

## PROBLEMAS DE MATEMÁTICA RECREATIVA: RESOLUCIÓN CON TAC

**Daniel Moreno Caicedo**

**Juddy Amparo Valderrama Moreno**

dmoreno65@gmail.com, juddyamparo2@gmail.com

Colegio Técnico Vicente Azuero- EDUMAT-UIS, Colombia

### Resumen

*El grupo de investigación en Educación Matemática EDUMAT- UIS, ha vinculado a diferentes colegios de los departamentos de Santander y Cesar para hacer parte de Comunidades de Practica (CoP) y trabajar mancomunadamente en la reflexión, diseño y evaluación de prácticas pedagógicas. Un ejemplo es la participación del Colegio Técnico Vicente Azuero en las CoP "Tecnologías" y "Matemática Recreativa" donde semanalmente se reúnen con el objetivo de fortalecer el desarrollo del Pensamiento Matemático a través de la resolución de problemas de Matemática Recreativa usando las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC). Producto de este trabajo se espera fortalecer el discurso Matemático Escolar (dME) del profesor en cuanto a la innovación educativa con uso de las TAC y para tal fin se planea el taller de estudiantes, donde a través del socio cognitivo GeoGebra, se experimente, visualice y razone entorno de la resolución de problemas del proyecto de Calendario Matemático.*

**Palabras clave:** TAC, resolución de problemas, Matemática Recreativa,

### Introducción

En este momento histórico por el avance tecnológico, surge la era digital y toma relevancia en todos los campos del ser humano, si se usa en el aula de clase donde se puede tener diferentes aparatos tecnológicos (Celular, Tabletas, Computador), y con ellos tiene una gama de aplicaciones para ser utilizadas de acuerdo con los gustos e interés, hoy existes software de aplicación a las disciplinas y programas que se ajustan a tendencias educativas y a las necesidades de los contextos y estudiantes de la época. Como lo manifestó Prensky (2010), los estudiantes actuales son "nativos digitales" y el uso de una computadora, una tableta u otro dispositivo digital hacen parte de su cotidianidad, razón por lo cual desde el Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad Industrial de Santander (EDUMAT–UIS) se hace parte de las Comunidades de Práctica de Profesores (CoP): Matemática Recreativa y Tecnologías, donde se busca fusionar intereses para fomentar el uso de tecnologías digitales en la resolución de problemas. Desde esta mirada se retoma lo planteado por documentos orientadores expedidos por Ministerio de Educación Nacional MEN como son; los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias (2006), el primero plantea la estructura curricular para la enseñanza de la matemática, donde el objetivo es el

desarrollo del Pensamiento Matemático (PM) y los contenidos son solo el pretexto para enseñar una matemática contextualizada en sí misma y en otras ciencias; el segundo reafirma lo planteado y organiza estándares básicos por grupo de grados y por nivel de competencia, es así que define el punto mínimo de llegada al finalizar un grupo de grado. Por otro lado, el proyecto "Colombia Aprendiendo" dirigido por el profesor Carlos Zuluaga Ramírez, apunta al mismo horizonte, donde a través del enfoque de planteamiento y resolución de problemas se busca desarrollar PM, enfatizando en el razonamiento y la comunicación, promoviendo el abordaje y la búsqueda de diferentes estrategias de solución a los problemas planteados en el aula de clase. En consecuencia, el propósito del trabajo es contribuir al mejoramiento de la calidad de la Educación Matemática, promoviendo el desarrollo del PM a través de la estrategia de la resolución de problemas de Matemática Recreativa con tecnología digitales.

El discurso Matemático Escolar (dME) enriquecido con las Tecnologías del Aprendizaje y el Conocimiento (TAC) y la resolución de problemas de Matemática Recreativa.

Este taller se aborda desde tres categorías, el refinamiento del discurso Matemático Escolar (dME), desde las Comunidades de Práctica (CoP), y resolución de problemas con el uso de tecnologías digitales en el aula de clase, pero no como elementos separados sino como un todo armonioso. Se pretende explicar como si el profesor hace la aleación entre abordar la resolución de problemas, que en este caso se enfatiza en Matemática Recreativa con el uso de tecnologías digitales puede llegar a enriquecer su dME.

La capacidad comunicativa que el profesor posee para dar a conocer un saber matemático mediante estrategias de enseñanza no es una capacidad innata, no responde simplemente a su grado de conocimiento, ni se adquiere de forma inmediata al finalizar su programa de formación, sino que se construye y refina en la medida en que el profesor desee y busque las herramientas tanto pedagógicas como disciplinares. En consecuencia, responde a tener un discurso con elementos que le permita tener la satisfacción comunicarse de forma coherente, precisa, concisa pero sencilla, es decir comunicar un saber de forma clara para el receptor del mensaje, pero con elementos matemáticos inmersos.

Según (Chevallard, 1991), el conjunto de transformaciones adaptativas que debe sufrir un contenido de saber para convertirse en un objeto de enseñanza es el proceso de transposición didáctica, y este solo se logra en la medida que el maestro busca la forma de llegar al estudiante para que el saber sabio llegue a ser saber enseñando. Por lo anterior no solo tener un conocimiento matemático, sino es saber aplicarlo y para ello se requiere tener los elementos para convertirlo en un objeto matemático contextualizado propio para la enseñanza, donde se determine las estrategias requeridas para poder lograr el aprendizaje en los estudiantes; razón por la cual desde las CoP se busca dar elementos para que el profesor los apropie y tenga herramientas para lograr el objetivo del saber enseñado.

Otro referente es lo planteado por (Montiel,2010) quien afirma que para lograr el propósito de la enseñanza- aprendizaje el desarrollo de estrategias en el aula implica una gran cantidad de elementos para provocar respuestas y construir conocimiento. Y se requiere hacer preguntas pensadas en cómo lograr el aprendizaje de un objeto matemático y se debe tener

conocimiento en la didáctica de la matemática, para no hacer preguntas simplemente por preguntas sino preguntas con sentido que conlleven a construir conocimiento.

De igual forma (Cantoral et al, 2006), manifiesta que es la negociación quien posibilita la institucionalización del saber en la medida que los procesos de enseñanza tengan transformaciones que afecten la estructura y el funcionamiento, de manera que se establezcan relaciones entre estudiantes y profesores.

En este escrito se ha mencionado CoP, pero a que hace referencia. Según (Wenger, 1998), son un grupo de personas que comparten un interés común y que profundizan su conocimiento. En síntesis, son las CoP quienes brindan los espacios para compartir con sus pares y refinar el dME replanteando prácticas pedagógicas bajo la negociación del saber disciplinario y pedagógico. Para este caso se busca mejorar el dME ahondando en la resolución de problemas usando tecnologías digitales, por lo tanto, se requiere enriquecer en tres frentes: disciplinar, tecnológico y pedagógico.

En cuanto a la resolución de problemas el referente es lo planteado por MEN (1998); no se trata de enseñar una matemática de contenidos, sino una matemática contextualizada en sí misma y en otras ciencias; donde a través del desarrollo de los procesos (comunicación, la modelación, el razonamiento, la elaboración, la comparación y ejercitación de procedimientos y resolución de problemas) sean la esencia y los contenidos no sean más que el pretexto para enseñar matemáticas. Razón por la cual este trabajo se fundamenta en la resolución de problemas de matemática recreativa usando tecnologías digitales.

Como lo manifestó (Villareal, 2010), el uso de la tecnología digital mejora la actitud de aprendizaje vinculadas a una actividad matemática y permite resolver problemas de una manera menos compleja. Lo anterior se puede evidenciar al realizar los talleres propuestos en diferentes escenarios (estudiantes de Colegio, estudiantes de licenciatura en matemáticas, y profesores de niveles de básica, media o superior), cada población usa sus conocimientos matemáticos a la hora de resolver un problema con ayuda de una herramienta tecnológica, si y solo si se tiene conocimiento en el manejo y bondades que el software brinda, que en este caso es GeoGebra, puesto quien tiene la Tecnología como socio cognitivo, puede hacer la construcción y responder al problema propuesto con mayor facilidad.

Por lo anterior como lo mencionó (Moreno, 2014), los artefactos tecnológicos en la medida que se utilizan y se apropia sus bondades se convierten en socio cognitivo, entendiendo como socio cognitivo en la medida que le permita modelar, experimentar conjeturar, comprobar, concluir, generalizar y comunicar. Es así como el uso de las tecnologías digitales en el aula no solo permite el dinamismo y mejora la actitud exploración y motivación, sino que genera ambientes de aprendizaje en torno de un objeto matemático sus conceptos y propiedades, de igual forma permite adentrar a los estudiantes en un contexto de la matemática.

Desde esta mirada, no se trata de aprender solo el manejo de la tecnología sino de saber utilizarla con fines educativos; parafraseando a Lozano (2011), es tener elementos para aprender más y de mejor manera. Y por esto se plantea la importancia de enriquecer el dME del profesor que orienta la matemática y el pertenecer a CoP, le da la oportunidad de mejorar e intervenir prácticas pedagógicas y participar en discusiones que fomenten la investigación

en Educación Matemática promoviendo en el profesor su espíritu innovador, creativo e investigativo de su propia práctica pedagógica.

### Metodología y propuesta didáctica

Este taller presenta un diseño didáctico para resolver problemas de Matemática Recreativa en cinco pasos: interpretación, razonamiento, solución, conceptualización y comunicación. Para esto se busca que en cada problema se reflexione sobre el objeto matemático, el saber matemático y se comunique dicho saber con un lenguaje propio de las matemáticas dando la oportunidad para el desarrollo del Pensamiento Matemático.

Con anterioridad se determina como la resolución de problemas de Matemática Recreativa responde a lo planteado en los ámbitos internacional y nacional tanto por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y por la National Council of Teachers of Mathematics por sus siglas en inglés (NCTM), en cuando a la importancia enseñar una matemática contextualizada y por procesos matemáticos; al igual que importancia de hacer la incursión de uso de las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) con fines educativos.

Se propone el análisis del problema titulado "herencia desequilibrada". El problema dice: Luis y Gustavo heredan juntos un terreno ABDE en forma de trapecio rectángulo. Luis coloca un poste C sobre el lado BD y se adjudica la parcela ACE, dejando a su hermano las parcelas ABC y CDE. Seguro de estar en desventaja con respecto a su hermano, Gustavo toma su decámetro y mide sus parcelas. Esto es lo que encuentra:  $AB = CD = 12 \text{ Dm}$  y  $BC = DE = 16 \text{ Dm}$ . Después, calcula la superficie de cada parcela y se dirige a su hermano para reclamarle parte de la parcela que se atribuyó. ¿Cuál es el área que está reclamando Gustavo?

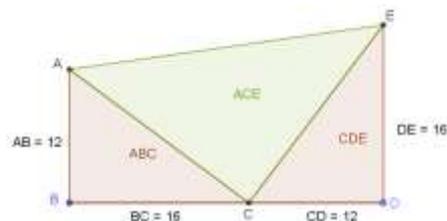


Figura 1. Herencia desequilibrada

Este problema se propuso a los diferentes grupos, (estudiantes, profesores), buscando la solución con la mediación de los cinco pasos:

El primer paso es la *interpretación* y se enfoca a la pregunta ¿Qué están preguntando? y se responde a la competencia interpretar. Este paso en ocasiones se pasa de alto o se subestima, sin embargo, en ocasiones la pregunta es directa, pero en ocasiones se requiere hacer mayor grado de interpretación para identificarla con claridad, en este caso es sencilla ¿Cuál es el área que está reclamando Gustavo? Pero al hacer reflexionar a quien está abordando; sin importar el problema, siempre se debe tener claro el horizonte de solución y para ello se debe responder de forma puntual y específica a la pregunta sin evasivas, buscando la solución más asertiva.

Un segundo paso es el *razonamiento* y responde a determinar los datos que se tiene tanto explícitos como implícitos en el problema. Como se puede observar, en este problema de la

herencia, se tiene explícito que es un trapecio rectangular, los valores de las medidas:  $AB = CD = 12 \text{ Dm}$  y  $BC = DE = 16 \text{ Dm}$ . Implícitamente se tiene que los triángulos ABC y CDE son congruentes, y que si se rota  $90^\circ$  el trapecio con respecto al punto D, se tiene la altura 28, base mayor 16 y base menor 12. Estos datos implícitos no surgen con facilidad y se requiere la imaginación de la persona que está resolviendo el problema. A pesar de lo anterior, no fue hasta que se hizo la rotación con el software GeoGebra que se convencieron de ser un trapecio. Sin embargo, con facilidad determinaron las fórmulas del área del triángulo y del trapecio. Con ayuda de GeoGebra se hace una demostración de las bondades que ofrece el software dinámico al mostrar la construcción (figura 2).

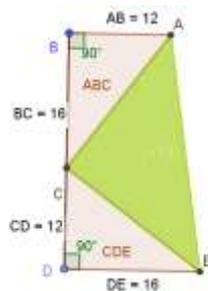


Figura 2. Trapecio rotado

En tercer lugar, se tiene el paso solucionar y responde a ¿Cuál es la estrategia para resolver el problema? Este es uno de los pasos que requiere mayor atención porque se tiene la concepción de única solución, apreciación errónea porque de acuerdo con quien aborde el problema puede existir varias formas de resolver. A continuación, se muestra soluciones presentadas por los participantes.

Tabla 1.

Estrategias de solución

Estrategia 1

Del área del trapecio se restan las áreas de los triángulos rectángulos ABC y CDE; a este resultado se divide en dos y se obtiene el área que reclama Gustavo.

$$2 (\text{área triángulo}) = 2 \frac{16 \times 12}{2} = 192$$

$$\text{área del trapecio} = \frac{28 (16 + 12)}{2} = 392$$

$$\text{área triángulo ACE} = 392 - 192 = 200$$

$$\text{diferencia de áreas} = 8$$

Por lo tanto, Gustavo reclama 4 Dm

Estrategia 2

Se determina el área de los tres triángulos rectángulos; inicialmente usando Pitágoras se encuentra los lados del triángulo ACE, para luego hallar su área y se resta las áreas de los triángulos ABC y CDE, se divide el resultado en 2 y se obtiene el área que Gustavo reclama

$$\text{Pitágoras. } AC^2 = 12^2 + 16^2 = 20$$

$$CE^2 = 12^2 + 16^2 = 20$$

$$\text{Área triángulo ACE} = \frac{20 \times 20}{2} = 200$$

$$\text{área triángulo ABC} = \frac{16 \times 12}{2} = 96$$

$$\text{área triángulo } CDE = \frac{16 \times 12}{2} = 96$$

$$200 - (192) = 8$$

$$\frac{8}{2} = 4$$

Luego Gustavo reclama 4 Dm

Fuente: Autor

Como cuarto paso es la conceptualización, acá se determina conceptos y propiedades y la pregunta es ¿Qué conceptos matemáticos se requieren?, se evalúa no solo para dar la respuesta sino para abordar la estrategia de solución. Puntualizando se requiere el concepto de trapecio rectangular, propiedades de perpendicularidad y paralelismo, teorema de Pitágoras, rotación, área de un trapecio, triángulos rectángulos, área de un triángulo y finalmente conceptualizar en el principio de igualdad y congruencia.

Después de tener solución al problema, haber conceptualizado es importante comunicar las ideas matemáticas que se usaron para resolver el problema, por lo tanto, se pide que en este paso se comunique con claridad ¿Cómo se resuelve el problema? En este paso se busca que se comunique todos los conceptos usados, orientando el paso a paso de la solución sobre todo tener con propiedad las ideas matemáticas.

Para concluir, el desarrollo de una situación problema, es importante tener una didáctica del paso a paso para resolver en forma adecuada el problema planteado. Se requiere tener claro los conceptos a usar y ser creativos para encontrar la solución y que esta sea pertinente en su planteamiento y comprensible para quienes lean o vean la solución. Esta propuesta se resume en el gráfico 1

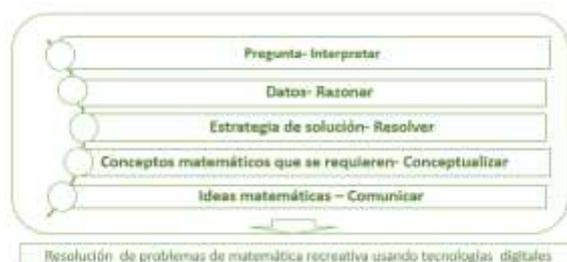


Gráfico 1. Propuesta didáctica

Al puntualizar el taller se desarrollará en tres momentos. Inicialmente se hace una explicación teórica de como resolver problemas de Matemática Recreativa usando las TAC, seguidamente un trabajo practico el cual requiere de equipos de computo con la preinstalación de GeoGebra versión 5; y finalmente el momento de reflexión del trabajo y su implicación en el aula de clase.

### Resultados e implicaciones

Para analizar los resultados se retoma un poco de historia en cuento la incursión del uso de tecnologías al currículo de matemáticas. Al iniciar el siglo XXI el (MEN, 2000) lideró el proyecto titulado "Incorporación de las Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media en Colombia", El proyecto consistió en capacitar a los maestros e intervenir sus prácticas

y para ello se dotó los colegios de las Calculadoras Texas 92 PLUS. Sin embargo, desde el grupo de investigación EDUMAT- UIS no se detuvo el trabajo y aún se continua con las reuniones semanales de profesores para fomentar las apropiaciones el discurso matemático escolar. Por otro lado, y a la par se fue formando el subgrupo de Matemáticas Recreativa quienes se enfatizaron en la resolución de problemas que hacen mención de su nombre y potenciaron en desarrollo del proyecto "Calendario Matemático" liderado por el grupo "Colombia Aprendiendo".

Particularmente se hizo la aplicación de este taller en la CoP Tecnologías (solo profesores), seguidamente CoP Matemática Recreativa (profesores y estudiantes de pregrado licenciatura en matemáticas) y finalmente como proceso de refinación en el RELME 32. En respuesta a esto se puede afirmar que es una necesidad sentida que el profesor debe mejorar su dME y compartir con sus pares es una buena estrategia, puesto que clásicamente se presenta en las aulas de clase las figuras de forma estándar o como viene registrado en los textos escolares y con ejercicios de reflexión como estos, deja entre ver la necesidad de hacer dinámico la presentación de tal forma que le permita al estudiante ver las diferentes posiciones. Un ejemplo de ello es lo ocurrido con el problema herencia desequilibrada, que sin importar el grado de escolaridad una de las dificultades que más se repitió fue ver el trapecio, ya que como la figura mostraba el trapecio acostado los profesores y estudiantes rotaban la cabeza después del análisis para poder identificar la altura del trapecio e identificar la estrategia de solución. Pero para ser dinámica la presentación solo se puede hacer con el método de representación de un software matemático que en este caso es Geogebra.

### **Consideraciones finales**

Tener los elementos claros en cuanto a didáctica se refiere en la resolución de problemas facilita el proceso de enseñanza y con ello se garantizar mayor impacto en el aprendizaje, en consecuencia, se ha planteado una metodología en cinco pasos: interpretar, razonar, solucionar, conceptualizar y comunicar y de esta forma el profesor de matemáticas pueda ahondar en la solución con mayor grado de efectividad.

El Proyecto de Matemática Recreativa con su estrategia "Calendario Matemático" se socializa en el departamento de Santander desde hace 21 años y esto ha permitido compartir con profesores y estudiantes, diversas estrategias de solución y formas de abordar los problemas allí planteados. En este proceso se ha experimentado métodos de representación de cuerdo a las tendencias educativas y a la formación del profesor que oriente la clase. En la última década desde las CoP, se busca incentivar el uso de tecnologías digitales como método de representación para que maestros y estudiantes encuentren diferentes alternativas para resolver el mismo problema, apoyándose en las bondades ofrecidas por el software que en este caso es GeoGebra, el cual permite observar las características, conceptos y propiedades en una construcción matemática. Permitiendo así el desarrollo del PM desde la institucionalización del saber. Se comprende por institucionalización el momento que se hace en el aula de clases, donde con la mediación del profesor hace que varios estudiantes,

muestren al grupo sus conclusiones y procesos que realizaron, pueden ser erróneos o verdaderos, para resolver la situación propuesta y producto de la discusión del grupo se llega al saber matemático.

## Referencias

- Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de Matemáticas*. Recuperado [https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869\\_archivo\\_pdf9.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)
- Ministerio de Educación Nacional. (2000). *Formación de Docentes sobre el uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas*. Recuperado <https://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/article-81040.html>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Recuperado [https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-116042\\_archivo\\_pdf2.pdf](https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf)
- Montiel, G. (2010). *Hacia el rediseño del discurso: Formación docente en línea centrada en la resignificación de la Matemática Escolar*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Volumen (13)69-84 Recuperado de <http://www.clame.org.mx/relime/201004d.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: editorial Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Lozano, R. (2011). *De las TIC a las TAC: tecnologías del aprendizaje y el conocimiento*. Anuario ThinkEPI. Volumen (5) 45-47 Recuperado de <https://recyt.fecyt.es/index.php/ThinkEPI/article/view/30473/16039>
- Prensky, M. (2010). *Nativos e Inmigrantes digitales*. Distribuidora SEK, S.A.
- Wenger, E. (1998). *Communities of Practice: Learning, Meaning, and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Villareal, G. (2010). *Caracterización del uso de la tecnología, por profesores y alumnos, en resolución de problemas abiertos en matemática (tesis doctoral)*. Universidad de Barcelona.