnas excepto la primera columna; probablemente incluso incluye el hecho de que es preferible seguir la primera opción, ya que eso es lo que la praxis que implementa la profesora da para ver en su clase. Estos dos elementos del logos se enfrentan al siempre espinoso problema de la pluralidad de elecciones posibles de unidades.

Desde el punto de vista del cálculo con las cantidades, las prácticas aceptables según la profesora consisten en escribir:

"40 × 1.48 € = 59.20 €, por lo que Eloïse pagará 59.20 €"

o sea,

"40 × 1.48 = 59.20, por lo que Eloïse pagará 59.20 €".

Por el contrario, la siguiente práctica sería percibida como incorrecta por la profesora:

"40 × 1.48 = 59.20 €, por lo que Eloïse pagará 59.20 €".

Si podemos excluir correctamente esta última presentación, es porque incluye la escritura de una igualdad (incorrecta) entre un producto de medidas y una magnitud. La segunda presentación, por otro lado, equivale a calcular integralmente con mediciones. Finalmente, la primera presentación consiste en un cálculo mixto que involucra mediciones y magnitudes. Si, desde un punto de vista matemático, y con la condición de extraerlo del contexto preciso del que proviene, como veremos, este cálculo es irreprochable, sin embargo, choca con unos de los elementos del logos de la profesora que hemos destacado anteriormente: "en un cálculo, colocamos las unidades en todas partes o en ninguna parte". Aquí, la técnica utilizada se realiza de manera diferente para los dos tipos de magnitudes: la unidad de volumen no aparece en ninguna parte, mientras la unidad de precio aparece en todas partes. Podemos entender la elección de la profesora si intentamos desarrollar el cálculo con todas las unidades:

40L×1.48€=59.20 €.L

La aparición de la cantidad producto "precio.volumen" es incongruente y explica que la profesora vacile en integrar todas las unidades en los cálculos, es decir, en trabajar con las magnitudes y no en parte con las magnitudes y en parte con sus medidas.

Volvamos a la tabla de proporcionalidad. Aquí también, el logos de la profesora no prohibiría, en principio, la construcción de una tabla de la siguiente manera:

Cantidad de gasóleo	1 L	20 L
Precio del gasóleo	1.48 €	29.6 €

Tomando nuevamente la pregunta planteada en la sesión de aprendizaje, ¿qué vale el resultado de la división de la segunda fila por la primera fila en cada columna de esta tabla? Calculemos:

1.48 € / 1L = 29.6 € / 20L = 1.48 € / L

¿Qué sucede en la siguiente tabla?

Cantidad de gasóleo	0.26 gal	5.28 gal
Precio del gasóleo	$ 1.63	$ 32.58

Calculemos:

$1.63/0.26 gal ≈ $32.58/5.28 gal ≈ 6.2 $/gal.

Por lo tanto, el cociente es constante, para cada tabla, al pasar de una columna a otra. ¿Pero es este cociente el mismo en todas las tablas? Calculemos:

1.48 €/L = 1.48×1€/L

≈ 1.48×$1.1/0.264172 gal

≈ 1.48×4.163953787683682 $/gal

≈ 6.162651605771997 $/gal

≈ 6.2 $/gal

Entonces, para las aproximaciones más cercanas, el cociente de magnitudes es el mismo en ambas tablas: decir que la constante de proporcionalidad es una constante no significa que su medición sea constante (ya que cambiará cuando cambiemos unidades de medida), pero que la magnitud-cociente precio/volumen es constante.

Vemos que el conjunto de dificultades encontradas por la profesora en esta breve sesión se basa en una necesidad praxeológica relacionada con la noción de constante de proporcionalidad: esa no es número sino una magnitud-cociente.

La relación deseable con la proporcionalidad que está surgiendo aquí también incluye elementos técnicos relacionados con el control de los cálculos: tomemos el ejemplo siguiente, sacado de un cuaderno "resolvemos problemas" proporcionado por el ministerio de la educación peruviano (Figura 3).

Situación C

Para pintar la fachada del colegio se han necesitado 24 litros de pintura. Si se sabe que la superficie mide 52 m^2, ¿cuántos litros de pintura se necesitan para pintar 78 m^2 de superficie?

Figura 3. Una situación del mundo

A continuación, se entrega a los estudiantes una resolución (incorrecta) del problema y se les pide explicar porqué es incorrecta (Figura 4).

Resolución

(Encuentra el error)

A menor superficie, menor cantidad de pintura.

Por lo tanto, las magnitudes son directamente proporcionales.

Su proporción será:

$$\frac{52}{24} = \frac{x}{78} \Rightarrow (52)\cdot(78) = 24\,x$$

$$x = \frac{4056}{24}$$

$$x = 169$$

Respuesta: Se necesitarán 169 litros de pintura.

1. ¿Los procesos ejecutados son correctos? Justifica tu respuesta.

Figura 4. Una resolución incorrecta

El manual para el docente proporciona una resolución de esta actividad (Figura 5) que bien ilustra el hecho que, al trabajar con las medidas, no se controla el cálculo.

Luego el docente indica analizar el procedimiento y la solución de la situación C, que tiene la característica de presentar algún tipo de error (de concepto, de aplicación, de procedimiento o de razonamiento). Los estudiantes, por medio del análisis, deberán identificar los errores y proponer su corrección respondiendo las preguntas:

- ¿Los procesos ejecutados son correctos? Justifica tu respuesta.

  No, pues al plantear la proporción se ha confundido el orden de los valores.

$$\frac{52}{24}=\frac{78}{x} \Rightarrow x=36 \text{ litros de pintura}$$

Figura 5. Comentarios para los docentes

En efecto, si se puede entender que "se ha confundido el orden de los valores", el manual para el docente no da idea de cómo se podría evitar este fracaso. Sin embargo, trabajando con las magnitudes y parafraseando el cálculo erróneo del enunciado (Figura 4), obtenemos lo siguiente:

$52 \text{ m}^2 / 24 \text{ L} = x / 78 \text{ m}^2$,

de lo cual se puede deducir que $x = 52\text{m}^2 \times 78\text{m}^2 / 24\text{L} = (52 \times 78 / 24) \text{ m}^4/\text{L}$. Esta claro que el resultado no es un volumen, así que la pregunta "¿Los procesos ejecutados son correctos?" admite una respuesta inmediata. Esta técnica también proporciona herramientas para producir el cálculo correcto: los cocientes iguales deben se iguales a la magnitud-cociente constante que relaciona las dos magnitudes. Así: $52\text{m}^2 / 24\text{L} = 78 \text{ m}^2 / x$ = área de la fachada / volumen de pintura necesario para pintar la fachada.

Por fin, el logos relativo a la praxis que acabamos de presentar debe incluir una justificación de la existencia de la constante de proporcionalidad. Hemos visto en las secciones anteriores que la definición elegida por la profesora no toma en cuenta lo que los estudiantes han trabajado en las clases anteriores, entre otros la construcción de proporcionalidad como una propiedad de aditividad común a dos magnitudes. Basándose en esta propiedad, podemos observar que, si compramos un litro de gasóleo pagando 1.48 €, dos litros (volumen del bidón que se obtiene al unir dos bidones de un litro cada) costarán 1.48€ + 1.48€ (precio del bidón que se obtiene al unir dos bidones de 1.48€ cada), etc., y 40 litros costarán 1.48€ + … + 1.48€ = 40 × 1.48€. El 40 que aparece en este cálculo representa el número de volúmenes de un litro de que consta un volumen de 40 L, así que tenemos: 40 = 40L / 1L, o sea:

1.48€ + … + 1.48€ = 40 × 1.48€ = 40L/1L × 1.48€ = 40L × 1.48€/1L = 40L × 1.48€/L.

El mismo racionamiento llega a escribir, para un volumen x = X L, que el precio de este volumen es la suma de X términos 1.48€, es decir: X × 1.48€ = X L × 1.48€/L. Se generaliza al caso de números decimales o racionales X, así que resulta que el volumen (y no su medida en litros) y el precio (y no su medida en euros) son relacionados por la existencia de una magnitud-cociente constante 1.48€/L – y hemos establecido este punto a partir de la propiedad de aditividad de las magnitudes proporcionales.

Objeciones y respuestas

En general, se hacen dos objeciones a la adopción de la praxeología descrita en la sección anterior: la definición de la proporcionalidad por la constante de proporcionalidad es "transparente" y proporciona directamente una técnica de determinación de cuarta proporcionales; la noción magnitud-cociente se estudia sólo en la clase siguiente (niños de 13-14 años). La primera objeción se fundamenta en la idea que el logos adquirido en las clases anteriores no tiene mucho valor par el trabajo en curso; la secunda en la idea que el trabajo en curso no tiene que elaborarse en relación con lo que se construirá en las clases siguientes. Las praxeologías profesionales que surgen de esta manera aparecen en un cierto aislamiento y se centran en las matemáticas por enseñar. La profesión percibe ciertos gestos como intencionalmente didácticos con respecto a esta o aquella praxeología para enseñar, pero es más difícil determinar los efectos más amplios de dichos gestos; por ejemplo, se reconocerá una clara intención didáctica en un gesto dado en el estudio de la proporcionalidad en una clase determinada, pero será difícil atribuirle una incidencia en el estudio de las magnitudes en la clase siguiente. Por lo tanto, la capacitación en la enseñanza de la proporcionalidad debe centrarse en nutrir el logos de la profesión desde este punto de vista en dos niveles.

En primer lugar, debe enfatizarse el enredo de las condiciones didácticas que se hacen a diferentes temas para que los gestos didácticos se produzcan a sabiendas, con el objetivo de controlar los efectos de estos gestos en varios temas de estudio. Por otro lado, la construcción de praxeologías a lo largo de varios años de estudio plantea un problema para una profesión a quién le resulta difícil considerar el aprendizaje de otra manera que como el aprendizaje completo de un conocimiento formalmente inequívoco. El caso de la proporcionalidad ilustra el hecho de que el estudio de la teoría de las magnitudes y el de la proporcionalidad se enredan en gran medida, y que se llevan a cabo durante varios años de estudio.

Por lo tanto, la formación para la enseñanza de a proporcionalidad debería ser capaz de proporcionar praxeologías profesionales para diseñar e implementar secuencias de enseñanza que articulen el pasado, el presente y el futuro didáctico de los estudiantes en proporcionalidad y magnitud. En particular, si la noción de magnitud-cociente no interviene al nivel de estudio de una clase dada, puede ser objeto de una primera familiarización indirecta: marcar la diferencia entre un precio y un "precio por litro", o un "precio por volumen" es imprescindible desde los dos puntos de vista del estudio (en curso) de la proporcionalidad y del estudio (futuro) de las magnitudes-cociente. Eso requiere una adaptación de las praxeologías del profesor, para que incluyan la idea que se puede trabajar con magnitudes-cocientes sin desarrollar un *logos* "completo" (es decir conforme al *logos* que se desarrolla en las clases sucesivas). La notación €/L permite simplificaciones por "L", como en el ejemplo siguiente, retomado de la situación donde un conductor quiere comprar 3.15 hectólitros de gasóleo:

3.15hL×1.48€/L = 3.15×1.48 hŁ.€/Ł = 4.662 h€ = 4.662×100€ = 466.20€.

Si esto representa el desarrollo máximo de la praxeología relativa a las magnitudes-cociente en la clase sucesiva, no significa que no se pueda – ni se deba – hacer nada en este asunto en la clase en curso: en vez de la notación €/L se puede escribir "euro por litro" en los cálculos. En vez de simplificar por "L", se puede actuar "aritméticamente": "3.15 hectolitros × 1.48 euro por litro, son 315 veces un litro multiplicado por el precio por litro, es decir 315 veces el precio de un litro, que es 1.48 euro, y resulta 315 × 1.48 €, es decir…”. Al pasar del “precio por litro” al “precio de un litro”, se cambio de tipo de magnitud, utilizando el hecho (elemento de logos) que el precio por litro multiplicado por un volumen de un litro, es el precio de un litro – por lo cual se aclara también el vinculo con los números racionales definidos de manera similar, siendo a/b el número cuyo producto con b es a. El uso de esta técnica pone de adelante varios ingredientes de logos y produce un desarreglo (Chevallard, 2019) de las condiciones (futuras) de estudio de las magnitudes cociente – y a la vez desarregla las condiciones del estudio de la proporcionalidad al favorecer la construcción de la constante de proporcionalidad como magnitud-cociente.

Referencias

Artaud, M. (2019). Besoins praxéologiques de la profession : le cas des grandeurs et de leur mesure. Conferencia plenaria en la XX[a] esculea de verano de la ARDM. Autrans.

Bolea, P., Bosch, M., & Gascon, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: El caso de la proporcionalidad. *Recherches en didactique des mathématiques*, *21*(3), 247-303.

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Conferencia plenaria en el primer congres internacional sobre la teoría antropológica de lo didáctico. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Eds.), *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (pp. 705-746). Universidad de Jaén.

Chevallard, Y. (2019). The Curriculum Problem and the Paradigm of Questioning the World, in Mathematics and beyond. Comunicación presentada en el Intensive Research Programme: Advances in the Anthropological Theory of the Didactic and their consequences in curricula and in teacher education, Barcelona.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une atlantide oubliée. *Petit x*, *55*, 5-32.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x*, *59*, 43-76.

Comin, E. (2002). L’enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, *22*(2), 135-182.

Hersant, M. (2005). La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui. *Repères IREM*, (59), 5-41.