ESTIMULANDO CULTURA GEOMÉTRICA PARA A ESCOLA BÁSICA

Prof. José Carlos Pinto Leivas[1]

Resumo

O artigo procura abordar outros aspectos de geometria além da euclidiana, buscando fornecer alguns elementos que proporcionem uma base cultural geométrica mais ampla ao professor que atua na escola básica. É lançado o conceito de cultura, discutido por Raymond Wilder, buscando conexão com aquele necessário para a geometria. No artigo são apresentados aspectos axiomáticos em modelos de geometrias não euclidianas de forma comparativa com o euclidiano, bem como uma caracterização do que seja um sistema axiomático e ensaiados modelos de tais sistemas em geometrias não euclidianas, que podem ser enriquecedores para as atividades do professor. Uma caracterização de ângulos é feita com base nos modelo euclidiano e não euclidianos.

Palavras-chave: cultura geométrica, sistema axiomático, construções geométricas, modelos de geometria, ângulos.

1. Retomando a história

Pode-se constatar que na antiguidade, com a Escola Pitagórica, a idéia de número era utilizada e existia apenas para os inteiros positivos na Grécia antiga. Havia dificuldade no tratado das medidas e das grandezas. Com a Escola Euclidiana as grandezas passaram a se relacionar com os segmentos e com isto os números passaram a se relacionar a conjuntos discretos enquanto que as grandezas, a conjuntos contínuos. Houve uma mudança comportamental no tratamento matemático, a saber, as grandezas sendo tratadas por métodos geométricos.

A concepção de resolver problemas dessa natureza passou a ter um tratamento concomitante com a construção dos problemas, originando-se uma "nova álgebra". Nessa nova álgebra, problemas que na linguagem atual seriam expressos por $ax = b$, por exemplo, não mais tinham apenas um significado algébrico. Passaram a ter uma interpretação ou solução geométrica. Para tal, considera-se ax como sendo a área de um retângulo e b como um segmento de reta. Note-se que na igualdade há significados diferentes nos dois membros. Enquanto que o primeiro termo expressa uma área, o segundo expressa uma medida de comprimento e as duas grandezas, portanto, são distintas. O problema necessita assim ter uma interpretação geométrica coerente, ou seja, encontrar a altura x de um retângulo que tenha uma dimensão conhecida "a" e cuja área seja a mesma de outro retângulo de dimensões conhecidas "b" e "1", para poder ser estabelecida comparação entre mesmas grandezas.

Segundo Machado (2005, p.4), ao utilizar a História da Matemática, como recurso didático facilitador da situação ensino-aprendizagem, deverá ser privilegiada a busca do desenvolvimento dos conceitos matemáticos bem como sua evolução ao longo de determinados períodos.

> *Ao recuperar a gênese dos processos de descoberta em Matemática, e acompanhar o fluxo dos conceitos*

e idéias ligados aos problemas que o motivaram, o professor terá uma visão mais clara do desenvolvimento da Matemática, sua natureza, seu método, aspectos indispensáveis à sua formação.

Em geral, os cursos de geometria começam com a busca de significação da palavra geometria e sua utilização para medições de terra pelas invasões do rio Nilo e não vão muito além disso, por exemplo, vendo a geometria como um corpo axiomático. Parece ser fundamental que ao futuro professor seja proporcionado um desenvolvimento cultural de Matemática e, em especial, de geometria a fim de que possa propiciar um conhecimento mais amplo e mais motivador, não ficando na pura memorização de fórmulas e definições como se percebe inclusive em cursos universitários.

Wilder (1998) apresenta o conceito de cultura como não sendo um antídoto para as doenças que atacam a Matemática, mas sim como uma base para a compreensão de sua natureza ou ainda a iluminação para muitos problemas. Segundo o autor, a cultura matemática não resolve tais problemas, mas aponta soluções para os mesmos. Se a formação dos futuros professores é construída, tendo por base uma formação cultural a respeito do conhecimento, de forma consistente, não apenas com reproduções dos mesmos, é possível que por algum tempo os professores e futuros professores a deixem adormecida. Entretanto, quando forem atuar com seus alunos e se defrontarem com situações de ensino-aprendizagem ou questionamentos quanto à necessidade de desenvolvimentos de determinados conteúdos, estarão aptos a recorrer aos conhecimentos adormecidos e promover discussões relevantes para a formação dos mesmos, talvez até despertando o interesse por novas aprendizagens. Em caso de não terem adquirido conhecimentos amplos, provavelmente serão professores que respondem que "isto serve para um futuro próximo (ou não tão próximo!)".

Ainda o mesmo autor diferencia o processo cultural chinês do grego, estabelecendo que para um historiador chinês por volta dos anos 500 d.C, os fatos matemáticos eram focados em cálculos numéricos e na resolução de equações sem maiores alusões à geometria. Na história grega, anos 200 d.C, a questão era inversa - por assim dizer - o foco estava na geometria, havendo muito pouca alusão à álgebra e aos cálculos numéricos. Em contrapartida aos dois momentos citados pelo autor, o historiador moderno estaria destacando um envolvimento tanto algébrico quanto geométrico da Matemática.

A partir disto, pode-se buscar a formação de professores que tenham em mente que a Matemática pode ser tida como uma ciência dinâmica em constante movimentação. No presente artigo discute-se essa movimentação por meio de conceitos em modelos euclidianos e não euclidianos e mostra-se que a onipotência da Matemática inexiste, em particular tratando-se de um tema que mudou profundamente o conhecimento da humanidade no século XIX com a construção, e não descoberta, de mundos não euclidianos, deixando a exclusividade de um pensamento euclidiano, a exemplo do que se passou na Física indo do pensamento clássico de Newton o Quântico. O que se vê nos cursos universitários é a inexistência de discussões atuais sobre o conhecimento geométrico moderno, o que faz com que o ciclo vicioso não seja rompido, pois o formador de professores não se qualifica nesse sentido e não qualifica seus formandos para poderem formar novos estudantes com novas perspectivas técnicas e culturais, muito embora exista nos currículos o que denomina Fundamentos de Matemática, mas que se concentram num elenco de conteúdos de forma isolados, como por exemplo, trigonometria, análise combinatória, geometria, geometria analítica. Entende-se a necessidade de que o futuro professor ao atuar em geometria precisa ter um conhecimento mais amplo dessa área.

Segundo Wilder (2005, p.14), "Se o conceito de cultura nos diz algo, deveria ensinar-nos que a primeira regra para estabelecer qualquer teoria de Fundamentos é que esta teoria só pode tentar abarcar porções específicas do campo tal como ele é conhecido na nossa cultura".

O que ocorre com os fundamentos da geometria é que o método dedutivo, desde os gregos, lhe é associado e, quando há a passagem para a álgebra e para os números, embora existam demonstrações geométricas, estas não ficam evidenciadas. O método axiomático em suas vertentes do formalismo, da abstração e da dedução tem fortes ligações geométricas, não obstante se encontre na geometria dos egípcios e babilônios constatações fundamentadas no empirismo e na experimentação, mostrando uma antecedência à geometria grega.

Geometria e Lógica têm forte ligação, sendo talvez o exemplo mais característico de axiomatização que tem sido utilizado por professores e estudantes, senão o único, como se isto não ocorresse com outros ramos da Matemática como, por exemplo, a axiomatização de Peano para a construção do conjunto dos números naturais, que na maioria das vezes nem sequer é nomeada.

A história aponta que Euclides definiu ponto e reta da seguinte forma (em linguagem atual):

- Ponto é o que não tem partes.
- Reta é um comprimento sem medida.

A partir disso, construiu sua axiomatização usando definições e cinco axiomas. Tendo em vista que somente com cinco axiomas é impossível construir a geometria, Euclides empregou outros axiomas em suas demonstrações. É a partir de Hilbert [1862-1943] que se elabora o primeiro conjunto completo de axiomas da geometria euclidiana. Nessa construção, as definições dadas por Euclides para ponto, reta, plano e espaço, passaram a ser consideradas como elementos primitivos não definidos. Em geral, por não haver discussão e relação entre os dois aspectos de geometria, muitos professores, livros didáticos e autores ainda continuam utilizando definições para os elementos primitivos e considerando que a axiomática em uso atualmente é aquela elaborada por Euclides.

É interessante discutir sobre o que aconteceu na passagem do século XIX para o século XX para não se pensar que houve apenas uma mudança nos rumos da geometria. O que ocorreu naquele momento foi uma grande virada na forma do pensar e agir tendo como base a Matemática e as formas de encarar o conhecimento, pois até aquele momento o pensamento matemático era um pensamento geométrico e, ainda mais, um pensamento euclidiano. É ao final do século XIX que começaram a acontecer congressos entre matemáticos. As discussões e a disseminação do conhecimento passou a acontecer. Segundo Boyer (1996, p. 147), um marco foi o 'Congresso Internacional de Matemática, realizado em 1893 em Chicago, seguido em 1897 pelo primeiro de uma série de congressos oficiais de matemáticos realizados a cada quatro anos, excetuadas as interrupções causadas por duas guerras mundiais e pela guerra "fria".'

Como Gauss foi um dos expoentes da Matemática em seu tempo, havia um certo pensar de que não haveria depois dele nenhum matemático que tratasse essa ciência em todos os seus campos, como pura ou aplicada. Surgiu Poincaré, que passou a considerá-la como seu domínio e trouxe inúmeras contribuições tanto para a Matemática quanto para a Ciência, em geral, embora iremos nos referir apenas à sua contribuição para a geometria. Por ter sido estabelecida uma comparação entre os dois matemáticos é importante esboçar algumas comparações entre eles, a saber, Gauss era prodígio em cálculos o que não era o caso de Poincaré. O primeiro escrevia relativamente pouco, enquanto que o segundo escrevia e publicava mais do que qualquer outro matemático. Um ponto em comum entre os dois é que tinham uma "forte preferência por teoremas gerais em vez de casos específicos" e ambos contribuíram para uma grande variedade de ramos da Ciência.

Para nosso propósito é importante perceber a importância de Poincaré e de Riemann, que eram hábeis no tratamento de problemas de natureza topológica, sem se preocuparem com sua representação formal, no sentido clássico, por serem intuicionistas. Nesse fluxo de discussões e de produções matemáticas que movimentavam a época, surge o matemático alemão Hilbert (1862-1943), que publica seu ponto de vista.

> *[...] que se tornou típico de sua obra e influência: caracteriza-se por ênfase em abstração, aritmetização e desenvolvimento lógico de conceitos e teorias da matemática. Hilbert expressou a opinião de que todos os ramos da matemática exigem um grau pelo menos igual de abstração, desde que se sujeite o fundamento desses ramos ao mesmo estudo rigoroso e completo que é necessário. Enfatizou a inter relação entre teoria dos números e álgebra, bem como a existente entre teoria dos números e teoria das funções como se tornara claro durante o século dezenove. (BOYER, 1996, p.423).*

Era de se esperar uma revolução no pensar geométrico e foi com Hilbert que surgiram

"Os Fundamentos da Geometria". Embora tratasse de muitos assuntos, como dito acima, buscava concentração em um tema de cada vez, mas pelo propósito deste artigo cabe falar sobre seus estudos e contribuições na geometria. Em 1898-1899 publicou a obra acima, que exerceu forte influência na Matemática do século XX. Retomando-se "Os Elementos", percebia-se a existência de uma estrutura dedutiva, porém contendo hipóteses ocultas, definições sem sentido, dificuldades de compreensão em linguagem inadequada e falhas lógicas. Em Boyer (1996, p.424), encontra-se que

> *O caráter puramente dedutivo e formal da geometria, como dos outros ramos da matemática, ficou completamente estabelecido desde o começo do século vinte. Hilbert é o principal representante de uma escola axiomática, que foi influente na formação das atitudes contemprâneas na matemática e no ensino da matemática. Pontos, retas e planos devem ser entendidos apenas como elementos de certos conjuntos dados, abandonando o nível empírico-dedutivo das antigas concepções geométricas.*

2. Primeiros axiomas euclidianos numa visão não euclidiana

Como visto antes, Euclides utilizou ponto e linha, como elementos básicos, mas definindo-os:

a) ponto é o que não tem partes;
b) reta é um comprimento sem medida (além de outras definições).

Na sua tentativa de axiomatização utilizou cinco axiomas, dos quais destacamos a seguir três, que atualmente podem ser observados de um ponto de vista mais amplo, não apenas pensando no plano euclidiano, como usualmente é conduzido todo o estudo e pensamento de geometria desde o começo da escolaridade:

Axioma I: Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a qualquer outro.

Figura 1

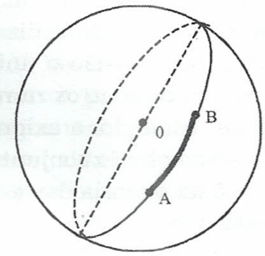


Figura 2

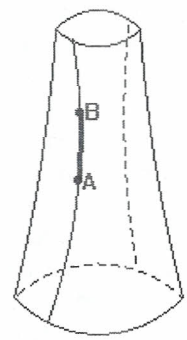


Figura 3

Axioma II: Uma linha reta (finita para Euclides) pode ser prolongada nos dois sentidos

Euclides não imaginou que poderia haver espaço em que esta linha não seria apenas a reta convencional que usou em todo seu trabalho (figura 1), inclusive significando aos dias de hoje o que caracterizamos como segmento de reta. Nos espaços não percebidos por Euclides se pode caracterizar também como "reta", as linhas assinaladas nas figuras 2 e 3.

As figuras 1 e 3, acima, mostram a reta no sentido de Euclides (um segmento de reta na linguagem atual) podendo prolongar-se infinitamente nos dois sentidos. Já na figura central, se prolongarmos a partir de B a reta retorna ao outro ponto A, não podendo prolongar-se infinitamente.

Axioma V: (Postulado para Euclides) Se uma linha reta corta duas outras linhas retas, e se a soma dos dois ângulos internos de um lado dela é menor que dois retos, então as outras linhas retas corta-se-ão do lado desses ângulos

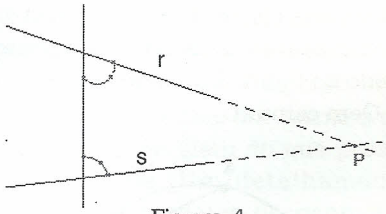


Figura 4

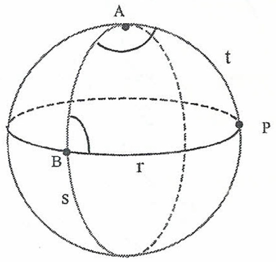


Figura 5

A figura 4 está mostrando que a soma dos dois ângulos assinalados é menor do que dois retos. As retas r e s estão se interseccionando em P, não sendo paralelas. Na figura 5 os dois ângulos assinalados são retos (formados pelas retas r em azul e s em verde com vértice B e t em vermelha e s com vértice A). As retas r e t também se cortam sob um ângulo reto em P, logo não são paralelas. Não há retas paralelas numa geometria sobre a esfera. Observa-se ainda que o triângulo de vértices A, B e P, formado pelas três retas tem ângulos retos, isto é, sua soma é igual a 270°, o que foge a uma das características da geometria euclidiana.

Na construção de Hilbert aparecem, além do ponto, da reta, do plano e do espaço, como termos não definidos, as seguintes relações não definidas:

incidência; pertencer a; pertencer entre; congruência; paralelismo; e continuidade;
e os seguintes conjuntos de axiomas:

incidência; ordem, congruência, paralelismo e continuidade.

Uma nova construção para a geometria é apresentada por Lobatschevsky em 1835 - Novos Princípios de Geometria. Nesses princípios consta não uma equivalência com a axiomática de Euclides e sim uma contradição quanto ao quinto postulado. Eis seu enunciado:

"Sendo dada uma reta e um ponto não pertencente à reta, existem pelo menos duas retas que possuem o ponto e que são paralelas à reta (não interseccionam a primeira)".

Esse axioma, juntamente com os demais da Geometria Euclidiana, constituem a Geometria Lobatschevskiana. Há teoremas comuns entre as duas e teoremas distintos, os quais não são objeto deste artigo.

Riemann por sua vez estuda a axiomática de Euclides, tendo apresentado outro sistema axiomático para a geometria. Nessa axiomática tem-se o equivalente ao quinto postulado enunciado da seguinte forma:

"Por um ponto não pertencente a uma reta, não existe reta paralela a ela (que não a interseccione)".

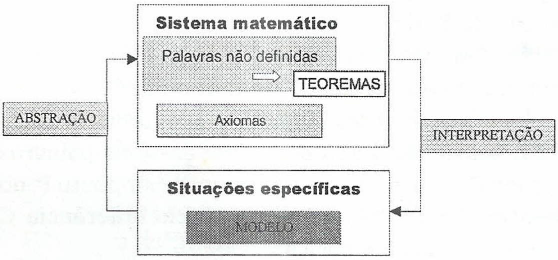
3. Um Sistema Axiomático

Um sistema é uma linguagem apropriada para analisar certos tipos de problemas de forma abstrata. É dito consistente quando não apresenta contradições, isto é, quando não é possível deduzir logicamente do grupo de axiomas, um teorema e a sua negação. Em geral um sistema apresenta:

linguagem própria; conjunto de palavras não definidas; conjunto de axiomas; conjunto de teoremas; sistema lógico dedutivo.

Um Modelo de Sistema

Um modelo para um sistema pode ser dito como sendo qualquer interpretação coerente que se faça do sistema, utilizando a linguagem própria, as palavras não definidas, os axiomas e os teoremas obtidos dedutivamente. Assim, um modelo é uma aplicação ou uma realização do sistema. Barbosa (1970) apresenta um esquema que é adaptado abaixo, mostrando como um sistema pode ter vários modelos ou várias aplicações diferentes.



Modelos De Geometria Lobatscheviskiana

Dois modelos são apresentados a seguir, de forma bastante simples e que possibilitam analisar e discutir abordagens distintas aos conceitos que, usualmente, são tratados já no inicio da escolaridade em geometria, direcionando exclusivamente para a visão euclidiana. Em tais modelos caracterizam-se os elementos primitivos ponto, reta e plano para posteriormente interpretação de alguns axiomas.

Modelo 1: Considera-se um círculo e interpreta-se como plano de Lobatschevsky ao interior desse círculo.

A palavra "ponto" é traduzida como ponto no sentido usual euclidiano (no caso um dos pontos pertencentes ao interior do círculo e não pertencente à circunferência associada a ele).

A palavra "reta" é traduzida como a parte de uma reta no sentido usual (como o plano é o interior do círculo, a reta é parte do que se chama corda da circunferência, por não conter os extremos que pertencem à circunferência).

Tomando-se uma "reta c" (figura 6), por qualquer ponto P, não pertencente à c, pode-se traçar, pelo menos, as "retas" a e b, que passam pelas interseções da reta c (corda) com a circunferência. Essas duas retas a e b não têm ponto comum interior ao círculo com a reta c, satisfazendo a definição de retas paralelas (interseção vazia).

$$\left.\begin{aligned} c \cap a &= \varnothing \\ c \cap b &= \varnothing \end{aligned}\right\} \Rightarrow a, b \,//\, c$$

$$a \cap b = \{P\}$$

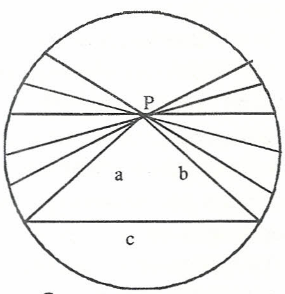


Figura 6

O modelo assim caracterizado é conhecido como de Klein.

Modelo 2: Considera-se uma reta básica r e um dos semi-planos de origem nela. O plano de Lobatschevsky é um dos semi-planos limitados pela reta básica, excluída essa. Traduz-se as palavras "ponto" e "reta", respectivamente, por ponto P no sentido usual euclidiano e semicircunferência C de centro na reta básica .

Dados dois pontos quaisquer distintos, A e B, não pertencentes à reta básica, então eles pertencem a uma e uma só reta (semicircunferência C). Toma-se o segmento de reta usual unindo A e B. O segmento de reta, perpendicular a AB pelo seu ponto médio, encontra a reta básica r no ponto C que é centro da semicircunferência única contendo A e B (figura 7).

Duas retas (semicircunferências) distintas possuem em comum no máximo um ponto, o que é mostrado na figura 8 quando as retas s e t têm o ponto Qem comum.

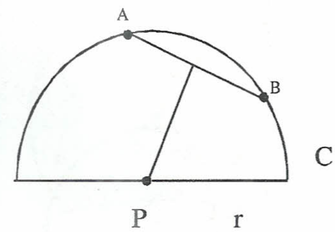


Figura 7

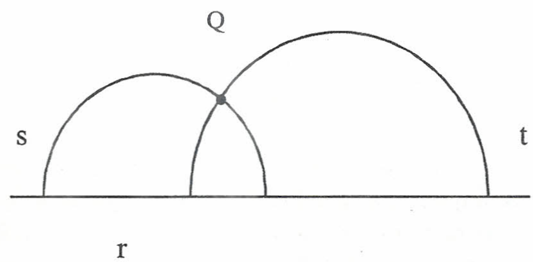


Figura 8

Dados um ponto P, uma reta r com o ponto P não lhe pertencendo, uma reta básica u, cuja intersecção com r é constituída pelos pontos A e B (figura 9). Existe, em geral, pelo menos as retas t que contem B e P e s que contem A e P que não tem ponto comum com a reta r, satisfazendo a definição de retas paralelas

$$s \cap t = \{P\}$$

$$\left.\begin{aligned} r \cap s &= \varnothing \\ r \cap t &= \varnothing \end{aligned}\right\} \Rightarrow s, t \,//\, r$$

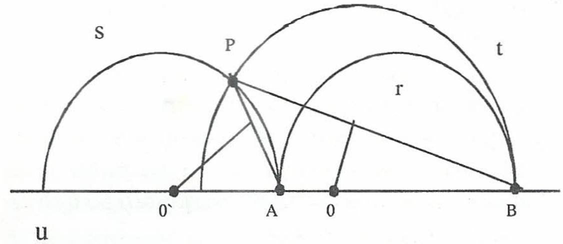


Figura 9

O modelo acima é denominado modelo de Poincaré.

A consistência de um sistema foge aos objetivos desse texto. Procuramos com os exemplos acima ilustrar existência de outros modelos além do euclidiano e algumas comparações entre eles. Da mesma forma, a busca de contradições na construção de um modelo que tornaria o sistema não consistente, vai além do que pretendemos atingir no artigo. Um detalhamento mais aprofundado de modelos de geometrias não euclidianas pode ser encontrado em Leivas (1988, 1992, 1996).

Modelo de Geometria de Riemann

Riemann propõe o seguinte axioma:

"Por um ponto não pertencente a uma reta não existe reta paralela".

Num dos sistemas Riemann utiliza o axioma: "Se dois pontos são distintos, então eles pertencem a uma reta", mas não utiliza o axioma: "Se dois pontos são distintos então eles pertencem no máximo a uma reta".

Considera-se como plano da Geometria Riemaniana, a superfície de uma esfera usual euclidiana. Traduz-se a palavra "ponto" por ponto no sentido usual, e "reta" por circunferência máxima.

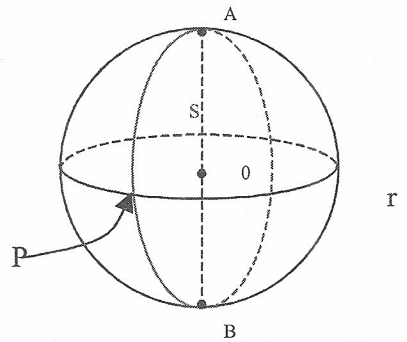


Figura 10

Qualquer ponto P da superfície esférica pertence a uma circunferência máxima s, que é obtida pela intersecção da esfera com um plano que passa pelo seu centro e por este ponto P. Além disso, pode-se passar por P infinitos planos contendo o centro da esfera e o ponto. Tais planos interseccionados com a esfera resultam circunferências máximas (como as retas s e r da figura 10).

Dados dois pontos distintos, sempre existe um plano que passa pelo centro da circunferência, gerando uma circunferência máxima que os contém, portanto eles pertencem a uma "reta". No caso dos pontos serem diametralmente opostos, como A e B, eles pertencem a mais de uma reta.

Por outro lado, dado um ponto A e uma reta s, qualquer plano que passe pelo centro da esfera, O, e contendo A, interseccionará a reta, em dois pontos. Portanto, não se tem "reta" paralela à reta dada, valendo o axioma de não existência de paralela.

As "retas" assim caracterizadas nessas geometrias são denominadas geodésicas. Um estudo de geodésicas em superfícies pode ser encontrado em Leivas (1985).

4. Interpretando ângulos em modelos

Define-se ângulo como sendo a reunião de duas semi-retas que têm a mesma origem. Assim, ângulo é definido como um conjunto de pontos. Filósofos gregos discutiam sobre considerar ângulos como:

quantidade – qualidade – relação

que foi uma categoria criada por Aristóteles. Próclus diz que é uma combinação das três, pois necessita: quantidade envolvida na magnitude; qualidade que lhe é dada pela forma; relação que subsiste entre as retas e os planos que o limitam.

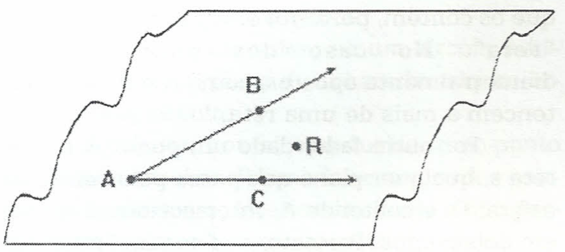
Em 1893, H. Shotten categoriza as definições de ângulo em:

- diferença de direções entre duas linhas retas;
- medida de rotação necessária para trazer um lado de sua posição inicial para o outro;
- porção do plano entre as duas retas que o definem.

Atualmente, a definição mais utilizada é a apresentada no início desta seção, que conduz a um conjunto de pontos.

Comparando ângulos em modelos

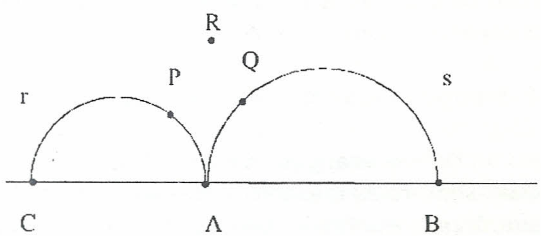
Geometria Euclidiana



$\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$

R pertence ao interior do ângulo

Geometria Lobatschevsky



reta r: semi-circunferência AC

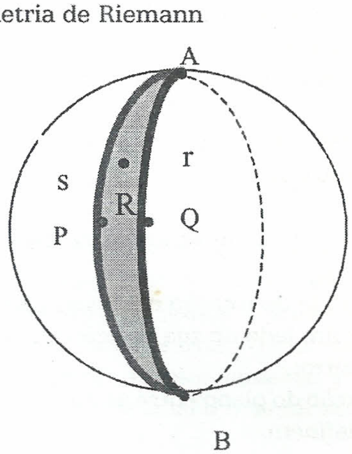
reta s: semi-circunferência AB

origem comum: A

$\angle PAQ = AP \cup AQ$

R pertence ao interior do ângulo

Geometria de Riemann



reta s: semi-circunferência APB

reta r: semi-circunferência AQB

origem comum: A

$\angle PAQ = AP \cup AQ$

R pertence ao interior do ângulo

Finalizando o artigo pode-se perguntar qual a importância ou interesse em estudar geometrias não euclidianas? Isto conduziria, dentre outras questões, ao estudo da Física que rege o universo, da passagem da Física Newtoniana para a Quântica. Outro aspecto a ser tratado é relativamente aos triângulos geodésicos, isto é, os triângulos cujos lados são as "retas" de uma superfície, como aqueles formados sobre uma esfera (figura 5). Nos modelos não euclidianos, a adição das medidas dos ângulos internos de um triângulo tem diversos resultados. No modelo de Riemann, o valor é maior do que 180º e no de Lobatschevsky é menor do que 180º.

Uma forma de classificar geometrias pode ser por meio da medida da curvatura da superfície, a denominada curvatura gaussiana. O leitor interessado pode encontrar uma tal classificação em Leivas (1985).

6. Conclusão

Poder-se-ia apresentar várias utilizações de geometrias que não sejam euclidianas, o que tornaria o artigo demasiado longo. Algumas aplicações importantes dizem respeito a triângulos esféricos, distâncias esféricas, ângulos esféricos, todos eles como aplicações úteis de geometria, por exemplo, para a navegação marítima.

O que norteou o artigo foi uma possibilidade de despertar para uma abordagem da geometria como um sistema axiomático, promover uma visão cultural mais ampla e subsidiar os professores ou futuros professores na sua prática. A existência de geometrias além da euclidiana ainda é desconhecida por muitos e acredita-se que para um ensino atual desta disciplina é necessário que se tenha um conhecimento amplo, incluindo até mesmo questões não abordadas no artigo, como geometrias finitas.

7. Referências

BARBOSA, Ruy Madsen. **Elementos de lógica aplicada ao ensino secundário**. São Paulo: Livraria Nobel S.A., 1970.

BOYER, Carl B. **História da matemática.** 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda., 1996.

DAVIS, Philip J. & HERSH, Reuben. **A experiência matemática**. 3. ed. trad. João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

LEIVAS, J.C.P. **Um estudo de superfícies em R^3**.

Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, 1985.

____________ . Geometrias não euclidianas. 1ª parte – uma classificação. **Vetor**: revista de Ciências Exatas e Engenharias, Rio Grande, v. 2, p. 99-106, 1988.

____________ . Geometrias não euclidianas. 2ª parte – um modelo de geometria hiperbólica. **Vetor**: revista de Ciências Exatas e Engenharias, Rio Grande, v. 3, p. 57-63, 1992.

DUTRA, I.M.; LEIVAS, J.C.P. Geodésicas & cia: um paralelo entre geometria diferencial e geometria euclidiana. **Vetor**: revista de Ciências Exatas e Engenharias, Rio Grande, v. 6, p. 77-84, 1996.

MACHADO, Maria da Penha Lopes. Lições da Antigüidade. **Presença pedagógica**, edição especial. Belo Horizonte: William Livros Ltda., 2005.

REZENDE, Eliane Q.F.; QUEIROZ, Maria Lúcia B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2000.

SKEMP, R. **Psicologia del aprendizagje de las matemáticas**. 2. ed. Madrid: Ediciones Morata, S.L., 1993.

STRUIK, D.J. **História concisa das matemáticas.** 3. ed. Lisboa: Gradiva, 1997.

WILDER, Raymond. A base cultural da Matemática. **Cadernos de educação e matemática**, Lisboa, ano 3. Associação de Professores de Portugal, 1998.

1 Prof. aposentado Fundação Universidade Federal do Rio Grande
Prof. do Curso de Matemática da ULBRA – Canoas