

CONSTRUINDO O PENSAMENTO PROBABILÍSTICO: O JOGO DO FRANC-CARREAU

Cileda de Queiroz e Silva Coutinho*

Auriluci de Carvalho Figueiredo**

cileda@pucsp.br, aurilucy@uol.com.br

Pontifícia Universidad Católica de Sao Paulo*, Brasil

Universidade Metropolitana de Santos**, Brasil

Resumen

O objetivo do minicurso é discutir aspectos didáticos da construção do conceito de probabilidade, tendo como contexto a articulação entre os enfoques clássico e frequentista, usando como ferramenta a simulação computacional construída com o software GeoGebra. Consideraremos a apresentação e interpretação do modelo de pensamento probabilístico proposto na Taxonomia SOLO para discutir aspectos da resolução do jogo Franc-carreau. O minicurso está dividido em etapas que envolvem: estabelecer hipóteses para a probabilidade e observar o resultado, discutir a estabilização da série de frequências relativas acumuladas, determinar a probabilidade segundo o enfoque clássico e analisar os resultados observados para construção do pensamento probabilístico. Diante das atividades desenvolvidas esperamos que os participantes logrem a realizar as simulações de forma autônoma, assim como o cálculo a priori do valor da probabilidade procurada por meio da probabilidade geométrica, utilizando a confrontação dos resultados como forma de validação.

Palabras clave: Probabilidade geométrica, Geogebra, simulação computacional, jogo Franc-carreau

Introdução

O desenvolvimento do pensamento probabilístico é, nos dias de hoje, um ponto crucial no ensino e na aprendizagem da matemática da escola básica. No Brasil, desde a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1997; Brasil, 1998), particularmente os destinados ao Ensino Médio (Brasil, 2000; Brasil, 2002 e Brasil, 2006) o ensino da probabilidade tem tido um lugar bem determinado nos currículos escolares. No entanto, enquanto parâmetros, tais documentos não eram de caráter obrigatório, o que fazia com que, muitas vezes, não fossem seguidos. Podemos assim observar resultados de pesquisas que indicam a pouca familiaridade dos alunos com temas relativos à probabilidade. O mesmo pode ser observado na formação de professores, tanto inicial como continuada, o que faz com que se construa um ciclo perverso para a construção do pensamento probabilístico. Consideraremos a apresentação e interpretação do modelo de pensamento probabilístico proposto na Taxonomia SOLO, em termos do que significam para o ensino e a aprendizagem da probabilidade, conforme Mooney, Langral e Hartel (2014). Segundo esses autores,

A taxonomia SOLO incorpora cinco modos de funcionamento: sensorimotor (desde o

nascimento), icônico (a partir de 18 meses), simbólico concreto (a partir de 6 anos), formal (a partir de 14 anos) e pós-formal (a partir de 20 anos). O surgimento e desenvolvimento desses modos de funcionamento é tal que os modos anteriores são incorporados nos modos posteriores. Além disso, dentro de cada modo, os alunos percorrem três níveis cognitivos - não-estrutural, multi-estrutural e relacional -, em que cada nível assume o anterior e representa uma mudança na complexidade do pensamento dos alunos. No nível não-estrutural do pensamento, o aluno focaliza um único aspecto relevante de uma tarefa ou idéia. Um aprendiz no nível multi-estrutural reconhece vários aspectos de uma tarefa ou idéia, mas é incapaz de consolidá-los. No nível relacional, o aluno pode integrar os aspectos da tarefa ou idéia de maneira coerente. Existem também dois níveis que caracterizam o pensamento que muda entre os modos; no nível pré-estrutural, um aprendiz funciona de maneiras características do modo anterior e, no nível abstrato estendido, um aprendiz funciona de maneiras características do modo seguinte. Mooney, Langral e Hartel (2014, p499).

No presente minicurso, discutiremos aspectos da construção do conceito de probabilidade por alunos do Ensino Médio (15 a 17 anos de idade) à luz dos preceitos da taxonomia SOLO, quando o contexto é o da simulação computacional, com auxílio do software GeoGebra.

O jogo a ser utilizado será o do *Franc-carreau* (Badizé, Jacques, Petitpas e Pichard, 1996), proposto pelo matemático e naturalista francês George Louis Leclerc (1707 – 1788), Conde de Buffon, que consiste no lançamento de uma moeda sobre um piso de azulejos de forma quadrada.

Finalidade, desenho e implementação do minicurso

Nesta seção, objetivo do minicurso é discutir aspectos didáticos da construção do conceito de probabilidade, tendo como contexto a articulação entre o enfoque clássico e o enfoque frequentista e usando como ferramenta a simulação computacional construída com o *software* GeoGebra. O minicurso destina-se a professores que lecionam matemática na escola básica assim como em cursos de formação de professores em nível superior.

Na primeira parte do minicurso será desenvolvida a primeira atividade, na qual os participantes jogarão efetivamente a moeda com o objetivo de estabelecer hipóteses para a probabilidade de se observar o resultado *Franc-carreau*.

No segundo momento, os participantes passarão à simulação computacional com auxílio do software GeoGebra (necessidade de laboratório), no qual discutirão sobre a estabilização da série de frequências relativas acumuladas nos termos da definição proposta por Ventsel (1973) em sua obra *Théorie des Probabilités*, para quem a probabilidade não pode ser outra que não o número ao redor do qual os valores da série das frequências se estabilizam. Nos termos atuais: $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} Fr_n(A)$.

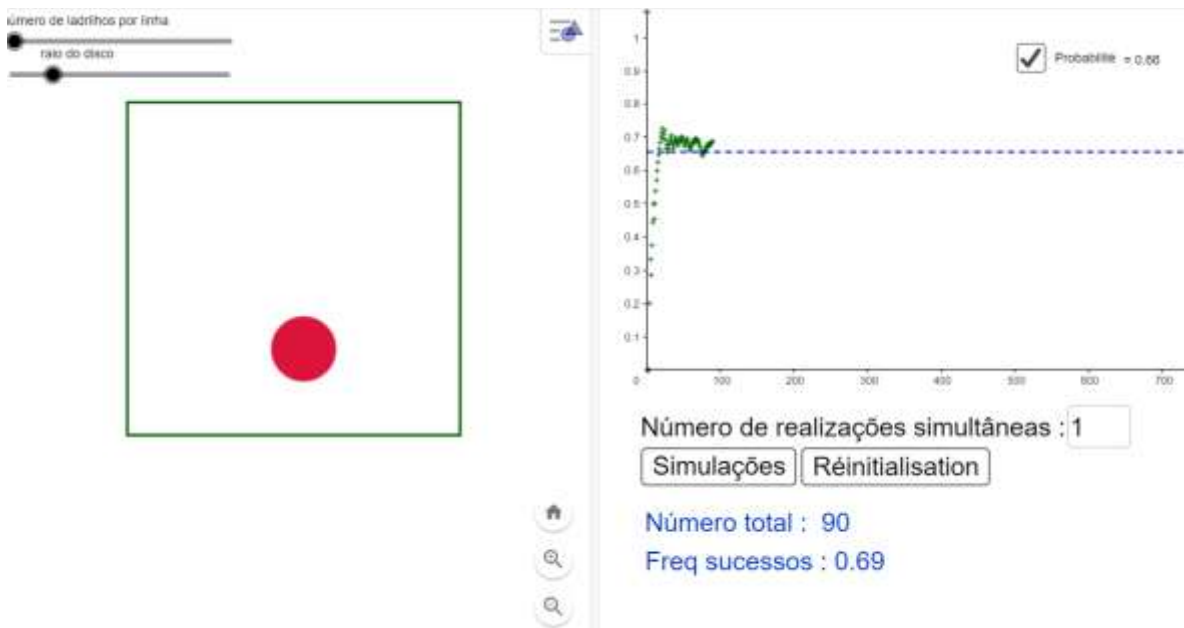


Figura 7. Simulação do jogo Franc-carreau e gráfico da série de frequências resultante das simulações

Fonte: os autores

Vários pesquisadores propõem o uso do computador para o ensino e aprendizagem de conceitos que mobilizam probabilidade como meio de entender os conceitos abstratos ou difíceis para minimizar as dificuldades dos alunos diante de situações que envolvem probabilidade e com isso melhorar habilidades dos alunos (Mills, 2002; Gürbüz, 2008). Batanero e Diaz (2007) enfatizam que os alunos realizem simulações para ajudá-los a resolver problemas simples de probabilidade, e Borovcnik e Kapadia (2009) afirmam que a simulação, quando combinada com o uso da tecnologia, é a estratégia mais apropriada para focar melhor nos conceitos e reduzir a cálculos técnicos.

Na terceira parte da oficina os participantes discutirão a determinação da probabilidade segundo o enfoque clássico ou laplaciano, determinando sua estratégia pelo raciocínio propiciado pela probabilidade geométrica (razão entre as áreas das figuras consideradas). Será oferecido na tela do GeoGebra um quadrado representando um ladrilho do jogo e perguntado aos participantes qual o procedimento para se obter a posição *Franc-carreau*. Na sequência, solicita-se que construam um círculo dados dois pontos, representando a moeda. Clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto que representa o centro do círculo, escolher "exibir rastro". Solicita-se então que desloquem o círculo dentro do quadrado observando o rastro do ponto que representa o centro de forma a que possam fornecer uma hipótese sobre a determinação da probabilidade procurada.

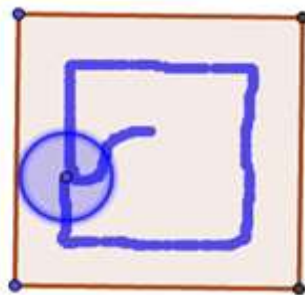


Figura 8. Raciocínio para determinação da probabilidade a priori

Fonte: os autores

No segundo encontro serão discutidos os resultados observados no encontro anterior à luz dos elementos apontados na Taxonomia SOLO para construção do pensamento probabilístico, segundo o qual esperamos, no minicurso, que os participantes desenvolvam elementos de pensamento multi-estrutural e relacional (Mooney, Langral e Hartel (2014, p.502), e também segundo resultados de pesquisas que temos observados, tais como Rodrigues (2018). Citamos aqui Mooney, Langral e Hartel para melhor explicar os tipos de pensamento aos quais nos referimos:

Pensamento Probabilístico Multi-estrutural: o pensamento do estudante é quantitativo e proporcional

Nesse nível o pensamento do estudante exibe:

- Faz uso de razões, contas, probabilidades ou apostas em julgamentos de situações probabilísticas
- Cria espaços amostrais para experimentos de um ou dois estágios sistematicamente
- Fornece exemplos de situações aleatórias ou métodos de geração de acaso
- Reconhece mudanças na probabilidade e independência de eventos com e sem reposição
- Faz previsões que algumas vezes está relacionada com estratégias representativas

Pensamento Probabilístico Relacional: O pensamento do estudante mostra-se em interconexão com ideias probabilísticas

Nesse nível o pensamento do estudante exibe:

- Raciocínio com probabilidades
- Determina probabilidades para situações complexas incluindo situações não semelhantes e não equiprováveis
- Gera espaços amostrais simples para experimentos de dois ou três estágios sistematicamente
- Conecta espaços amostrais com probabilidades

- Examina a distribuição de resultados sem reverter as estratégias de representatividade
- Mostra uma apreciação da aleatoriedade não sendo influenciado pela ordem ou mudança de resultados

Esperamos também discutir-se-á escolhas de abordagem efetiva para sala de aula, com propostas para que os participantes possam utilizar os elementos desenvolvidos ao longo do minicurso em sua prática docente com alunos com idades entre 14 e 17 anos.

Resultados Esperados

Esperamos, ao final da oficina, que os participantes logrem a realizar as simulações de forma autônoma, assim como o cálculo a priori do valor da probabilidade procurada por meio da probabilidade geométrica, utilizando a confrontação dos resultados como forma de validação (etapa fundamental nas dialéticas de ação, formulação, validação propostas por Brousseau (1986) em sua Teoria das Situações.

As etapas de ação e formulação se desenvolvem automaticamente ao propormos o problema aos participantes, organizados em duplas ou grupos, conforma o número deles, a partir da busca individual de conhecimentos para a construção de uma estratégia e da troca com os parceiros para a consecução dessa estratégia.

No que se refere à simulação, faremos a apresentação passo a passo, pode se tratar de um material completamente inédito aos participantes, ilustrando os primeiros lançamentos e o raciocínio para se obter uma série de frequências acumuladas, dialogando com os participantes para que possam sugerir os próximos passos e assim observar os resultados da simulação que se percebe por apreensão perceptiva (nos termos da Teoria das Representações Semióticas (Duval, 2003) e estudado em relação à estatística na pesquisa de Vieira (2008) por meio do gráfico construído no Geogebra, conforme Figura 3.

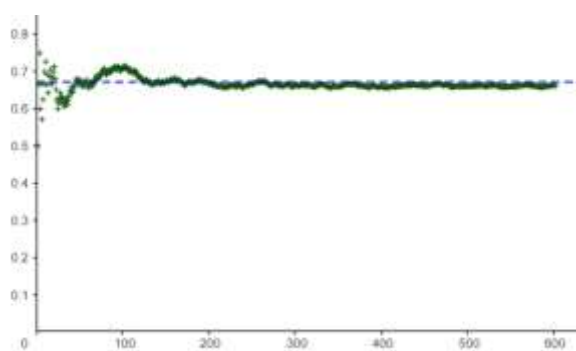


Figura 9. Estabilização da série de frequências após 600 lançamentos da moeda

Fonte: os autores

A partir da apreensão perceptiva da figura construída com uso do recurso “rastros” do ponto que representa o centro do círculo, esperamos que os participantes cheguem à expressão construída a partir da figura 4, a partir da qual $P(FC) = \frac{\text{área de EFGH}}{\text{área de ABCD}}$.

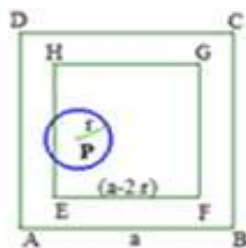


Figura 10. Construção da expressão analítica para determinação da probabilidade Franc-carreau

Fonte: os autores

Tais resultados são coerentes com a mobilização do pensamento probabilístico segundo o nível formal da taxonomia SOLO.

Considerações Finais

O presente minicurso teve por objetivo discutir os aspectos didáticos da abordagem do conceito de probabilidade por meio da simulação computacional, visando o confronto entre o enfoque frequentista e o clássico como ferramentas de validação, segundo as dialéticas propostas na Teoria das Situações Didáticas. Tal abordagem pretendeu fornecer aos professores participantes elementos para o enriquecimento de suas práticas docentes quando do trabalho com seus alunos em nível de ensino médio, ou seja, idades de 14 a 17 anos. Seguimos assim os resultados internacionais indicando a simulação computacional como um caminho fértil para o desenvolvimento do conceito de probabilidade devido às diversas possibilidades de minimização de obstáculos didáticos advindos de procedimentos mecanizados. O jogo do *Franc-carreau* fornece um contexto desafiador aos alunos, envolvendo um jogo de azar ao mesmo tempo que envolve elementos da probabilidade geométrica, com destaque para a razão entre áreas de quadrados, que é um conhecimento já estável para alunos nessa faixa etária.

Dessa forma, acreditamos ser frutífera tal abordagem.

Referências

- Badizé M., Jacques A., Petitpas M. & Pichard J.-F. (1996). Le jeu du Franc-carreau – une activité probabiliste au Collège. Rouen : IREM de Rouen.
- Batanero, C., & Diaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje [Probability, degrees of belief and the learning process]. XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Granada.
- Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2009). Research and developments in probability education. *International Electronic Journal of Mathematics*, 4(3). Disponível em: www.iejme.com/032009/IEJME_p00_introd_E.pdf.
- Brasil, (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Ministério da Educação e do

- Desporto. Secretaria de Educação Fundamental Brasília: MEC/SEF, 142p.
- Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF: MEC/SEF.
- Brasil. (2000) *Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEM, 58 p.
- Brasil. (2002) *Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio +: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEM, 141p
- Brasil. (2006) *Orientações curriculares para o Ensino Médio: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEB, 135 p
- Brousseau, G. (1986) *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques*. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-116.
- Edward S. Mooney, Cynthia W. Langrall, and Joshua T. Hertel. (2014) A Practitioner Perspective on Probabilistic Thinking Models and Frameworks. In Egan J. Chernoff, Bharath Sriraman (eds) *Probabilistic Thinking: Presenting Plural Perspectives*. Springer: Dordrecht.
- Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 7-10). Campinas: Papyrus.
- Gürbüz, R. (2008). Olasılık konusunun öğretiminde kullanılabilecek bilgisayar destekli bir materyal [A computer aided material for teaching 'probability' topic]. *Mehmet Akif Ersoy University Journal of Faculty of Education*, 8(15), 41-52.
- Mills, J. (2002). Using computer simulation methods to teach statistics: A review of the literature. *Journal of Statistics Education*, 10(1). Disponível em: www.amstat.org/publications/jse/v10n1/mills.html
- Rodrigues, M. R. (2018). *A Urna de Bernoulli como modelo fundamental no ensino de probabilidade*. Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Retirado em 10 de agosto de 2019 de: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11197>
- Ventsel, H. (1962). *Théorie des Probabilités* (reimpressão em 1973). Moscou: Editora MIR.
- Vieira, M. (2008). *Análise Exploratória de Dados: uma abordagem com alunos do Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. Retirado em 10 de Agosto de 2019 de <https://sapientia.pucsp.br/bitstream/handle/11347/1/Marcia%20Vieira.pdf>